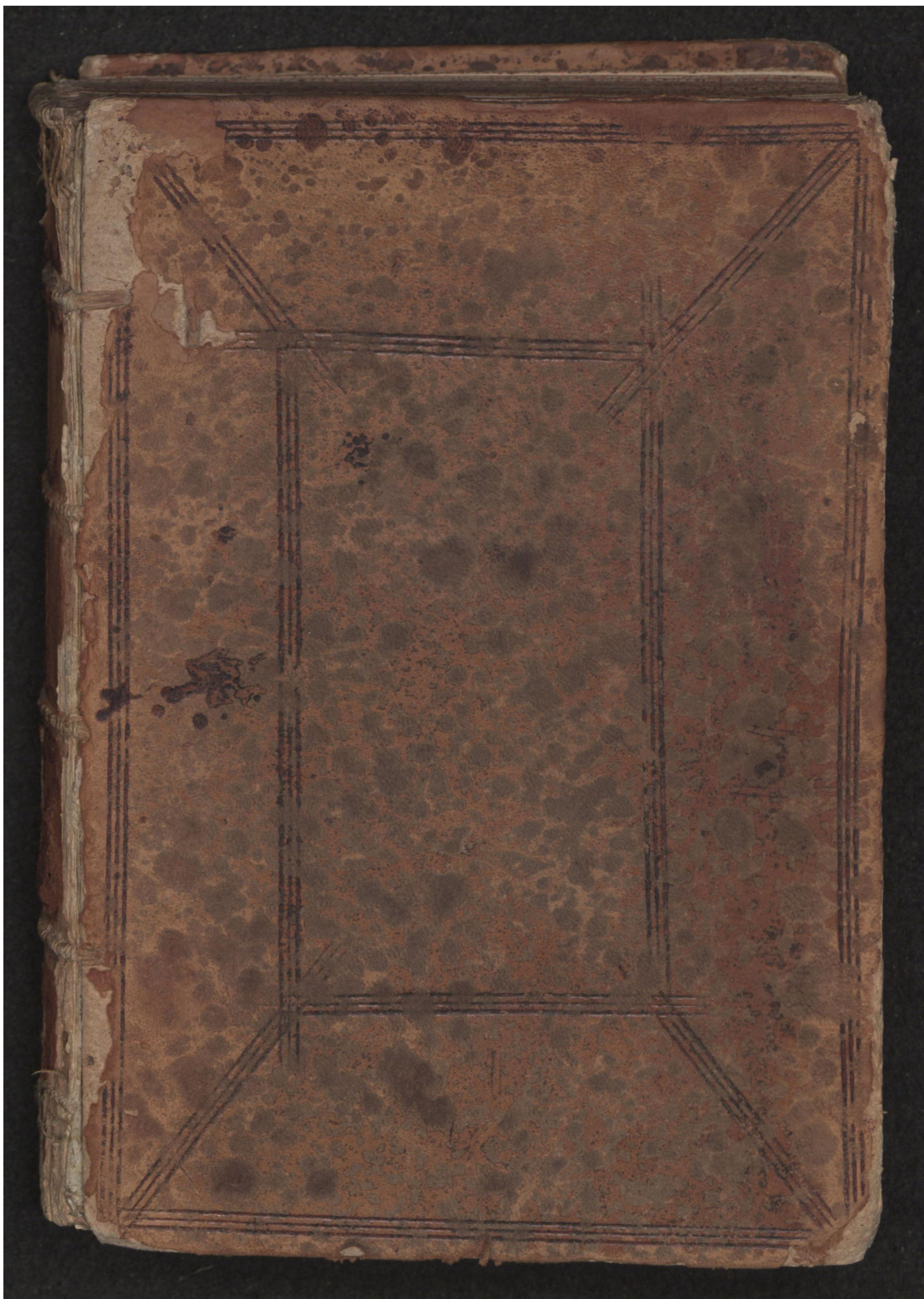
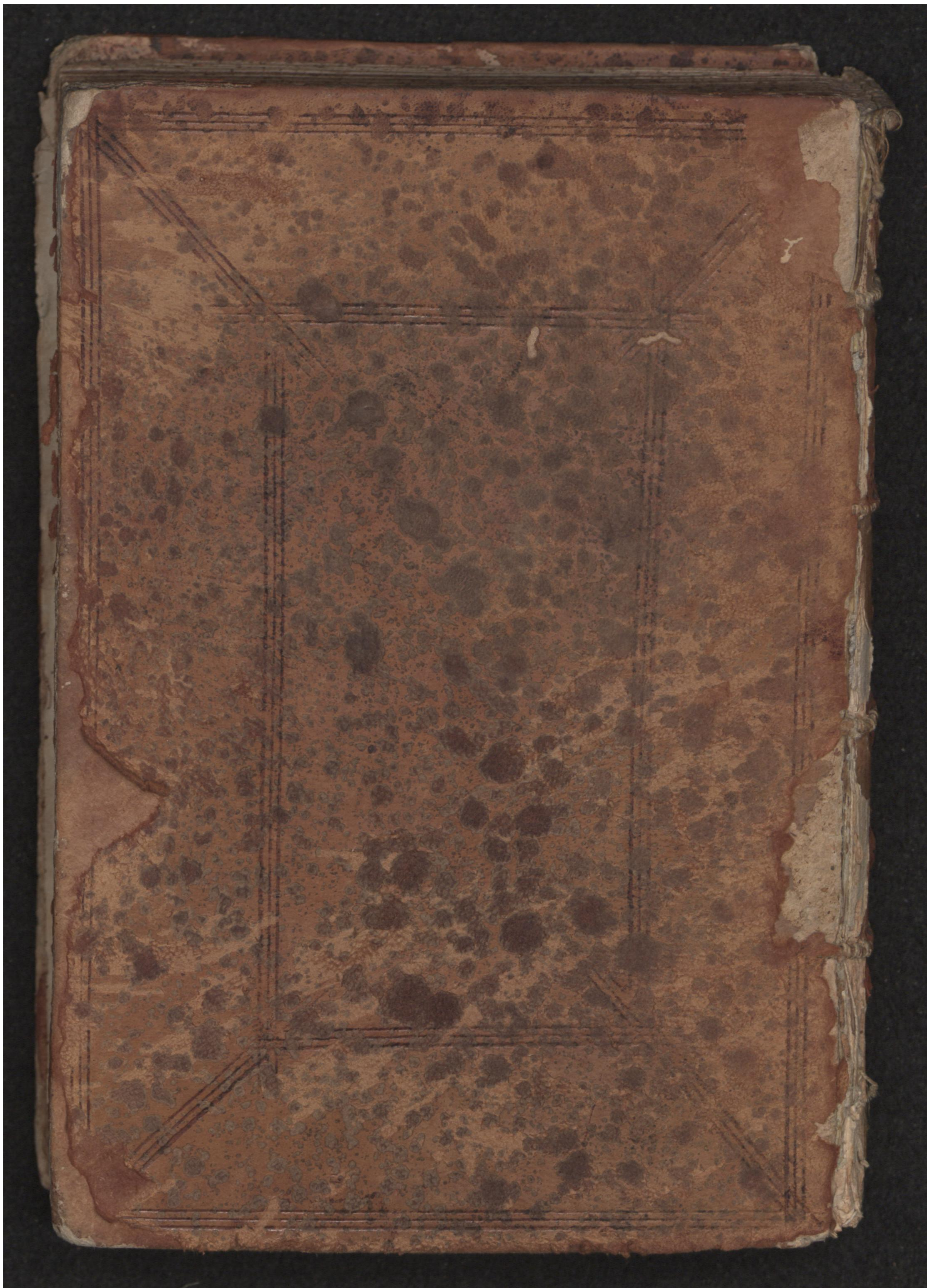
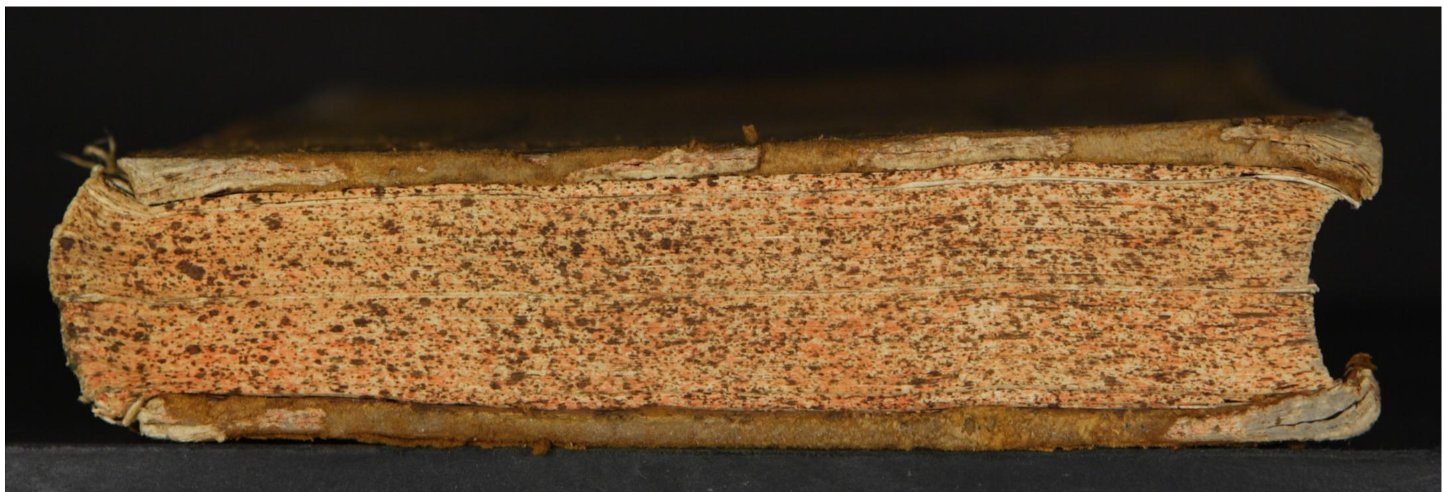












VETERVM GEOMETRIA PROMOTA IN SEPTEM DE CYCLOIDE LIBRIS,

Et in duabus adiectis Appendicibus.

Autore ANTONIO LALOVERA Societatis IESV.





TOLOSÆ,

Apud ARNALDVM COLOMERIVM, Regis & Academiæ Tolosanæ Typographum.

M. DC. LX.

CVM PRIVILEGIO.



SERENISSIMO PRINCIPI

ARMANDO BORBONIO,

PRINCIPI DE CONTY,

PROREGI OCCITANIÆ, &c.



OT támque admiranda, quæ Antiquos latuerint, inueniuntur ab ætatis nostræ Geometris (SERENISSIME PRINCEPS) vt rectè nuper pronuntiatum à quodam fuerit, nunc tandem in Geometricis superatum fœliciter esse Bonæ Spei promontorium; vnde ad incognitas olim, præcipuè Tetragonismorum & Perimetrorum Regiones expedita pateat via. In hac ego longinquâ peregrinatione cùm plures annos consumpserim, iamque postremùm redux noui aliquid inde asportasse mihi videar, eiusmodi inuenti primum & generalem conspectum deberi Tibi, qui pro Rege in istis oris summâ totius Prouinciæ fœlicitate imperas, statim

intellexi. Tua verò, quam à ſtirpe Borboniâ hæreditario iure trahis, Comitas; & quam Indole, ſtudiiſque Regio ſanguine digniſſimis mirificè auges; compulit me, vt moras, quas tenuitatis meæ mihi conſcius nectebam, abrumperem; Tibíque me cum diuturnæ nauigationis fructu qualicunque, meo certè & nouo ſiſterem. Fiduciam accedendi auxit, quod cùm ſeptem iſtorum librorum primum, aliquod noſtræ aduectionis periculum facturus, emiſiſſem, & nominatim ad Virum direxiſſem in dignoſcendis & æſtimandis iis, quæ in hoc genere ex Orbe diſſito conuehuntur, experientiſſimum, non ſit contemptui habitus, redieritque prælo iterum paratus, & fratribus (vt equidem ſpero) non inauſpicatò adiungendus. Nauium nomen quibus iſtud, quicquid eſt Geometriæ, inueximus, *Libra* eſt, abſolutiſſimum Iuſtitiæ Tuæ ſymbolum; neque verò nomen nudum eſt, ſed & res ipſa ab Archimede olim fabricata, à nobis reſtaurata, & ad tutam per ſumma & auia marium velificationem, vindicata Geometris. Quod autem duas eius nominis adhibuimus, vnam quam *Grammicam* diximus; alteram, *planam*; minimè pertimeſcimus illud Sapientis, *abominatio eſt apud Dominum pondus, & pondus*: quamuis enim diuerſæ exiſtant, ambæ tamen ſunt æquiſſimæ, mirabiléque ad Veritatem longè in re-

rum abditis inquirendam, atque inde in oculos hominum asportandam adiumentum. Sed cur istud ego fusiùs commemoro: cùm tua illa in omni Disciplinarum genere eruditio, hominum opinione longè maior, id per se vel primo obtutu æstimare facilè possit; & cùm mihi satis superque sit hac ad Te admissum fuisse occasione, vt quam Tolosates, Occitaniæque Tuæ Populi omnes cohibere non possunt lætitiam, postquam Tuo gubernari iam cœperunt Imperio, illam ego Tibi tester, quam cœpi vel ob id maiorem, quòd eius Societatis sim, cui iucundissimum semper fuit Tuis parére nutibus. Vno & eodem tempore Tua Occitania immortale beneficium à Rege Optimo sibi duplex conferri sensit; primum fuit commune reliquis non Prouinciis solùm, sed etiam, quâ latè patet Europa, Regnis, Pax diu expetita, & tot bellis victoriisque parta; alterum, Te qui expeditionibus Italicâ & Ruscinonensi plurimùm ad tantum illud munus contuleras, habere Rectorem, eiusdemque Regium ac Perpetuum vindicem. Vix Te primus rumor Proregem in Prouinciam istam detulerat, cum auita Religio & Iustitia sese altiùs extulerunt, Fautoris & Defensoris Potentissimi audito nomine: Tolosæ verò, quæ vt caput Prouinciæ loqui solet, vna fuit, estque etiam nunc constans vox è Panegyrico illo, hoc est, ex

Adulationis ſede ad Veritatis ſolum traducta, *Vita Principis cenſura eſt, eáque perpetua; ad hanc dirigimur, ad hanc conuertimur, nec tam imperio nobis opus eſt, quàm exemplo.* Illo vt diutiſſimè præluceas Prouinciæ Tuæ, Regno, & Orbi, opto, ſummiſque à Deo votis poſtulo, in Collegio Toloſano 8. Maij 1660.

Deuotus Seren. Tuæ Celſit.

ANTONIVS LALOVERA,
Societatis IESV.



Ad Lectorem Geometram.

NIHIL dubito, LECTOR GEOMETRA, *quin octo problematum totâ Europâ peruulgatorum calculus, quem ineunte anno superiore 1659. edidi, aliquam in te concitarit expectationem demonstrationum quas tunc pollicitus sum: sed moram sex mensium ex eo interiectorum ante primam Typographi operam ab anno ferme iam cœptam purgabit ecce duplicatus librorum numerus. Cùm enim vniuersa illorum problematum demonstratio libris comprehensa quatuor tunc penes nos extaret, prodeunt nunc omnino septem, cum Appendicibus duabus, quæ pro libro integro vt computentur, facilè (nisi fallor) a te obtinebunt: adeo nouam & arduam materiam tractant. Noua siquidem in Geometricis quærenda mihi semper propterea duxi, quòd cùm ab alijs iam inuenta illustrentur sua satis demonstratione; hoc vnum Geometræ Scriptori restare videtur, vt ad irreperta porrò pergat; alioquin aliena in hoc genere scriptionis ingerere, hominis est (vt cum Tullio in pari ferme causâ loquar)* intemperanter abutentis otio, & literis. *Primum tamen huius Operis librum licet antea à nobis editum, hîc secundò damus, quòd initium sit solutionis quæsitæ, & quòd in antecessum emissus tunc fuerit, quasi alijs prælusurus; præsertim si Viri doctissimi, ad quem illum tunc destinauimus, examine & iudicio non improbatus rediret. Quòd autem post acceptam Dettonuillæi Epistolam illam qua peritissimos Europæ Geometras ad inquisitionem solutionis prouocabat, statim intra decem dies primum illum libellum ediderimus; & quòd post tres menses totam solutionem mente complexi fuerimus, eámque è schedulis in mundum relatam initio mensis Nouembris habuerimus, non est quod quisquam id imputet promptiori cuidam ingenij nostri solertiæ; etenim eam in nobis nullam esse agnoscimus, & profitemur: sed causa huius vnica est, quòd generalem methodum ad solutionem eiusmodi problematum iam ab anno 1651. edideramus in Tetragonismicorum Elementorum libris, vt in sexto huius Operis libro ostendemus; illius verò methodi fundamento ita præiacto superstruenda tantùm nobis ea fuerunt, quæ erant huius materiæ propria: quanquam & horum quoque magnam partem iam cognitam habebamus ex iisdem illis Elementis, nempe quæ ad* quadratrices *circuli attinent. Dici enim vix potest quanto in*

Geometricis ſublimioribus adiumento ſint iſtæ quadratrices, quarum generalem, natiuam & minimè fucatam geneſim cùm hauſiſſemus ex generatione quadratricis, quam tantùm pro triangulo rectilineo Archimedes olim tradiderat, vnde & Parabolæ quadraturam elicuerat; inuenimus tanto pòſt tempore quadratrices circuli & hyperbolæ, eáſque innumeras, vt in ſecundâ Appendice explicamus. Ex illis verò ſemel habitis aſſequuti nullo negotio ſumus quatuor præſertim, quæ præ nouitate admirationem aliquam habuerunt; primò ex dato ſegmentorum centro grauitatis, quadraturam ipſorum eruimus ſegmentorum non in circulo vel ellipſi ſolùm, ſed in qualibet etiam hyperbola; ſecundò ex datâ quadraturâ ſegmentorum, inuenimus grauitatis centrum ipſorum ſegmentorum, & etiam ſemiſegmentorum; tertiò inde quoque obtinuimus cubaturam portionis cylindri, aut cylindracei, cuius baſis ſit ſegmentum, vel ſemiſegmentum non circuli tantùm, ſed hyperbolæ quoque cuiuſcunque, præciſam plano per centrum vtcunque ductо; quartò denique eiuſmodi portionum (eas vngulas *vocauit Gregorius à S. Vincentio; nos* cuneos) *reperimus centra grauitatis, datâ circuli & hyperbolæ quadraturâ; quæ quatuor anterioribus Geometris incognita fuere, quantum ex ipſorum monumentis conſtat. In illis ipſis Elementis ſtatuimus principia, vnde infertur tetragoniſmus figuræ, quæ ad poſitionem rectæ datæ inclinata ſit ſuper datâ qualibet curuâ, & generetur ex figurâ aliâ inſiſtente ſuper illâ eadem curuâ, vt rem exponimus in ſecundæ Appendicis huius operis parte* 2. *num.* 8. *Cuius quidem inuentionis noſtræ meminimus nunc, vt innuamus, ex ea nos elicere quadraturam* Hyperboloidis, *eodem pacto genitæ, quo* Cycloides *primaria: Cycloidis enim generatio offert modum ſimiles lineas procreandi in alijs quibuſlibet curuis, hoc modo.*

In Figura LIII. *deſignata notis Romanis in tabula quarta, eſto quælibet curua b i, per quam intelligatur æquabiliter moueri punctum b, ita vt æqualibus temporibus æquales portiones itineris curui percurrat; eſto recta c r ad quam ex b demiſſa ſit perpendicularis b c; intelligatur æquabili latione ferri recta c b ſecum connexam curuam i b deferens; ita autem trahatur ad partes r ſuper recta r c, vt paribus temporibus pares portiones eiuſdem c r decurrantur ab ipſa b c conſtituente ſemper angulum rectum cum eadem c r; illæ autem portiones lineæ rectæ r c ſint æquales portionibus curuæ b i decurſis eodem tempore. Via quam deſcribit motu ſuo punctum b habet generationem ſimilem viæ Cycloidicæ: ac proinde ſi figura b t f g ad poſitionem rectæ r c æquet differentiam figuræ b i g, & figuræ illius inde ita genitæ, habet hanc proprietatem vt f g parallela rectæ c r*

occurrens

occurrens rectæ b c in g, & arcui b i in i, sit perpetua lege æqualis arcui b i, vt in secunda propositione primi ostendemus pro Cycloide, pro alijs verò non est multò difficilius probatu. Cæterùm semita ista puncti b in motu rotæ & similium spectata, in memoriam mihi reuocare solet viam aquilæ in cœlo, *in qua percipienda Sapientissimus Salomon se plurimùm laborare profitetur: sicuti enim aquila* lineam sui volatûs *(vt Ambrosij verba, quæ Geometram sapiunt, vsurpem)* figit in liquido, *ita rotæ currentis punctum lineam sui quasi volatûs notat in aëre, sed obscuris admodum vestigijs, & quæ negotium Geometræ haud exiguum facessunt.*

Esto iam d b i hyperbola primaria (ita voco eam cuius axes sunt inter se æquales) comprehensa asymptotis c a, a n angulum rectum c a n constituentibus, vt ex Elementis conicis constat; eius semiaxis transuersus sit b a; intelligatur curua f t b h ita genita ex hyperbolica i b d, vt quæcunque i g vel h e ad rectam r c parallela ducatur, occurrens hyperbolæ perimetro in i vel d; recta f g, vel e h sit æqualis arcui i b, vel b d: compleatur parallelogrammum a c b n, quod ex iisdem Elementis ostenditur esse quadratum; ex a b secetur a q æqualis lateri a c, & per q agatur q z perpendicularis ad q a; per n agatur n z parallela rectæ q a, & compleatur parallelogrammum z q a m. Descripta sit z o hyperbola primaria semiaxe transuerso z m, centro m; intelligatur alia hyperbola primaria u a l cuius centrum q, semiaxis transuersus q a: ducta sit quælibet r i parallela asymptoto a n, occurrens alteri asymptoto in r; hyperbolæ b in i: per i ductæ sint i u, i o parallelæ ad rectas b a, a m, occurrentes hyperbolis l a u, n o in u, o; rectis q z, m z in s, x; ducta quoque sit per i recta f i g parallela rectæ c r, occurrens curuæ b t f in f; compleatur parallelogrammum g f y c. Aio quoties inter puncta r, a iacet punctum c, figuram hyperbolicam s u a q (eam appello externè cauam*) imminutam hyperbolica altera* internè caua *z o x esse æqualem figuræ y f t b c comprehensæ sub curua f b, & sub rectis f y, y c, c b. Quod si puncta y, f iacuerint ad rectæ c b partes oppositas, aio vtrumque simul segmentum fore æquale figuræ y f t b c. Hinc infero cuneatam vel vngularem superficiem definitam in decima sexta quinti libri sequentis, insistentem super curua i b, & abscissam plano per c a rectam ducto, inclinatóque ad planum r c b gradibus 45. esse notam, data quadratura hyperbolæ, vt pote æqualem figuræ y f t b c. Vnde præterea elicio si recta i o ponatur occurrere curuæ b d in d, superficiem vngularem insistentem super curua i b d esse æqualem duplo hyperbolicæ figuræ s q a u comprehensæ sub rectis a q, q s, s u, & sub arcu hyperbolico u a. Ex ista autem vngulari superficie præfacile est dare*

ſuperficiem periphericam quam linea hyperbolica d b i deſcribit dum circa rectam b c manentem rotatur; methodus enim illius traditur in quinquageſima ſecunda quinti libri, ex demonſtratis in corollario ſecundo decimæ nonæ. Superficiem autem ſimilem pro ſuperficie parabolæ rotatæ circa axem vel baſim inuenit Clariſſ. Fermatius, eiuſque nos methodum exhibemus in parte prima Appendicis ſecundæ: vt iam non ſolùm cognita ſit ſuperficies plana æqualis ſphæricæ genitæ ex rotatione circuli, quæ ab Archimede primùm fuit demonſtrata; & ſuperficies conoides reſpondens rotationi parabolæ, quam debemus V. C. Fermatio: ſed ſuperficies etiam illa, quæ hyperbolæ, modo iam præſcripto rotatæ competit, eſtque inuentionis noſtræ. Quòd ſi eadem hyperbola primaria intelligatur duci circa axem tranſuerſum a b, vel rectum a m, huic quoque conoidicæ ſuperficiei æqualem figuram planam exhibet methodus noſtra; per illam enim vngularis ſuperficies primaria (ſic appello eam quæ abſcinditur plano ſuper baſi inclinato gradibus 45.) reſecta plano per axem tranſuerſum ducto eſt æqualis planæ figuræ quæ ſuper eodem tranſuerſo inſiſtit, & cuius dimetientes ad poſitionem recti ſemiaxis ſunt æquales ſemidiametris eductis à puncto hyperbolæ in quo figuræ ita inſiſtentis dimetientes illæ (ſic vocare ſoleo parallelas rectas vni certæ datæ, vt in iſto caſu parallelas alteri axi) ſecant ipſam hyperbolam. Ita quoque vngularis ſuperficies primaria reſecta plano per axem rectum ducto eſt æqualis planæ figuræ, quæ ſuper eodem axe recto inſiſtit, & cuius dimetientes ad poſitionem axis tranſuerſi ſunt æquales ſemidiametris pari pacto eductis ex puncto hyperbolæ. Hoc idem theorema habet locum in vngulari ſuperficie (primariam ſemper intelligimus, niſi aliud innuamus) ad circulum attinente; ideóque cùm ſemidiametri omnes ſint inter ſe æquales, eiuſmodi plana figura eſt parallelogrammum rectangulum altitudinis æquantis ſemidiametrum circuli. Cæterùm iſtæ planæ figuræ inſiſtentes tam ſuper axe tranſuerſo quàm ſuper recto hyperbolæ primariæ, ad figuras a q ſ u, z o x ſupra deſcriptas pro gyratione hyperbolæ primariæ i b d circa rectam c b, ſe habent vt diameter quadrati ad latus eiuſdem: dimetientes enim figuratum a q ſ u, z o x, parallelæ axibus b a, a m, repræſentant rectas quæ ad figurarum ita inſiſtentium dimetientes, hoc eſt ad ſemidiametros hyperbolæ d b i, ſe habent vt latus quadrati ad diametrum eiuſdem. Nec mihi tam abſtruſum fuit inuenire illas figuras eſſe hyperbolicas, quàm eſſe æquales vngulari ſuperficiei; ſunt enim duo iſta, valde diuerſa: vnde licet methodus inueniendi has figuras eſſet vitioſa, prius tamen theorema adhuc ſtaret. Gregorius à S. Vincentio in prop. 230. de Hyperb. inuenit quidem figuram

ex semidiametris hyperbolæ compactam illam quæ insistit super axe recto; non video tamen vbi repererit eam quæ insistit super transuerso. Porro inuentionem nostram non effugit vngularis superficies, quæ spectat ad quamlibet ellipsim & hyperbolam secundariam, cuius videlicet axes non sunt inter se æquales, per quemcunque axium agatur planum resecans illam superficiem: eiusmodi enim plana figura insistens super axe illo, habet dimetientes quæ vt quadratum axis, per quem non ducitur planum illud resecans, est ad quadratum alterius axis, ita se habeant ad rectam puncto tactûs perpendiculariter erectam super tangente, & interceptam inter tactum atque illum axem per quem non agitur planum resecans. Illæ verò figuræ planæ insistentes super axe per quem agitur planum inueniuntur atque demonstrantur nostra methodo: & quidem quando planum resecans agitur per axem maiorem ellipseos, figura est portio semiellipseos concentricæ, cuius semiaxes noti sunt: quando verò agitur per minorem est portio externè caua semihyperbolæ, cuius semiaxes noti sunt. Quod si planum illud, quod resecans non semel hîc appellauimus, agatur, per axem hyperbolæ secundariæ rectum, figura erit hyperbolica internè caua; si per axem transuersum, externè caua, eiusque vterque axis fiet notus. Atque vt rem in vno ellipseos casu tradam: si datæ ellipseos axis maior fuerit duplus minoris, & planum resecans agatur per maiorem, figura plana insistens erit semiellipsis concentrica, cuius semiaxis vnus est idem cum semiaxe minore datæ ellipseos, & ad alterum semiaxem concentricæ coniugatum est potestate vt 3. ad 16. nisi calculus me decipit: si autem planum resecans ducatur per datæ eiusdem ellipseos axem minorem, figura plana insistens erit semihyperbola externè caua concentrica ellipsi datæ; habens tranversum semiaxem eundem cum semiaxe maiore ellipseos datæ, iste vero semiaxis erit ad semiaxem eiusdem concentricæ rectum potestate vt 12. ad 1. saluâ semper logistices correctione. Hoc ipsum in hyperbolæ secundariæ vno certo casu definire supersedeo; cùm is qui methodum calculi pro ellipsi iam scriptam perceperit, & demonstrarit, non possit dubitare quin extendatur ad hyperbolam. Habes igitur hîc (Lector) occasione sumptà ex illo Theoremate de figura inclinata super curua, planam figuram æqualam superficiei vngulari pro sectionibus omnibus conicis, ac proinde & inde obtines æqualem superficiei sphæroidi ex ellipsi; & conoidi ex qualibet alia sectione conica genitæ. In libri quinti præfatione scripsi incognitam mihi esse figuram rectilineam quæ in ellipsi sit præscripto illo modo æqualis superficiei vngulari, sicuti cognita est æqualis vngulari superficiei in circulo; quod ipsum etiam nunc profiteor; id tamen

nihil obſtat quo minus data circuli & hyperbolæ quadratura, rectilineum illi æquale demonſtremus; vt & cuneos ſolidos ſiue vngulas, & earum etiam ſuperficies in omni ſectione conica notas faciat noſtra Geometria, & ita in ipſo Operis veſtibulo prouecta vltra veterum terminos appareat. Nullum autem ex Recentiorum Geometrarum libris adhuc legi, qui doceat inuentionem ſuperficierum ſphæroideon pro ellipſibus, & conoideon pro hyperbolis tam primaria quàm ſecundaria. Notandum verò eſt ſuperficies iſtas planas ita reſpondere ſuperficiebus vngularibus curuis, vt ſint illis æquales συνόλως καὶ μερικῶς, integrè & particulatim, *quem modum æqualitatis explico in quarta propoſitione ſexti libri, vbi figuram iſtam planam & curuam voco* coniugatas.

Porrò quid in ſingulis libris potiſsimum ſcripſerimus, propoſitiones vltimæ ſingulorum librorum docent; ſecundi tamen argumentum in ſola eius fronte extat: quòd verò Cyclocylindricam ibi tractatam Autor Recreationum Mathematicarum, *eſſe ellipſim aſſerit, omnino fallitur. Veterum more in illis demonſtrata de linearum curuarum quadratricibus; de grauium deſcendentium acceleratione; de curuæ cuiuſlibet æqualitate cum recta; de locis aſymptoticis, eorumque grauitatis centro; de proprietatibus libræ curuæ; de Cyclocylindricis figuris; de ſpectantibus ad ſolutionem problematum illorum toti Europæ propoſitorum, & alia eiuſmodi, quæ tibi in iſto opere noſtro occurrent, Lector Beneuole, ſi hallucinationis vitio caruerint, fortaſſe vitabimus Horatianum illud quod cum iſtos commentarios de Cycloide vel de* Rotatricula (*ita enim illam à* Rota, *vocant Scriptores Gallici*) *ſcriberemus, nobis ipſi vitandum proponebamus,*

Amphora cœpit
Inſtitui: currente *Rota* cur vrceus exit?

Quoniam verò Geometras omnes eſſe curioſos ſcio; curioſitatiſque morbum hunc eſſe, vt fame ſuos ſtimulet acuta, vnde fiat vt res vorentur integræ, nec ſatis aptè præparentur menti alendæ: hoc vnum à te flagito, Lector, vt famem iſtam compeſcas, & nolis eſſe (quod de ſe Tullius alicubi fatetur) ὀξύπεινος *in curioſitate: Geometrica enim huius generis, vt proſint, incidi, & mentis ſtomacho apparari debent; ita enim meliùs & vtiliùs concoquentur. Quod autem in Appendice ſecunda, & in iſta quoque iam Præfatione aliquot inuenta propono, eorum demonſtratione ſuppreſſa, id more Veterum auſim facere, non quo vllum cogere ad aſſenſum velim, ſed vt res non vulgares, aliȷs quibus libuerit & vacauerit, mihique etiam ipſi aliàs fortaſſe examinandas hîc conſignem. Conon ille, quem Archimedes*

eximiè laudat in Præfatione ad libros Spiralium, cùm multa à se inuenta summis tunc Geometris sine demonstratione proposuisset, quædam in ijs complexus est, quæ falsa erant, vt narrat ipse Archimedes, nec propterea quicquam de tanti viri existimatione detrahit, cùm reliqua raræ admodum inuestigationis essent, & ante illud inaccessa tempus. Dum autem propositiones illas affirmo esse non vulgares, nolim negare quin vulgares effici queant; sicuti & Antiquorum inuenta iamdiu vulgaria esse cœperunt; ipsæque aues & plantæ quæ non raræ solùm, sed necdum visæ fuerant, postquam ex detectis nuper vltimi Orbis regionibus ad nos delatæ semel fuerunt, ita communes nunc euaserunt, vt in auiarijs & hortis passim visantur. Te etiam, perhumane Lector, non ita morosum esse vnquam autumem, vt de libro aliquo inuentis Geometriæ nouis referto actum esse pronunties; si vnum quid vel leue in eo non rectè se habere deprehensum fuerit. Ego de libro non secus ac de segete existimare solitus semper fui: illa siquidem apud me seges nullius est pretij, vbi

Infœlix lolium, & steriles dominantur auenæ:

Ea verò mihi non desinit esse summi pretij, quæ latissimo flauescit in campo, quamuis non euidens lolij culmus vnus aut alter in densa illius & diuite sylua delitescere compertus fuerit. Licet Cononis propositiones illæ non omnes veræ fuerint; quia tamen maximam partem veræ, sublimes, & inexpectatæ fuerunt; ἐπὶ τὸ πλεῖον προάγαγε γεωμετρίαν, longè promouit Geometriam *Archimede ipso teste: cuius verba referre libuit, vt* promouendæ Geometriæ *studium esse perantiquam ostendamus; sæpiusque accidere quod idem testatur, vt problemata quæ initio credebantur intractabilia, lapsu temporis mansuefieri posse comprobentur.*

Miraberis fortasse (Lector) cur in ista præfatione nihil dum dixerim de iis quæ attinent ad Historiam problematum de Cycloide per totam Europam à D. Dettonvillæo sparsorum: causa huius silentii est, quod ea suis locis narrentur, meliusque ibi ex subiecta materia percipiantur. Vide sis libri primi propositionem 19. *libri secundi prop.* 10. *libri tertii prop.* 25. *libri quarti prop.* 36. *libri quinti prop.* 23. *libri sexti decimam septimam, & alias isti anteriores, præsertim duodecimam. Quid verò de quadraturæ circuli inuentione mihi ipse vindicem inspice, si lubet, in pag.* 127. 235. 241. 404. *Quantum autem calculo meo tribuam explico in pag.* 83. 125. 133. 180. 234.

ADDENDA.

AD *pag. 46. ſub finem libri ſecundi.* Quamuis ea quæ ad paginam 258. mox addituri ſumus, euincant Dettonuillæum hallucinatum in vno eſſe ſuper quo fundat demonſtrationem dimenſionis curuarum Cycloidicarum tam productarum quàm contractarum; iſtud tamen quod hîc ex illo retulimus veriſſimum eſt, nec nititur illo.

Ad pag. 142. ante propoſ. 3 Si analogia illa admittatur habere locum in iſto caſu, hinc liquet confirmari vnum, quod in aliis plurimis experti ſumus, ſolutionem nempe problematis alicuius vnâ viâ haud quaquam eſſe aliquando difficilem; aliâ verò eſſe plurimùm: nam noſtra hæc ſolutio facilis ſtatim apparet; at verò Roberuallio licet Doctiſſimo, mirum quantum difficilis viſa aliàs fuit, vt narrat ipſe Dettonuillæus in eadem Epiſtola ad D. de Sluze. Quod autem hoc loco fatemur laborare nos in inuenienda differentia inter D.D. Paſcalium & Dettonuillæum, eundem in nobis hærere ſcrupulum leges pag. 169.

Ad pag. 151. ſub finem Corollarij 2. In iſta Dettonuillæi demonſtratione deſiderauit aliquid Nobiliſſimus Geometra, & quidem meritò; id verò primus, quem ſciam, suppleuit noſter M. P. E. A. S. Sed totus calamo adſcribatur iſte lapſus; ſicuti & illa dictorum non cohærentia quæ à nobis adnotatur pag. 227. Coroll. 3. quis enim calamo diutius properante, nunquam dormitet?

Ad pag. 235. ante propoſ. 12. R. P. Merſennus iam ab anno 1644. præfat. in Synopſim fecit Lectori ſpem editionis plurimorum Magni cuiuſdam Geometræ inuentorum, *quibus*, inquit, *fortè breui quadratura circuli & hyperbolæ accedet.* Quis iſtud iactantiæ vlli vertat, quod Merſenno Magnus ille de ſe moderatis dixerit verbis? Aut quis inde, ſi quis fortè alius eam nunc promeret, laudem inuenti propoſiti idcirco minuendam cenſeret, quod inſignis ille Geometra ante annos ſexdecim innuiſſet à ſe repertam illam quadraturam?

Ad pag. 258. ante Coroll. 1 Iure optimo expectatur alia Dettonuillæi demonſtratio, nam ea quam dat, peruerſa ratiocinatione ſtatuit vnum veluti baſim totius demonſtrationis, quod falſum eſſe iam iam monſtrabitur: illud verò eſt (Fig. LII. tab. 4.) ſubtenſam b e eſſe ad arcum e o, vt eſt recta h m ad m g: conſtructio autem iubet c d f ſemicirculum centro g deſcriptum, eſſe genitorem magnæ Semicycloideos c e a f cuiuſcunque ſpeciei, eiuſque baſim a f ad peripheriam f d c ſemicirculi eſſe vt eſt data recta h g ad radium g f, ita vt puncta h, f, g ſint in eadem rectâ: ponit præterea baſi f a æquidiſtare rectam m b; ſumptum eſſe quodcunque punctum e in arcu cycloidico b c; iunctas eſſe rectas g m, b e, m h; arcum e o eſſe arcui d m ſimilem, æqualem & ſimiliter poſitum. Ego verò contendo ſubtenſam b e non eſſe neceſſariò ad arcum e o, vt eſt recta h m ad m g. Eſto g f ad g h poteſtate vt vnitas ad binarium, & arcus d m, m f ſint æquales, ſingulíque quadrans peripheriæ c d m f. In hoc caſu ex Euclideis Elementis patet rectam m h tangere circulum in m; rectas m g, m h eſſe æquales; & ſi h m producatur ad l, angulum l m o eſſe ſemirectum. Igitur ſi per o agatur o n tangens circulum e o in o, angulus n o b erit ſemirectus, vt pote æqualis angulo l m o; & ſi ex b in rectam n o demittatur perpendicularis b i, angulus i o b erit æqualis angulo m g h, & triangulum b o i ſimile triangulo h g m: ergo vt h m latus ad m g, ita b i latus ad i o, & vt h g latus ad g m, ita b o latus ad i o: ſed vt h g latus ad g m, ita ex Dettonuillæo & ex rei veritate, eſt recta b o ad arcum e o; ergo vt b o recta ad i o rectam, ita eſt eadem b o ad arcum e o: ergo arcus e o eſt æqualis rectæ i o. Rurſus quoniam ex Dettonuillæo vt h m recta ad radium m g, ita ſubtenſa b e ad arcum e o, & ita quoque monſtrauimus eſſe rectam b i ad i o vel ad e o ipſi (vt iam oſtendimus) æqualem; rectæ b i, b e habentes eandem rationem ad æquales i o, e o erunt inter ſe æquales; ergo cùm b i, b e ſint æquales, peripheria circuli centro b deſcripti interuallo rectæ b i tranſibit per e, quod eſt abſurdum. Nam cùm angulus b i o ſit ex conſtructione rectus, recta i o tanget circulum centri b, : ſed

tangit etiam circulum e o; ergo cùm isti circuli sint ad partes oppositas eiusdem tangentis o n, non sibi occurrent; ergo punctum e non est in peripheria circuli centro b descripti, ac proinde rectæ b i, b e non sunt æquales. Non igitur b e est ad arcum e o, vt recta h m, ad m g, quod erat demonstrandum. Innumeri sunt alij casus in quibus demonstrari pariter possit lemmatis illius falsitas.

Cæterùm quod idem Autor ait angulum mixtilineum b o e comprehensum sub recta b o & sub curua o e esse æqualem angulo rectilineo h g m, id propterea, vt puto, affirmat, quia dempto angulo contactus i o e, residuus b o i est æqualis angulo h g m: angulus autem contactus neque auget propriè, neque minuit angulum rectilineum, quà rectilineus est. At duorum istorum triangulorum h m g, b e o omnia latera esse proportionalia, inde inferre non licet, vt monstratum geometricè iam est. Moneo iterum à me non aliud affirmari quàm demonstrationem Dettonuillæi niti lemmate falso, ipsum verò theorema quod probandum suscepit, esse verissimum quando puncta h & f sunt vnum & idem, aliunde scio: at quando sunt diuersa, id perinde compertum non habeo: falsum profectò est, si ad hoc vt falsum non sit, lemma eiusmodi oporteat esse verum.

Ad pag. 403. ante numerum XI. Ἀδυναμίαν commutandi lineam curuam in rectam ipsi æqualem inter Recentiores asseruisse mihi primus videtur magni nominis Geometra Franciscus Vieta *Varior. de reb. geometr. resp. lib. 8. c. 1.* hoc disticho.

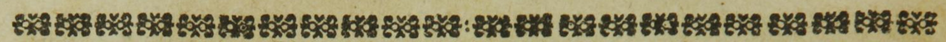
Qui verò exercet numeros, malè collocat horas,
Si rectum curuo conciliare studet.

Sed horas non malè collocauit subtilissimus Vvren, cum cycloidicam curuam ostendit esse quadruplam axis. Alter mihi esse videtur Cartesius primariæ notæ Geometra, pag. 340. geometriæ gallicè editæ Lugduni Batauorum an. 1637. cuius hæc sunt verba lib. 2. *proportio quæ est inter rectas & curuas lineas cognita non est, sed neque, vt equidem reor, cognosci humano ingenio potest.* Postremus tandem Leodiensis Geometra insignis, vbi vidit cycloidicæ lineæ proportionem cum recta repertam esse, restrinxit assertionem ad genus ὀρθώσεως difficillimum, affirmando id quod Dettonuillæus approbat, & quod M.P.E.A.S. Geometricè refellit: ex qua methodo difficile non erit inuenire curuam quæ ad axem suum se habeat etiam vt numerus ad numerum: nam in fig. 4. *Dissertationis illius*, si vt est cubus applicatæ m n ad cubum applicatæ cuiuslibet f i, ita sit quadratum axis a n ad quadratum portionis a f; & longitudo a n ponatur 27. n m 54. curua m i a inuenietur 61.

De cætero memineris, Lector, quorum nudam absque demonstratione propositionem damus, eorum nihil à nobis pro indubitatè vero tradi; sed singula maturiùs examinanda relinqui.

Errata sic corrige.

PAg. 165. *sub finem corollarij tertij, dele illa verba*, occurrens limbo o d y in puncto d &c. *pag.* 185. *lin.* 4. erit æquale. *pag.* 218. *lin.* 8. anno 1647. *pag.* 219. *lin.* 8. *ante finem* collocari debeat. *pag.* 240. *lin. penult.* eximiam. *pag.* 341. *lin.* 13. Mathematicas disciplinas. *pag.* 293. *lin.* 10. in decima sexta. *pag.* 392. *lin.* 16. figura 108. omnes. *ibidem lin.* 18. figura 109. omnes. *pag.* 393. *lin.* 3. parabolicæ a c. *ibidem lin* 9. methodum figuræ 107. generatis. *ibidem lin.* 15. axi a b. *ibidem lin.* 16 latus r u. *pag.* 394. *lin.* 22. denominator. *pag.* 399. *lin. antepenult.* asymptotus sit c p perpendicularis ad diametrum b d, & ex puncto. *Nonnulla alia corrigenda scripsimus in extrema pagina* 404. *In figura* 40. *litera m est bis sculpta; quod monemus vt lector hac cautione errorem vitet; nam adiuncta facilè indicabunt vtra illarum appelletur.*

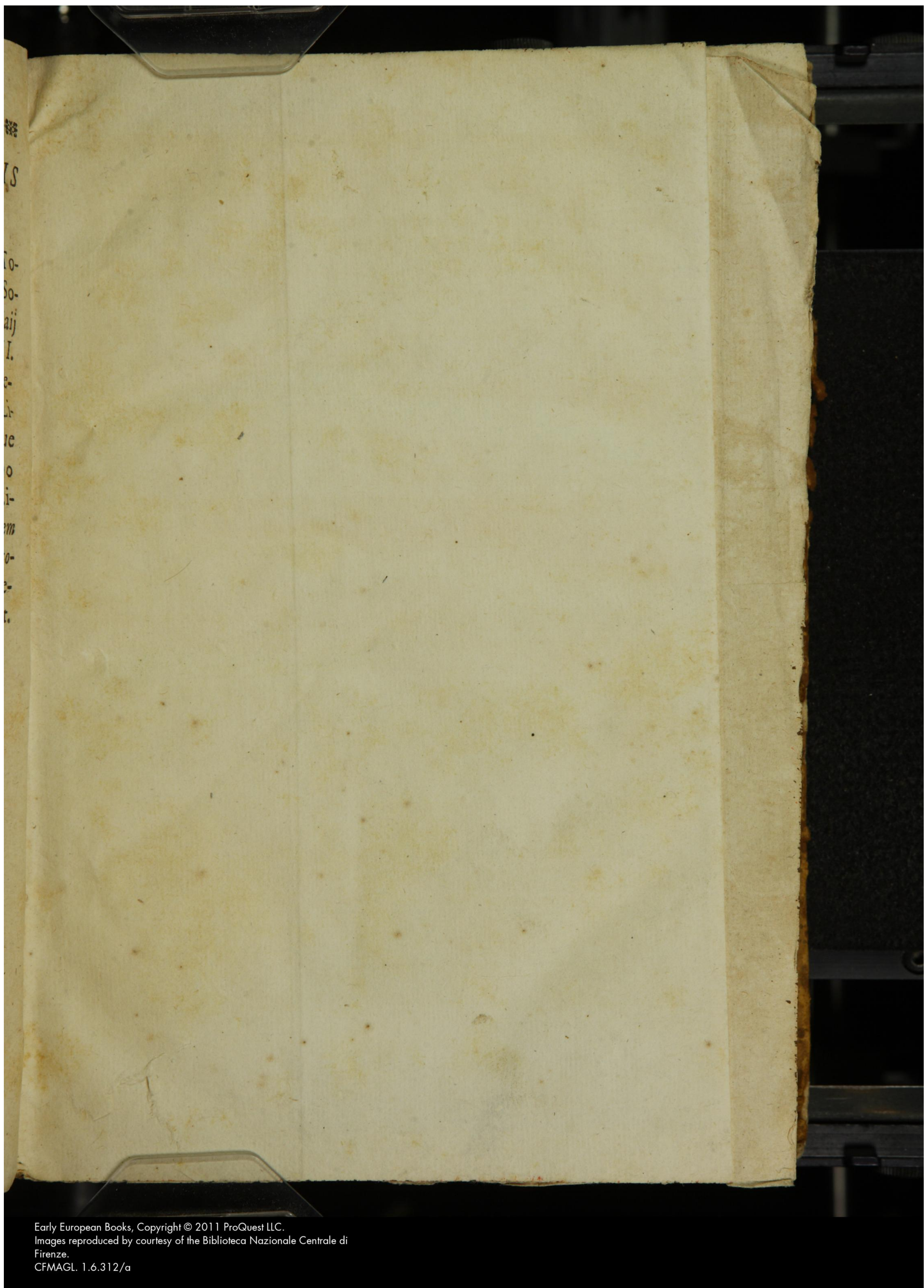


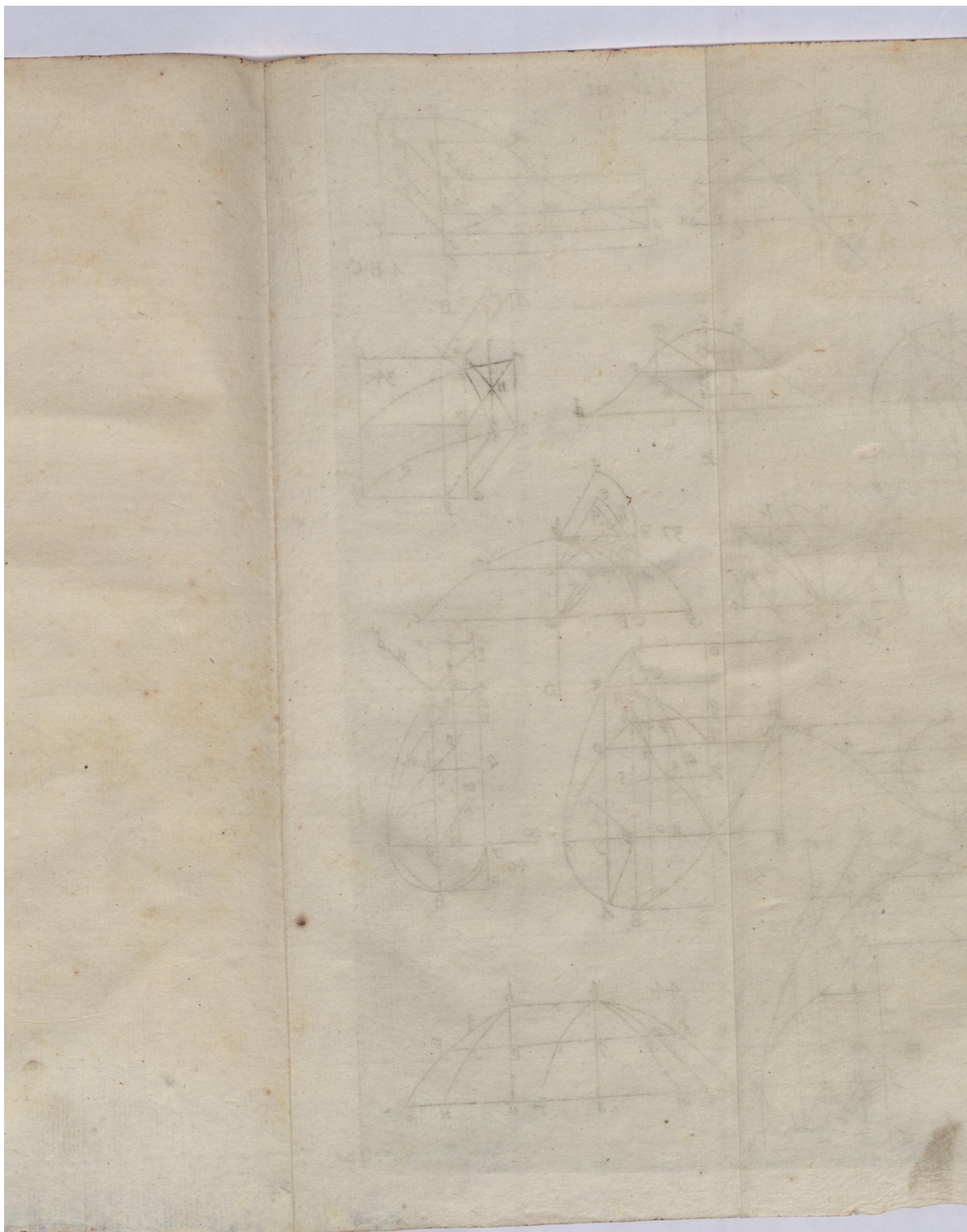
FACVLTAS R. P. PROVINCIALIS Societatis IESV.

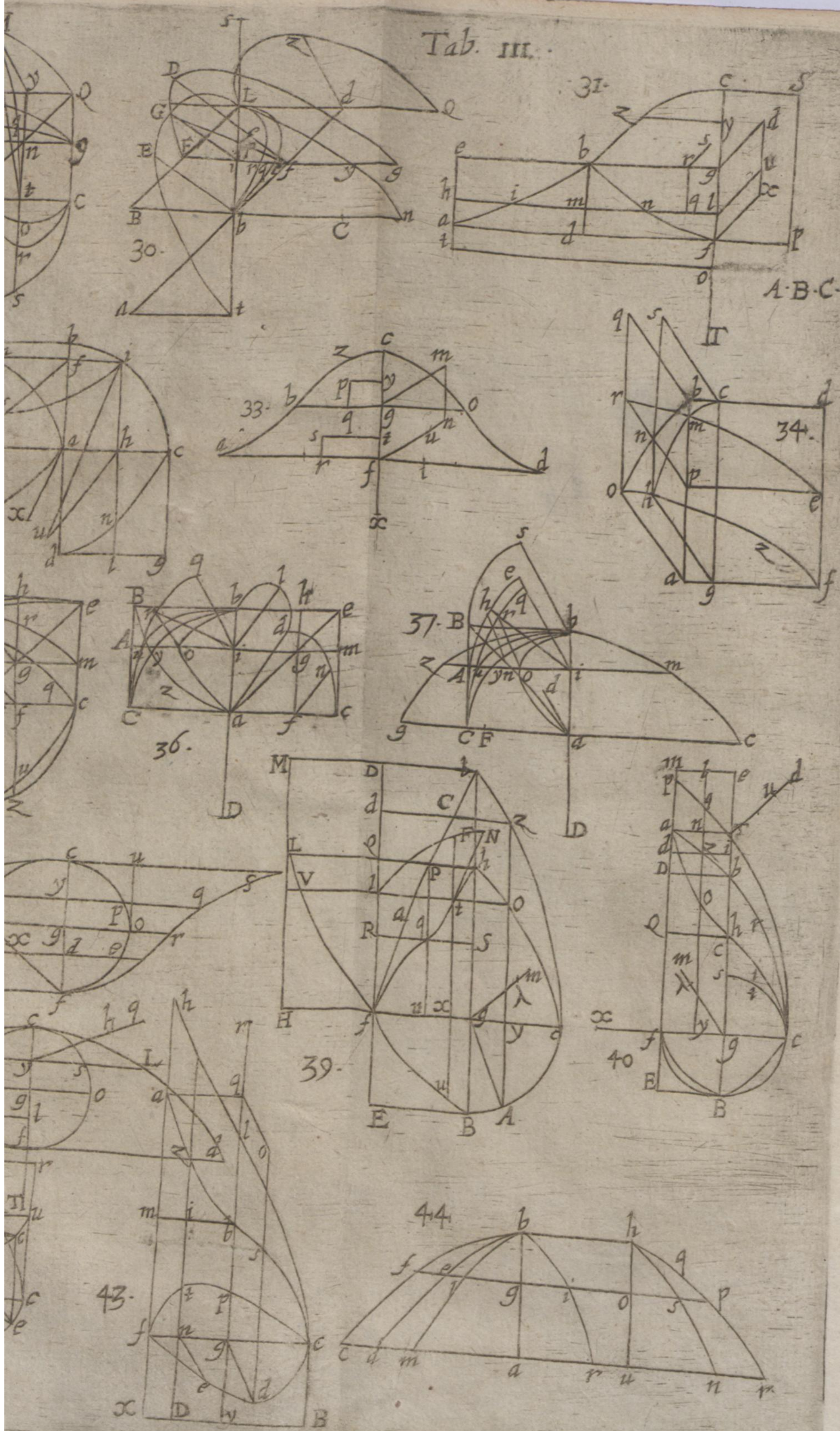
EGo Franciscvs Tarbe Prouincialis Prouinciæ Tolosanæ Societatis IESV, iuxta priuilegium eidem Societati à Christianissimis Regibus Henrico III. 10. Maij 1583. Henrico IV. 20. Decemb. 1606. Ludouico XIII. 14. Feb. 1611. & Ludouico XIV. nunc regnante 23. Decemb. 1650. quo Bibliopolis omnibus vetitum est ne Libros à Societatis nostræ hominibus compositos, absque Superiorum eius permissu imprimant, Permitto Arnaldo Colomerio Bibliopolæ, vt ad decem proximè annos Librum qui inscribitur *Veterum Geometria promota in septem de Cycloide Libris, & in duabus adiunctis Appendicibus, Autore P. ANTONIO LALOVERA Societatis IESV*, reuisum probatúmque, imprimere ac diuendere possit. Datum Tolosæ 25. Decembris 1659.

FRANCISCVS TARBE.

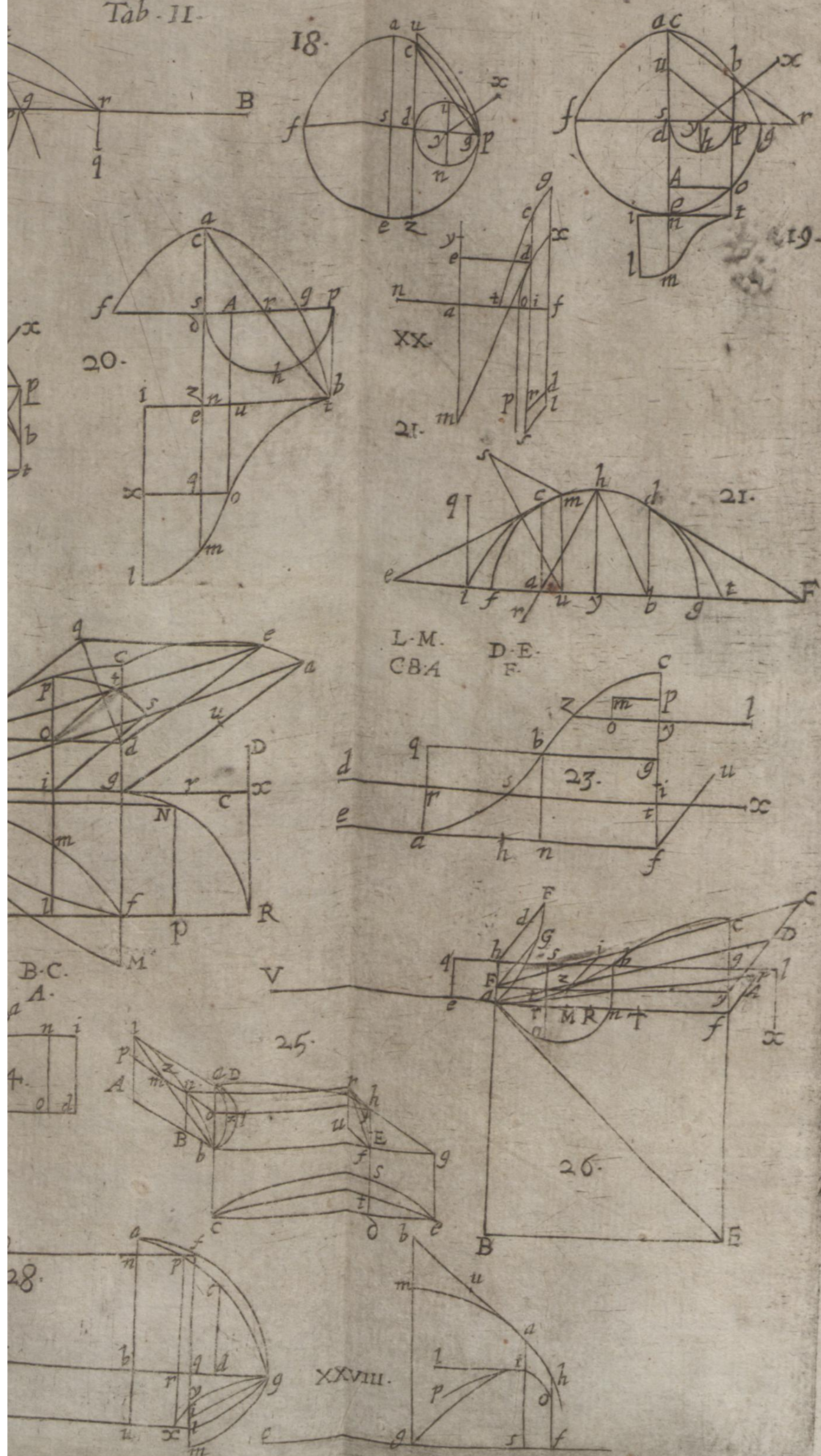
DE

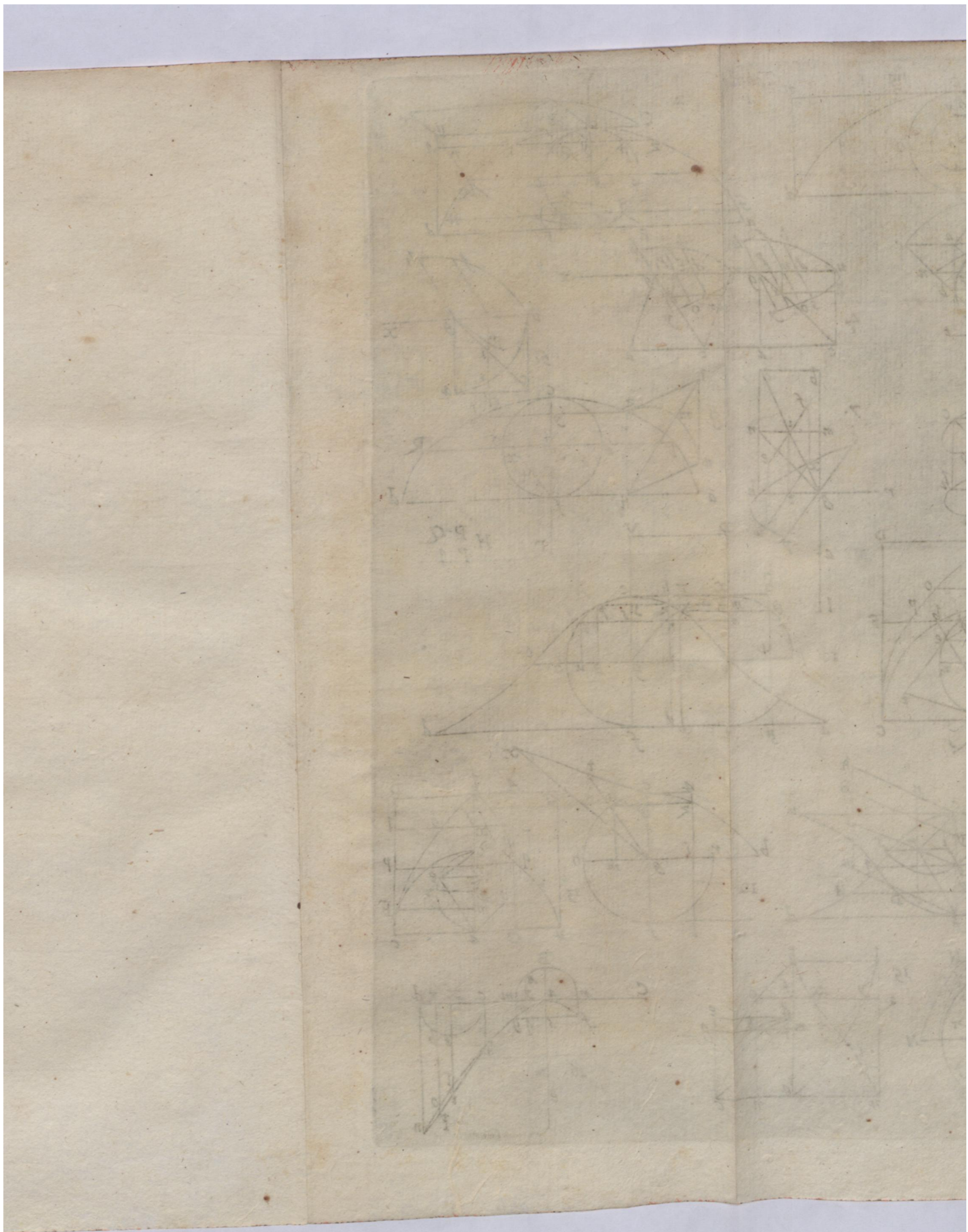


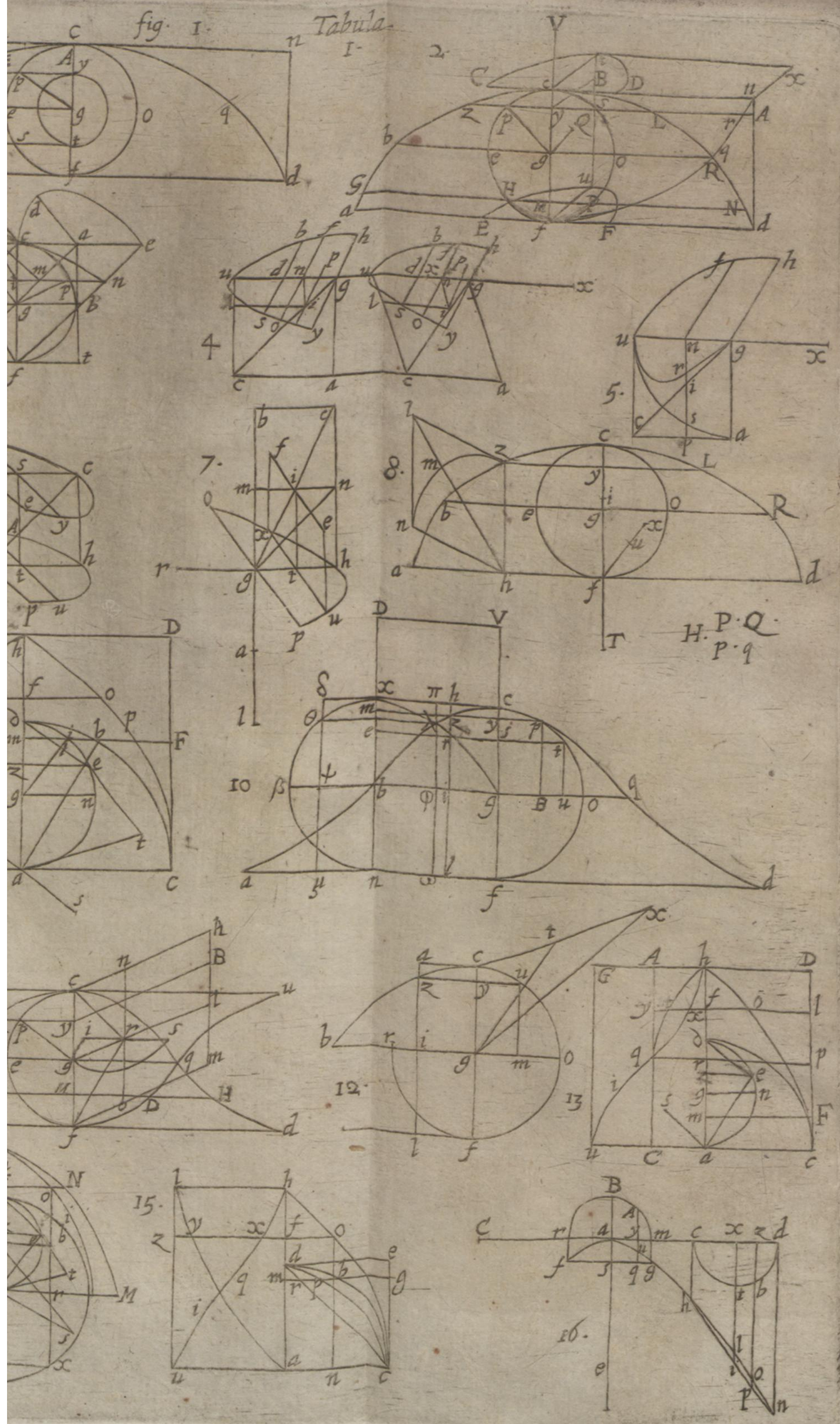


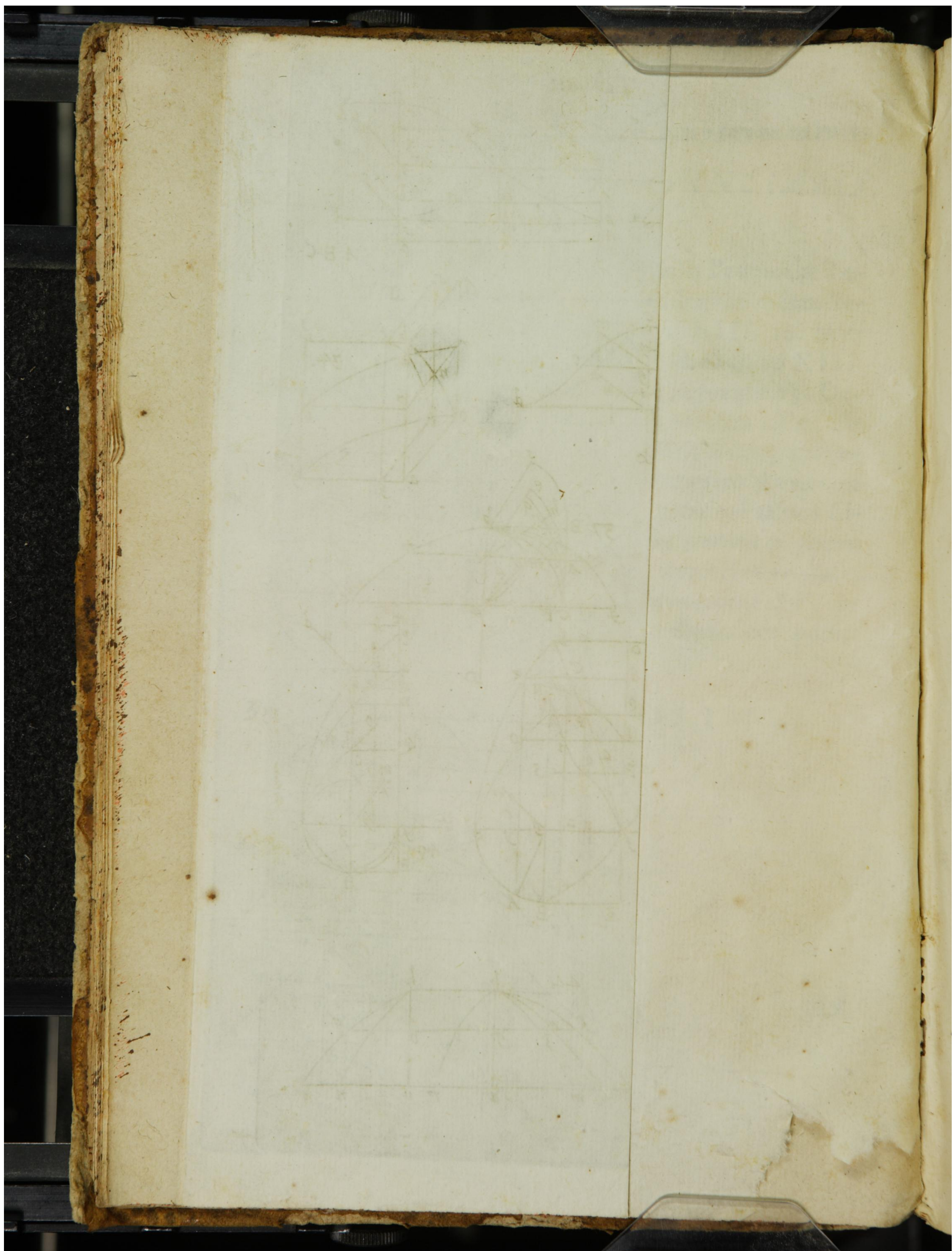


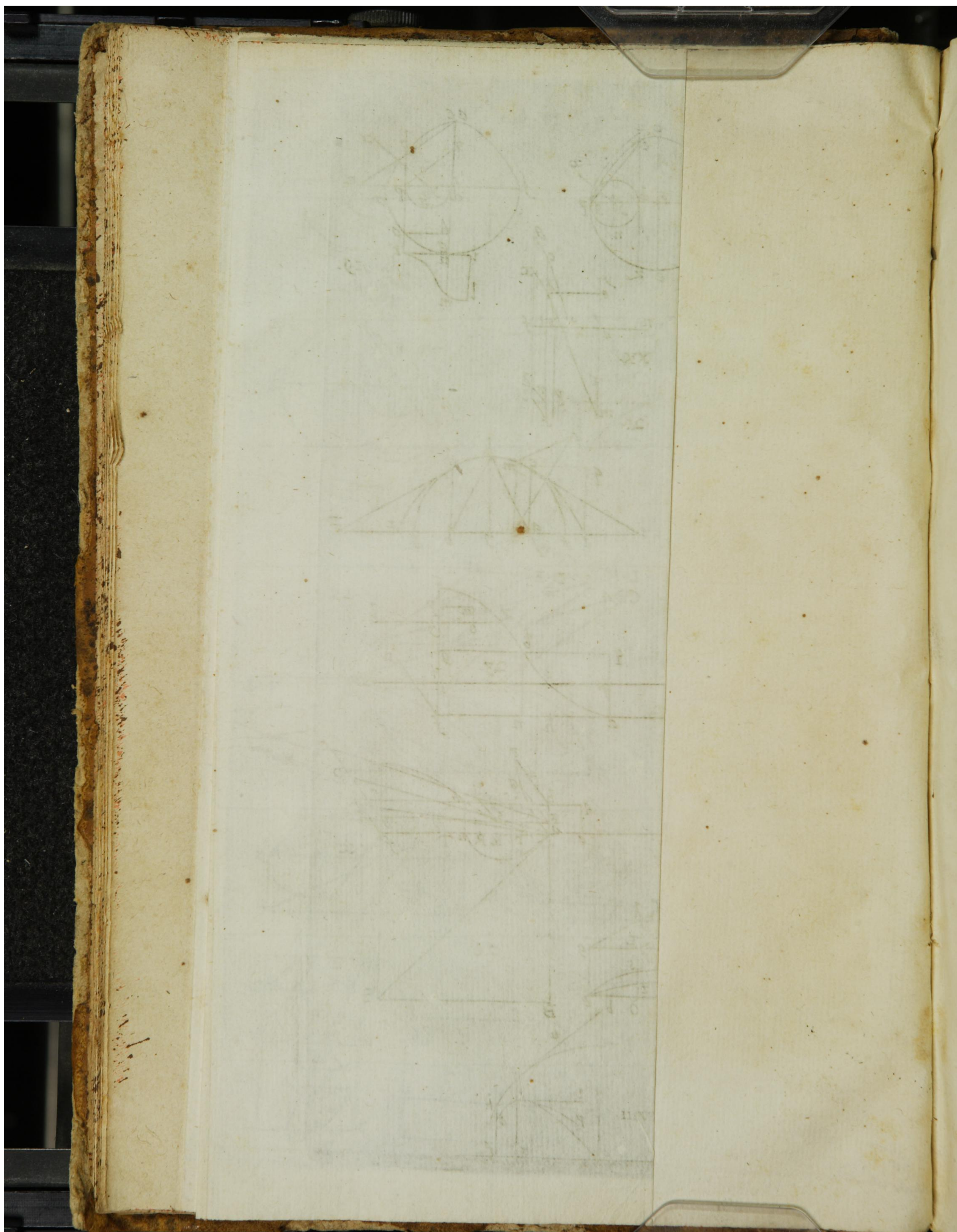
Tab. III.
30.
31.
A·B·C·
33.
34.
36.
37.
39.
40.
43.
44.

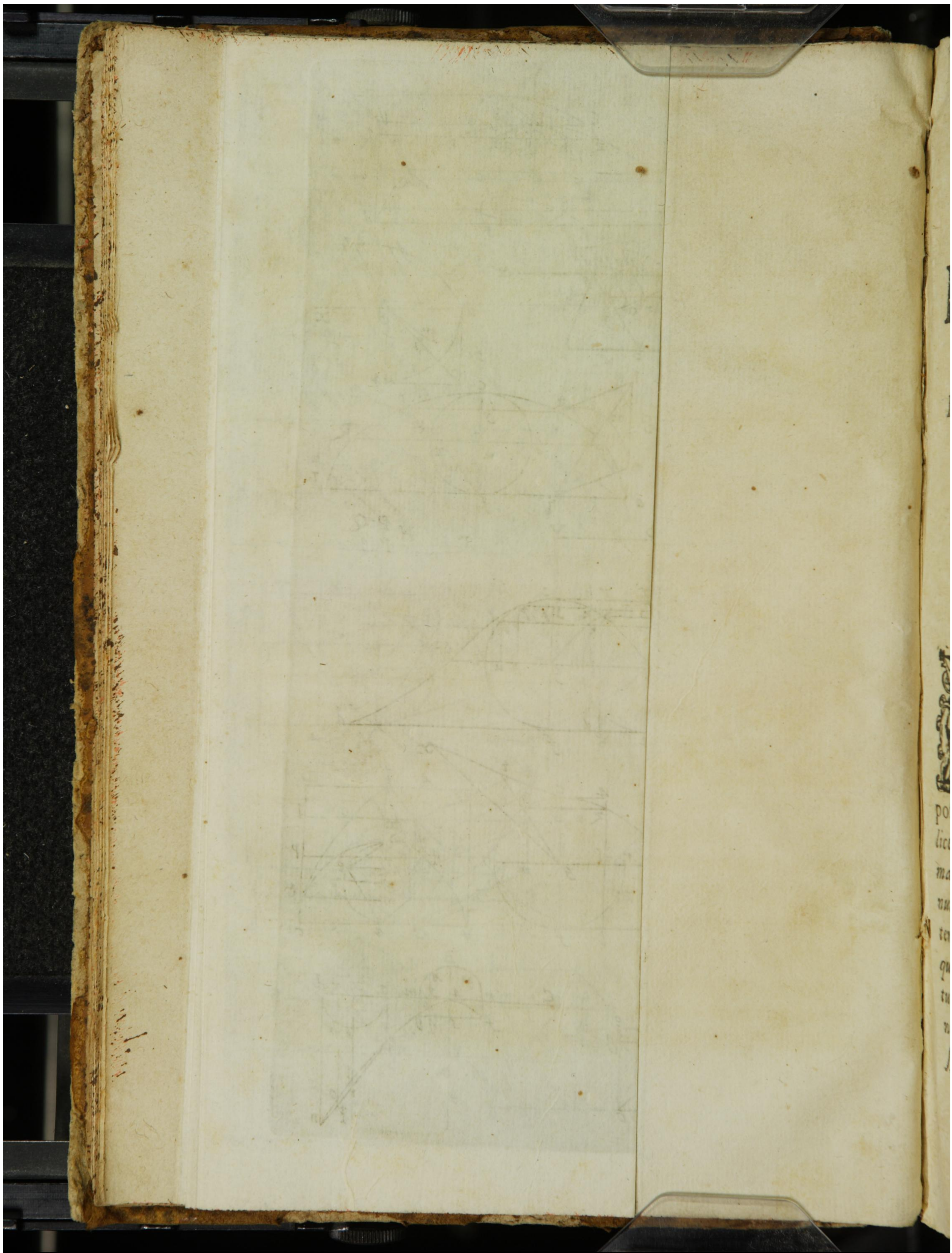

Tab. II.
18.
19.
20.
XX.
21.
21.
L.M.
CB.A
D.E.
F.
23.
B.C.
A.
25.
26.
28.
XXVIII.




fig. 1
Tabula I
2.
4
5.
7.
8.
H. P·Q·
P·q
10
12.
13
15.
16.









DE CYCLOIDE
LIBER PRIMVS.

In quo, positâ quadraturâ circuli, inuenitur quadratura *cuiuslibet portionis in cycloide designatæ,* & cubatura *solidi circa quamlibet basi parallelam geniti.*

Amplissimo Domino De FERMAT, in Suprema Curia Tolosana Senatori integerrimo.

D*ECEM nunc dies sunt* (SENATOR INTEGERRIME) *cum primùm legi à Te mihi oblatam nobilissimi & doctissimi Anonymi typis editam Epistolam, qua à* præstantissimis toto Orbe Geometris postulat solutionem quarundam propositionum circa cycloidem eiusque centra grauitatis. *Ego licet, meæ tenuitatis mihi probè conscius, norim quàm longo post magnos illos viros interuallo in Geometrarum qualiumcumque numero locum teneam; quia tamen quid de quæsitis illis in mentem mihi veniret promere à Te tunc iussus sum, malui temeritatis quàm obsequij Tibi non promptè præstiti nomine accusari. En igitur quas circa problemata eiusmodi meditatus sum viginti omnino propositiones. Tu quem omnes Europæ Mathematici meritò suspiciunt, si quid perperam scriptum sit, aut si quid scriptis desit,*

emenda vel ſupple, modo tamen iudiciorum publicorum occu[...] pationes quibus longè vtiliùs diſtineris, id patiantur. Hac em[...] datione vel etiam ſupplemento fidens noſter hic libellus prodi[...] in vulgus intrepidè; quapropter Te huius ſpei plenus adit, ab[...] nempe miſſus qui plurimis nominibus tamdiu Tibi eſt.

Tóloſano in Collegio xii. Kal. Aug. 1658.

Addictus ex animo ſeruus ANTONIUS LALOVERA Societatis IESV.

PROPOSITIO PRIMA.

SIt c e f o (*Fig.* 1.) circulus centro g deſcriptus, quem in f tangat recta f a, æqualis dimidio totius peripheriæ c e f o; per f ducta ſi[...] diameter f c, completoque parallelogrammo a f c x intelligatur circu[...] lus ita moueri in plano a f c x, vt puncta c, f peripheriæ circulari[...] ſemper iaceant in rectis c x, f a, rectáque c f æquidiſtet lateri a x, m[...] tus verò ſit æqualis vniúſque ſemper velocitatis. Intelligatur in p[...] cto c aliud punctum A quod per arcum c e f moueatur pari & æq[...] veloci motu, ita vt cùm ſimul incipiant ſimulque deſinant vterq[...] motus punctorum c & A, iiſdem temporis interualis pares decurr[...] portiones linearum c x, c e f. Linea quam punctum A deſcripſerit c z b a, cui alia ex aduerſo c q d reſpondeat pari methodo geni[...] Tota figura a b c q d vocatur *Cyclois* Torricellio; mihi appellabitu[...] Cycloides ſicuti à Sphæra, & Cono Sphæroides, & Conoides di[...] cuntur.

Oſtendendum eſt parallelam tangenti a f, interceptam inter ar[...] a z c, f e c eſſe aqualem peripheriæ c e f interceptæ inter ipſam pa[...] lelam & tangentem c x.

Sumpta ſit z p quæcunque parallela tangenti a f occurrens arcub[...] z a, c e f in punctis z, p; dico rectam z p eſſe æqualem arcui p c. Re[...] p producta occurrat diametro c f in y; ex z y rectâ abſcindatur z i æq[...] lis rectæ p y, & per i ducatur recta h l complens parallelogrammum [...] a x; per g ducatur g b parallela tangenti f a, occurrens rectæ h l in m, arcui c z a in b; iungantur rectæ z m, p g quando punctũ z non congr[...] puncto b. Quoniã triangula g y p, m i z habent latera g y, y p, m i, i z [...] qualia ſingula ſingulis, erunt quoque latera g p, m z æqualia, & an[...] p g y, z m i æquales; ergo ſi centro m per h & l deſcribatur ſemicir[...] lus, punctum z iacebit in eius peripheria, & arcus c p, h z erunt æqual[...]

ergo quando punctum A congruet puncto z, centrum circuli moti congruet centro m. Quoniam verò puncta A, c ponuntur æquali tempore percurrere lineas æquales, arcus h z vel c p erit æquals rectæ c h vel i y. Cùm igitur z i, p y ponantur æquales, additâ communi i p, erunt z p, i y æquales; sed i y est æqualis arcui c p; ergo z p est æqualis eidem arcui c p. Quòd si punctum z congruat puncto b, punctumque y centro g, tunc punctum p, congruet puncto e, eritque y p semidiameter, quare i z erit æqualis semidiametro, & cùm g, y sint idem punctum, nullum erit triangulum g i p, perinde tamen verum erit rectam p z esse in illo casu æqualem rectæ i y, hoc est arcui p c: ergo &c. quod erat ostendendum.

DEFINITIONES.

Rectam c f voco *axem* figuræ Cycloidis a c d; rectam a d *basim*; punctum c *verticem*; z y parallelam basi, *ordinatim applicatam ad axem*; z p ordinatim applicatarum z y, p y *differentiam applicatam ordinatim*. Figuram a z c p e f voco *ex differentiis genitam*; eiusque partem b z c e *superiorem*, a b e f *inferiorem*; sicut etiam rectam z p *differentiam superiorem*, r s *inferiorem*, b e *mediam*. c z a f voco *semicycloidem*; c z y eius *segmentum*, & a f eius *basim*; circulus c e f o vocetur *genitor*.

SCHOLIVM.

Cycloidis generationem eandem re ipsa tradidimus quam Torricellius, quamuis discrepare in aliquo videatur; maluimus enim per duorum lationem quam per vnius tantùm, huius genesim figuræ explicare, non solùm quia ita res planius procedere nobis visa est; sed quia etiam Archimedes spiralis lineæ generationem per motum rectæ & per puncti in illa recta lationem tradidit. Secluso itaque motu definiri potest Cycloides figura cuius omnes differentiæ ordinatim applicatæ æquales sunt arcubus interceptis inter ipsas & tangentem *c x*, singulæ singulis.

PROPOSITIO II.

MAneat (*Fig.* 2.) vt in superiore circulus c e f o genitor, & semicycloides c b a f cuius vertex c, axis c f, basis a f; intelligatur alia subcontraria semicycloides f q n c cuius vertex f, axis idem c f, basis c n: ducta sit quæcunque ordinatim applicata z y, quæ producta occurrat arcui f q n in r, & circuli peripheriæ in punctis p, s.

Ostendendum est duas simul differentias z p, s r esse æquales rectæ f a, vel c n, vel peripheriæ c p f.

Quoniam ex superiore differentia z p æqualis est arcui c p, & differentia s r arcui s f, vel p f, duæ simul differentiæ z p, s r erunt æquales toti peripheriæ c p f, cui æqualis ponitur ex constructione tota f a vel c n; ergo duæ z p, s r sunt simul æquales toti a f vel c n, vel toti curuæ c p f. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Et demonstratis apertè liquet duas simul figuras genitas ex differentiis z p, s r subcontrariarum semicycloideon esse ad positionem rectæ a f æquales condicta ratione parallelogrammo c f d n. Porrò figuras condicta ratione æquales ad positionem alicuius rectæ si planæ sint, vel alicuius plani si solidæ sint, eas appello quarum singulæ sectiones parallelæ illi ad cuius positionem diriguntur, sunt inter se æquales.

PROPOSITIO III.

Iisdem manentibus ostendendum est cycloidem esse triplam circuli genitoris.

Intelligantur ex punctis c, f excitari perpendiculares c t, f u, ad planum c f d, singulæ æquales semidiametro g f circuli genitoris, & compleatur parallelogrammum t c f u: intelligatur præterea ad positionem plani t c n generari solidum ex plano t c f u, & ex duabus figuris a b c e f, n q f o c genitis ex differentiis applicatis; hoc est vt alij loquuntur ex ductu parallelogrammi t c f u, in figuras duas a b c e f, n q f o c. Ex vndecima quarti libri nostri Tetragonismicorum elementorum constat ad positionem plani t c n æqualia condicta ratione esse duo simul solida basium z p, s r, solido baseos c n d f genito ex ductu eiusdem plani t c f u, & parallelogrammi c f d n, cùm sectionum altitudo sit eadem nempe y B vel c t, bases verò z p, s r sint simul æquales basi y A vel c n.

Præterea quoniam recta y B vel c t ponitur æqualis semidiametro c g genitoris circuli, & y A vel c n eius semiperipheriæ, ex prima Archimedis de circuli dimensione liquet rectangulum B y A esse æquale toti circulo c e f o genitori, hoc est bis semicirculo c e f, igitur solidum genitum ex parallelogrammo t c f u & ex duabus simul figuris differentiarum ordinatim applicatarum est condicta ratione æquale ad positionem plani u f d, cylindro cuius axis sit c f, bases autem sint circuli C t D, E u F centris c, f descripti, interuallo semidiametrorum c t, f u, vel eadem ratione condicta æquale est duplo semicylindri cuius bases sint semicirculi C t D c, E u F f.

Quoniam igitur figura c n r q o est æqualis figuræ e b a f H, solidum genitum ex ductu parallelogrammi t c f u & figuræ e b a f H erit æquale solido genito ex eodem parallelogrammo & ex figurâ c n r q o ad positionem plani u f d: ergo solidum genitum ex tota figura c b a f e & ex parallelogrammo t c f u est æquale duplo semicylindri altitudinis c g, baseos C t D c. Quoniam verò solidum genitum ex parallelogrammo t c f u & ex figura a b c e f habet eandem altitudinem c t, quam habet bis semicylindrus altitudinis c g, baseos C t D c; patet eorum vt pote æqualium bases esse æquales; ergo figura a z c e f est æqualis duplo baseos C t D c, hoc est duplo baseos c e f g; ergo additâ basi c e f g, tota a z c f est tripla semicirculi c e f: ergo cùm a z c f sit semicycloides, tota cycloides erit tripla circuli genitoris c e f o, quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Hæc est demonstratio quam sub finem secundæ appendicis adiecta ad quintum Tetragonismicorum nostrorum librum indicauimus; ex eius verò methodo demonstratur quoque sequens.

PROPOSITIO IV.

Iisdem manentibus ex c f abscissa sit f M æqualis rectæ c y, & per M ducta sit M G ordinatim applicata occurrens peripheriæ c e f in H. Ostendendum est duplum duarum simul figurarum c z p, H G a f esse ad duplum circuli genitoris c e f o vt est recta c y ad c g semidiametrum eiusdem circuli.

In præsenti propositione demonstratur vt in superiore solidum altitudinis y B vel c g, baseos c z p & simul c s r n vel f H G a esse æquale duplo semicylindri baseos C t D c vel c e f, altitudinis c y. Hoc autem posito quod superest facilè monstratur; nam bases æqualium cylindraceorum (ita voco solida quorum bases oppositæ sunt parallelæ quæ modo parallelepipeda, modo cylindri, modo innominata hactenus, qua de re egimus in vndecima quarti libri Tetragonismicorum elementorum) sunt inter se reciprocè vt altitudines; ergo vt altitudo c y ad c g, ita vicissim est basis composita ex z p c, G H f a ad bis semicirculum C t D c vel c e f duplum duarum figurarum c z p, H G a f; hoc est, quatuor totius cycloidis a z c L d portiones c z p, c L s, f H G a, f P N d sunt simul ad quatuor semicirculos c e f, vel ad duos circulos c e f o vt est recta c y ad semidiametrum c g, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Si recta c y foret maior rectâ c g demonstratio (vt patet) perinde cogeret, quamuis in schemate apposito non exprimatur iste casus. Patet etiam demonstrationem simili pacto procedere de duabus partibus z p e b, G H e b simul sumptis, hoc est de tota z p H G, si loco rectæ c y sumatur g y.

COROLLARIVM II.

Si duplici figuræ genitæ ex differentiis z c p, r s c n addatur segmentum circulare p c s componetur tota figura z c n r contenta sub rectis c n, z r & sub arcubus z c, r n. Vnde præterea liquet quoties segmenti p c s proportio ad circulum c f ignoratur, toties ignorari proportionem figuræ z c n r ad eundem circulum.

PROPOSITIO V.

Iisdem manentibus & iunctâ rectâ p g, ostendendum est differentiam z p ad differentiam s r se habere, vt se habet sector p g c ad sectorem p g f, & rectangulum sub rectâ y B vel c g & sub z p contentum esse æquale duplo sectoris p g c, itemque rectangulum eiusdem altitudinis y B, baseos s r esse æquale duplo sectoris p g f.

Quoniam enim rectæ z p, s r sunt per primam æquales arcubus c p, p f vel f s; arcus autem c p, p f sunt vt sectores c p g, p g f per 33. sexti Euclidis; ergo rectæ z p, s r sunt vt sectores p g c, p g f. Præterea quoniam vt in decursu tertiæ ostendimus rectangulum altitudinis y B, baseos compositæ ex rectis z p, s r est æquale duplo semicirculi c e f, erit vt patet æquale duplo sectoris p g c & duplo sectoris p g f; duplum autem illud erit ad duplum istud vt recta z p ad s r: ergo rectangulum altitudinis y B vel g c, baseos z p est æquale duplo sectoris p g c; rectangulúmque eiusdem altitudinis, baseos s r duplo sectoris p g f; ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

SIt (*Fig. 3.*) quadrati s r t a diameter r a bifariam in g secta, ipsumque diuisum sit in quatuor quadrata per rectas c f, h b parallelas lateribus r s, s a. Per h, b ductæ sint q c, f e æquidistantes diametro r a, & complentes parallelogramma c a r q, e f r a, c q f e. Recta r a sit axis cylindri scaleni, cuius basis sit circulus centro a, semidiametro c a descriptus in plano d a c recto ad planum c g b, sitque d a perpendicularis ad rectam c e; in plano r a d æquidistet recta g u rectæ d a, & superficiei cylindri occurrat in u; plani f g u sectio cum superficie cylindri sit c o u f: ex centro g per c, f in plano c a b descriptus sit semicirculus c b f.

Ostendendum est c u f sectionem cylindri cum plano f g u congruere peripheriæ circuli f b c, si planum f b c intelligatur circumuolui circa axem f c quousque congruat plano f g u & stet rectum ad planum c g h.

Quoniam cylindrus semibaseos c d e secatur plano c q f e per axem r a ducto quod est ad rectos angulos basi c d e, secatur autem & altero plano f g u recto ad parallelogrammum c q f e per axem, cuius plani sectio c f continet cum f e latere parallelogrammi per axem, angulum c f e æqualem angulo c e f; angulum autem f c q cum altero latere c q facit æqualem angulo f q c, ex sexta libri primi apud Serenum constat sectionem f u c esse semicirculum; ergo semidiametri f g, g u sunt æquales; igitur si planum f g c circumuoluatur circa axem f c manentem donec rectum sit ad planum c g b, semidiameter b g congruet semidiametro g u, totusque semicirculus f b c toti semicirculo f u c, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

IIsdem manentibus in recta g a inter g & a sumatur quoduis punctum m, & per illud ducta sit recta i n parallela lateri q f parallelogrammi q c e f per axem, occurrens lateribus q c, f e in i, n; periphe-

riæ c b f in p; rectæ c f in l: per l ducatur l o ordinatim applicata ad f c diametrum semicirculi f u c; superficiei cylindri planique i l o communis sectio sit i o n; iungantur rectæ m o, g p.

Ostendendum est i o n esse peripheriam semicirculi centro m descripti, & sectores i m o, o m n esse æquales sectoribus c g p, p g f singulos singulis.

Quoniam planum n m o est parallelum basi c d e cylindri, eius sectio i o n cum semicylindro erit semicirculus per quintam primi libri Sereni: ergo semidiameter m o est æqualis semidiametro m n vel g b vel g p. Quoniam igitur trianguli g l m latera g l, l m sunt inter se æqualia, sicuti trianguli g c a latera g c, c a ponuntur æqualia, triangulum rectangulum g l p erit æquilaterum & æquiangulum triangulo rectangulo m l o, cùm habeant latus circa angulum rectum æquale, & rectas quæ angulum rectum subtendunt æquales: ergo angulus o m l est æqualis angulo p g l: ergo cùm semicirculi sint æquales, sector o m i est æqualis sectori c g p, & sector o m n sectori p g f, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Iisdem manentibus portio semicylindri intercepta inter plana h g u, c d a cuius sectio basi c d e parallela est sector minor o m i, est condicta ratione ad positionem eandem æqualis dimidio cunei primi intercepti ad partes lateris q c inter cylindri basim semicircularem h u b & planum transuersum f g u occurrens lateri q c in c; insuper verò dimidio solidi geniti ad positionem plani h g u ex quadrante circulari g u o c, & ex triangulo g c a ad positionem plani u h g.

Quoniam per semibaseos h u b semidiametrum g u coniugatam semidiametro h g ducitur planum c g u transuersum occurrens lateri h c parallelogrammi h c e b per axem g a, portio cylindri intra angulum h g c comprehensa, erit cuneus ille notus cuius definitionem & quadraturam tradimus in vigesima sexta quarti elementorum nostrorum, & quem primum appellauimus in vndecimâ quinti. Præterea quoniam solidi geniti ad positionem plani u h g ex triangulo c g a, & ex quadrante circulari g u o c, sectio parallela plano h g u est ex vigesimâ primâ quarti libri elementorum Tetragonismicorum rectangulum comprehensum sub lateribus o l, l m, triangulum verò o l m est dimidium eiusmodi rectanguli; ergo cùm ita se habeat res in omnibus aliis sectionibus, patet ex vndecimâ quarti Tetragonismicorum solidum cuius sectio est triangulum m l o esse condicta ratione dimidium solidi cuneati geniti ad positionem plani h g u ex triangulo g c a & ex quadrante circulari g u o c. Cùm igitur sector o m i constet duabus partibus o l i, o l m, & illa sit sectio dimidij cunei primi iam descripti, ista sit semisectio solidi cuneati pariter descripti, patet quod erat demonstrandum.

DEFINITIONES.

Solidum cuius ſectio, o l i, vocetur *genitum ex prima parte ſectoris*; ſolidum verò cuius ſectio eſt triangulum o l m *dicatur genitum ex ſecunda parte ſectoris*.

PROPOSITIO IX.

SIt (*Fig.* 4.) u x diameter circuli centro g deſcripti in plano u g h; ad diametrum u x perpendiculariter cadat diameter h y, vt h u y ſit ſemicirculus ſectus in duos quadrantes per ſemidiametrum g u; intelligatur planum h g c, ſecans ſemicylindrum baſeos h u y, vt portio ſemicylindri intercepta planis u g h, c g h ſit cuneus notus definitus in vigeſima ſexta quarti Tetragoniſmicorum.

Oſtendendum eſt totum cuneum u g c, eſſe æqualem parallelepipedo altitudinis g a, vel u c, baſeos æquantis duos trientes quadrati g u. Item ſi ſecetur plano quouis f n i, ad planum h g a parallelo, ſecari in duas portiones quibus parallelepipeda eiuſdem altitudinis u c æqualia habent baſim noto rectilineo æqualem. Denique ſi ſecentur quouis ad baſim u h g parallelo plano l i p diuidi in duas partes quarum quæ inter plana l i p, u h g iacet, eſt æqualis cylindraceo altitudinis u c, baſeos compoſitæ ex rectilineo noto & ex curuilinea figura quæ vt eſt recta l u ad u c ita ſit ad ſegmentum o u f ſubtenſum ordinatim applicata f o ductâ per n in quod incidit recta i n parallela rectæ u c.

Cuneum totum u c g (ita illum deſigno breuitatis causâ vt in Scholio quintæ quinti libri monui) eſſe æqualem parallelepipedo altitudinis u c, baſeos æquantis beſſem quadrati u g patet ex Corollario vigeſimæ ſextæ quarti Tetragoniſmicorum: portionem verò n i g, eſſe æqualem parallelepipedo altitudinis u c, baſeos æquantis rectilineum notum, conſtat ex eadem vigeſima ſexta. Denique quoniam planum l i p æquidiſtat baſi h u y, portio u l i g cunei conſtabit cylindro u l i n, & parte i n g cuneatâ quam modò quadrauimus: atqui ſi cylindrus altitudinis u l baſeos u f n o, conuertatur in cylindrum æqualem altitudinis u c, baſis iſtius eſt reciprocè ad baſim illius vt eſt recta l u ad u c: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Duplex appoſuimus ſchema, in primo axis eſt perpendicularis ad planum baſeos u b h y, in altero cadit obliquè, conſtituitque cylindrum ſcalenum; ſed modo baſes h u y ſint vtrobique eædem, & eadem ſit diſtantia baſium oppoſitarum in recto & ſcaleno, eſt quoque æqualitas eadem partium, vt in ſcholio vndecimæ quinti Tetragoniſmicorum annotatum extat.

COROLLA-

COROLLARIVM II.

Ex præsenti & ex definitionibus superioris liquet cùm solidum genitum ex prima parte sectoris sit vel semicuneus totus altitudinis u c g, vel eius portio abscissa ad positionem baseos u b h g; eiusmodi solidum esse æquale in primo casu parallelepipedo altitudinis c u, baseos æquantis trientem quadrati g u. In secundo verò casu esse æquale cuneo u c i n per præsentem propositionem noto, sed dempto cylindro altitudinis l u baseos u f n, vel altitudinis u c, baseos quæ sit ad u f n sicut est recta u l ad u c.

PROPOSITIO X.

SIt (*Fig.* 5.) x u diameter circuli, cui incidat ad rectos angulos semidiameter g h, ita vt h f u g sit quadrans circularis: super plano h u g insistat perpendicularis g a, æqualis semidiametro u g, & ex centro g interuallo g u descriptus sit in plano u g a quadrans circularis u s a g; librá u x suspensá ex g perpendiculo g a, brachio g x intelligatur generari quadratix g r u, respondens quadranti u s a g, ita vt sicut g x brachium ad quamcunque longitudinem g n, ita n s ordinatim applicata sit ad n r interceptam recta g u, & quadratrice g r u; ducatur recta g c, & ad positionem plani h g a intelligatur ex triangulo u g c & ex quadrante u f h g generari cuneatum solidum cuius dimidium in definitionibus octauæ diximus esse solidum genitum ex secunda parte sectoris.

Ostendendum est ad positionem plani h g a cylindraceum altitudinis g a, baseos u r g n esse condicta ratione æquale cuneato illi, & quando totum sumitur, basim g r u n esse trientem quadrati g u, quando autem pars quælibet u r n vel n r g designatur, eam esse æqualem rectilineo noto.

Quadratricem quidem g r u esse trientem quadrati g u liquet ex decima octaua tertij tetragonismicorum; portionem verò eius quamlibet u r n, esse æqualem rectilineo noto patet ex decima septima eiusdem libri, vel ex secunda quinti. Quoniam verò vt x g recta ad n g vel ad n i ipsi æqualem, ita ex generatione quadratricis est n s ordinatim applicata vel n f ad n r, rectangulum p n r sub extremis g x vel p n & sub n r erit æquale rectangulo sub mediis n i, n f: ergo cylindraceum baseos g r u altitudinis h g ita se habet ad cuneatum baseos u f h g, altitudinis u g c, vt sectiones parallelas plano h g a habeant æquales; ergo per vndecimam quarti cuneatum & cylindraceum sunt æqualia ratione iam dictâ; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Cùm solidum genitum ex secunda parte sectoris sit dimidium cuneati

iam expositi vel totius vel ex parte sumpti ad positionem plani h g a, eiusmodi solidum quando totum sumitur patet esse æquale sextanti quadrati g u; quando autem pars tantùm sumitur, esse æquale rectilineo noto. Porrò illud cuneatum solidum est, vt patet, cuneus primus abscissus ex cylindro baseos u f h g, habens axem g a, estque longè diuersus à cylindro in quo est cuneus constituens solidum ex prima parte genitum, quod notari oportet ne fatigetur mens frustra quærens in vno eodemque cylindro vtrumque cuneum.

PROPOSITIO XI.

POrtio (*Fig.* 3.) integra semicylindri intercepta inter plana h g u, c d a, quæ pro sectione basi parallelâ habet sectorem minorem o m i, est æqualis parallelepipedo altitudinis g b vel g c, baseos æquantis dimidium quadrati g c; quando verò sumitur eius pars ad positionem baseos c d a, est æqualis cylindraceo altitudinis g c, baseos mixtæ ex spatiis inuentis in nonâ & decima propositionibus.

Istud liquet ex demonstratis in nona & decima, ibi enim ostendimus primam solidi propositi partem integrè sumptam esse æqualem parallelepipedo altitudinis g c, baseos æquantis trientem vel duos sextantes quadrati g c; ostensum quoque est parti secundæ æquale esse parallelepipedum altitudinis eiusdem, baseos æquantis sextantem eiusdem quadrati: ergo istud solidum cuius sectio est minor sector, æquale est in primo casu parallelepipedo altitudinis g c, baseos æquantis dimidium quadrati g c.

Quando verò non sumitur tota portio, cùm partes eius demonstratæ sint æquales, prima quidem cylindraceo altitudinis g c, & baseos mitæ ex rectilineo noto, atque ex certa quadrantis circularis g u o c parte: secunda verò parallelepipedo eiusdem altitudinis & baseos notæ, patet quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

FIgura (*Fig.* 2.) b z c p e ex differentiis genita est æqualis quadrato rectæ g c: figura autem z c y, quoties punctum y sumitur inter c & f, & non congruit centro g, est mixta ex rectilineo noto & ex parte in circulo c f legitimè designatâ.

Quoniam ex quinta rectangulum sub recta y B & sub z p est æquale duplo sectoris p g c, cylindraceum altitudinis y B vel g c, baseos a b c e f erit condicta ratione ad positionem plani t c n æquale duplo solidi cuius sectio sit sector p g c, vt ex vndecima quarti tetragonismicorum patet: sed in portione b z c e istud solidum per superiorem est parallelepipedum altitudinis g c, baseos æquantis dimidium quadrati g c; ergo duplum illius solidi est parallelepipedum altitudinis g c, baseos æquantis quadratum g c.

In aliis verò casibus punctum y cadat primò inter puncta c, g; ergo ex

ſuperiore liquet adhibitâ methodo primi casûs nunc tractati, figuram z c y eſſe mixtam ratione præſcriptâ. Secundò ſumpta ſit portio G b c M maior portione b c g, ac proinde cadat M inter f & g; ex g c abſcindatur g y æqualis rectæ g M, & ducatur ordinatim applicata z y: diuiſa igitur eſt portio G b c M in duas z c y, & z y M G, quarum illa habetur ex caſu modo expoſito, iſta verò ex quartâ propoſitione; ergo &c.

COROLLARIVM.

Ex vndecima quarti tetragoniſmicorum liquet cùm duo iſta ſolida ſint condicta ratione æqualia ad poſitionem plani t c n, ſpatia quæ ad poſitionem eandem æquiponderant vni, æquiponderare quoque alteri. Cùm autem cylindraceum altitudinis y B & cylindraceum altitudinis eiuſdem y B illi æquiponderans hoc habeant ex vigeſima quinta quarti tetragoniſmicorum, vt iiſdem poſitis baſes eorum ſibi mutuò æquiponderent, patet figurę b z c p e ad poſitionem rectæ b g, æquiponderare baſim illius cylindracei æquiponderantis ad eandem poſitionem ſumptam.

SCHOLIVM.

Mirabile iſtud theorema quo figura b z c p e oſtenditur æqualis quadrato rectæ g c, debeo potiſſimum quadraturæ cunei illius quæ ante noſtra tempora ex quo puluis geometricus teritur, à nemine quem ſciam inuenta fuerat. Cùm elementa tetragoniſmica typis mandaremus, venit in manus noſtras eius inuentio tradita à nobiliſſimo geometra P. Gregorio à S. Vincentio, vt in voluminis noſtri præfatione admoneo; tam diuerſa tamen eſt methodus eam demonſtrandi vt æquus lector facilè inde intelligat in eandem veritatem caſu prorſus admirando duos eiuſdem Societatis Scriptores conueniſſe; ego enim per libræ principia iſtud demonſtro, ille ex librâ nihil adhibet; mea methodus cuneum cuius baſis eſt hyperbola perinde quadrat, ille ſuam cunei, vel vt ipſe loquitur vngulæ inueſtigationem vltra circuli & parabolæ fines non porrigit. Quid verò nos iuuerit inueniſſe ſpatia cuneo iſti æquiponderantia conſtabit ex ſequentibus.

PROPOSITIO XIII.

SIt (*Fig. 6.*) a d c e circulus diametro a c deſcriptus in plano a b d; diametri a c, d e, ſecent ſe ad angulos rectos, vt ſemicirculum d c e recta b c ſecet in duobus quadrantes circulares: in planum d c e cadat perpendiculari g b quæ ponatur axis ſemicylindri baſium d c e, o h p; compleatur b g h c parallelogrammum per axem; eius diameter ſit g c, & diametri q h, o p ſecent ſe ad normam. Ergo cuneus c g h interceptus plano tranſuerſo c g p, & plano baſeos o h p erit cuneus primus ex vigeſima ſexta quarti. Intelligatur baſis o p h parallela horizonti ſuſtinere cuneum c g h, libra verò q g h ſuſtinens illum cuneum ſuſpendi ex centro g perpendiculo g b.

Oſtendendum eſt ſi g q ponatur brachium libræ ita ſuſpenſæ, cuneo g c h vt iacet manenti, & integrè ſumpto, æquiponderare quadrantem cylindri altitudinis b g baſeos o h p: ſi autem cuneus g c h

ſecetur plano ad planum d b g parallelo, æquiponderans eſſe cylindraceum altitudinis g b, baſeos certa quadam ratione mixtæ ex rectilineo noto, & ex quadrante condicto partis baſeos o h p, cui inſiſtit portio cunei primi deſignata.

Ex q g abſcindatur m g quadrans totius q g, & compleatur parallelogrammum b g m i; ex g q abſcindatur m r æqualis rectæ g q, & compleatur parallelogrammum g r n b. Cuneum g c b qui baſi d c e inſiſtit, patet ex vndecima quinti tetragoniſmicorum eſſe illum quem ibi *ſecundum* nominauimus, *primi* nomen reſeruantes cuneo c g h. Igitur ex eadem propoſitione cuneo ſecundo, vel toti g c b, vel parti A ſ c abſciſſæ per planum z ſ t parallelum plano d b g, librâ n c ſuſpensâ ex i perpendiculo i m, brachio i n, æquiponderat parallelepipedum altitudinis b g, baſeos æquantis rectilineum notum; iſtud verò rectilineum vt ex corollario primo eiuſdem vndecimæ patet, quando totus cuneus ſecundus ſumitur, eſt quadrans duplex quadrati b c; in illo enim corollario, ideo ponitur vnus tantùm quadrans quia altitudo parallelepipedi eſt dupla altitudinis b g.

Præterea, per vigeſimam quintam quarti tetragoniſmicorum, ſi libra a e ſuſpendatur ex b perpendiculo b g, brachio b a, æquiponderans cylindro b h, vel eius parti ſ h eſt parallelepipedum altitudinis b g, baſeos æquantis rectilineum notum, & duos trientes quadrati b c, quando cylindrus b h ſumitur integer. Nomine autem cylindri intelligo quamuis eius portionem abſciſſam ad poſitionem plani d b g. Igitur ſi cylindri ſuſpenſio quæ fit ex b fieri ponatur ex i perpendiculo i m, brachio i n, æquiponderans prioris ſuſpenſionis augebitur per decimam ſecundi tetragoniſmicorum, quadrante ſuſpenſi, cùm b i menſura receſsûs ponatur quadrans brachij: æquiponderans igitur cylindro ſuſpenſo eſt cylindraceum altitudinis b g baſeos mixtæ ex rectilineo noto & ex quadrante baſeos cylindri ſuſpenſi, in primo autem caſu iſtud rectilineum eſt duo trientes vel octo vnciæ quadrati b c. Quoniam verò æquiponderans cylindro componitur ex ſpatio æquiponderante duobus ſimul cuneis; æquiponderans autem cuneo ſecundo habet altitudinem m i & baſim æquantem rectilineum notum; ergo per ſubductionem huius baſeos à baſi alterius æquiponderantis reſtat baſis cylindracei æquiponderantis cuneo primo mixta ex quadrante ſuſpenſi & ex rectilineo noto; in primo verò caſu patet iſtud rectilineum eſſe duas vncias quadrati b c; nam ſi ex octo vnciis demas ſenas ſiue duos quadrantes, relinquuntur duæ vnciæ quadrati g h quæ vna cum quadrante ſemicirculi o h p conſlant baſim illius æquiponderantis altitudine m i prædíti.

Quoniam verò cuneus primus g c h vel integer vel quæuis eius portio abſciſſa ad poſitionem plani d b g eſt æqualis parallelepipedo noto per vigeſimam ſextam quarti, & in primo caſu eſt æqualis parallelepipedo altitudinis g b vel m i, baſeos æquantis duos trientes vel octo vncias qua-

drati g h; si libra r h suspensa ex m perpendiculo m i, brachio r m ponatur mutare suspensionem, & pendêre per accessum ex g perpendiculo g b, brachio g q, primæ suspensionis æquiponderans minuetur quadrante suspensi noti: ergo æquiponderans istud cuneo primo erit æquale cylindraceo altitudinis g b, baseos mixtæ ex quadrante basis cunei designati, & ex rectilineo noto. Quia verò in primo casu cylindraceum æquale suspenso habet pro basi octo vncias quadrati g h earum quadrans erit duæ vnciæ; ergo demi debent ex basi prioris æquiponderantis duæ vnciæ quadrati g h; ergo cùm basis prioris non haberet nisi duas supra quadrantem basis cunei, patet in isto primo casu relinqui quadrantem basis o h p integræ purum: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam pars secunda solidi cuius sectio est sector minor definita sub finem octauæ propositionis, est ad positionem plani d b g condictâ ratione æqualis dimidio cunei primi cuius basis sit quadrans circularis d b c integer vel ex parte sumptus, patet quadrantem æquiponderantis inuenti in præsente propositione illi competere.

PROPOSITIO XIV.

MAneat (*Fig.* 7.) cuneus primus g c h insistens basi o h p, planumque per axem sit b g o rectum ad basim o h p, cuius diametrum o p ad normam secet diameter r h. Latus c h bifariam secetur in n & iungatur recta g n.

Ostendendum est cunei c g h vel totius, vel portionis ad positionem plani b g o designatæ centrum grauitatis esse in rectâ g n.

Plano b g o ducatur quoduis parallelum i t x secans triangulum c g h secundum rectam i t parallelam rectæ b g, & basim o h p secundû rectam x u parallelam rectæ o p; eius verò cum cuneo sectio sit f e u x; est ergo per quarti Tetragonismicorum vigesimam primam f e u x parallelogramma figura, cuius latera f x, e u æquidistant rectæ c h, & latus x u bifariam secatur in t; cùm autem recta t i æquidistet eidem c h, æquidistabit quoque lateribus f x, eu; ergo cùm t i bifariam secetur, in r occursu rectæ g n (sicuti ei parallela c h ponitur bifariam secari in n) centrum grauitatis parallelogrammi f x u e erit punctum r in linea g n constitutum. Cùm igitur cunei c g h omnes sectiones parallelæ plano b g o habeant centrum grauitatis in recta g n, patet ex vndecima quarti Tetragonismicorum centrum grauitatis vel totius cunei, vel cuiusuis eius portionis ad positionem plani b g o designatæ iacere in recta g n, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XV.

IIsdem manentibus cuneus c g h, vel quælibet eius portio ad positionem plani b g o sumpta intelligatur vt iacet sustineri rectâ g

n; cùm enim recta g n transeat per eius centrum grauitatis, manebit vt iacet. Ex b g latere parallelogammi b g h c abscindatur g l ipsi b g æqualis, compleatúrque parallelogrammum g h n m.

Ostendendum est libra grammica b l suspensa ex g perpendiculo g h, brachio g l, æquiponderans cuneo c g h vel eius parti iam dictæ, cuius centrum grauitatis est in trianguli g m n latere g n, esse æquale cylindraceo altitudinis c h, vel b g, baseos quæ æquet semiquadrantem figuræ o hp., quando totus cuneus suspenditur; quando verò non suspenditur totus, baseos mixtæ ex rectilineo noto certa lege addendo vel demendo, & ex semiquadrante addititio figuræ cui insistit pars cunei suspensa.

Quoniam enim libra r h suppensâ ex g perpendiculo g b, brachio r g æquiponderans cuneo toti est cylindraceum altitudinis b g, baseos æquantis quadrantem figuræ o h p; æquiponderans autem portioni cunei iam dictæ est cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos mixtæ ex rectilineo noto certa lege addendo vel demendo & ex quadrante figuræ cui illa portio cunei insistit, vt in decimâ tertia ostendimus; si recta g a fiat æqualis rectæ g m, libra a m suspensa ex g perpendiculo g h, brachio g a æquiponderans eidem suspenso erit ipsum prioris suspensionis, vt in Corollario primæ quinti tetragonismicorum ostendimus, cùm suspensi cunei centrum grauitatis sit in g n diametro parallelogrammi g h n m. Cùm igitur per octauam secundi tetragonismicorum si brachium g a mutetur in g l duplo maius, æquiponderans brachij g l sit dimidium æquiponderantis brachij g a, patet cuneo vt iacet manenti libra l b suspensa ex g perpendiculo g h, brachio g l æquiponderare cylindraceum propositum.

COROLLARIVM.

Quoniam pars prima solidi cuius sectio est sector minor definita sub finem octauæ propositionis est ad positionem plani o g h condicta ratione æqualis cuneo primo cuius basis sit o x h g quadrans circularis integer vel ex parte sumptus, patet dimidium æquiponderantis inuenti in præsenti propositione competere illi.

PROPOSITIO XVI.

Libra (*Fig.* 2.) grammica f c suspendatur ex g perpendiculo b g brachio g f.

Ostendendum est figuræ b z c p e æquiponderare spatium æquale dimidio quadrantis cicularis c p e g.

Patet propositio ex Corollario duodecimæ, nam ex illo istud æquiponderans est basis cylindracei altitudinis g c, quod duplo solidi cuius sector est p g c æquiponderet libra f c suspensa ex g, plano Q g b recto ad planum c e f gerente vicem perpendiculi; atqui ista basis ratione dupli

primæ partis eſt per Corollarium ſuperioris quadrans figuræ c p e g, ratione verò dupli ſecundæ per Corollarium decimæ tertiæ eſt quadrans eiuſdem figuræ: ergo iſta baſis eſt dimidium figuræ c p e g, quæ eſt quadrans circuli c e f o, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Ex ijſdem decima tertia & decima quinta poterit aſſignari æquiponderans portioni z c y quando y cadit inter c & g, hoc enim patet ex methodo ipſa.

COROLLARIVM II.

Hinc patet licet habeatur æquiponderans figuræ b z c p e videlicet ſpatium æquale octauæ parti circuli c e f o, & licet notum ſit rectilineum æquale eidem figuræ, nempe quadratum rectæ c g, centrum tamen grauitatis non poſſe aſſignari, quia ad hoc præſtandum inſuper neceſſaria eſt proportio quam habet figura b z c p e hoc eſt quadratum c g ad octauam partem circuli c e f o. Simili de cauſa cùm in libris tetragoniſmicis inuenerimus rectilineum notum æquiponderans cuilibet ſegmento circuli & etiam ipſius hyperbolæ (quod poſtremum quis ante nos fecerit penitus ignoro) libra ex centro ipſarum ſectionum ſuſpenſa, centrum tamen grauitatis non potuimus, in illo volumine exhibere; ideoque in fronte libri promiſimus quadraturam ſegmentorum circuli & hyperbolæ non quidem abſolutè, ſed ex dato centro grauitatis eorum, idque præſtitimus in libri tertij propoſitione vltima.

PROPOSITIO XVII.

Iſdem manentibus ex f c abſcindatur c V æqualis rectæ c g.

Oſtendendum eſt libra V g ſuſpenſâ ex c perpendiculo c n, brachio c V, æquiponderans figuræ b z c p e ex differentiis genitæ eſſe æquale quadrato g c imminuto octaua parte circuli genitoris c e f o; æquiponderans autem figuræ c ſ o q r n ex differentiis maioribus genitæ eſſe æquale quinque octauis circuli genitoris, imminutis quadrato c g.

Quoniam enim tres rectæ f g, g c, c V ponuntur æquales, patet ex nona ſecundi tetragoniſmicorum æquiponderans libra ſuſpenſa ex c eſſe ipſum ſuſpenſum imminutum æquiponderante ſuſpenſionis ex g: ergo æquiponderans figuræ b z c p e libra ex c ſuſpenſa eſt æquale quadrato g c imminuto octaua parte circuli genitoris.

Quoniam verò ex methodo Corollarij duodecimæ duabus ſimul b z c p e, c ſ o q r n æquiponderat idem quod bis ſemicylindro baſeos C t D altitudinis c g, iſtud æquiponderans erit dimidium ſuſpenſi, cùm centrum grauitatis cylindri ſit in medio axis, erit ergo cylindrus altitudinis c g, baſeos C t D æquantis dimidium circuli genitoris, ſi ergo ex dimidio circuli genitoris auferatur æquiponderans parti b z c p e, relinquetur æ-

quiponderans parti alteri c ſ o q r n, videlicet quinque octantes circuli genitoris detracto quadrato g c; ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Hic locum, vt patet, habet corollarium ſimile primo ſuperioris propoſitionis.

PROPOSITIO XVIII.

IIſdem manentibus cycloidis integræ a b c R d axis c f, ita diuiditur à centro grauitatis vt pars ſuperior ad verticem c ſit ad inferiorem ſicut ſeptenarius ad quinarium. Si verò ex cycloide integra circulus genitor auferatur, reſidui quod ex differentiis conſtat axis c f ita ſecatur a centro grauitatis, vt ſuperior eius portio ſit ad inferiorem ſicut quinarius ad ternarium.

Ex recta g f abſcindatur f T æqualis ipſi g f; quoniam ſuſpenſione ex g facta figuræ b z c p e æquiponderat per decimam ſextam propoſitionem octaua pars circuli genitoris quæ eſt dimidium quadrantis c p e g; ſi ſuſpenſio per receſſum fiat ex f, perpendiculo f a, brachio f T æquiponderans augebitur ipſo ſuſpenſo per decimam ſecundi tetragoniſmicorum: ergo portioni b z c p e æquiponderat octaua pars circuli genitoris aucta quadrato g c, libra T g ex f ſuſpenſa brachio T f, ſed parti b e H f a æquiponderant per ſuperiorem iiſdem manentibus quinque octauæ partes eiuſdem circuli imminutæ quadrato g c (in ſuperiore enim id oſtendimus de parte c s o R n, brachio c V, quæ eſt eadem cum parte b e H f a) ergo toti figuræ c b a f c æquiponderant libra ex f ſuſpenſa, brachio f T, ſex octauæ partes circuli genitoris: ergo duabus ſimul c b a f e, c R d f ò æquiponderant ſex quadrantes vel tres ſemiſſes circuli genitoris. Cùm igitur duæ illæ figuræ ſint ſimul æquales duobus circulis genitoribus vt ex tertia propoſitione patet, æquiponderans ad duas illas erit vt ternarius ad quaternarium; ergo centrum grauitatis duarum illarum ſimul ita diuidit rectam f c, vt portio quæ eſt ab ipſo centro ad baſim contineat tres quadrantes bracij T f vel f g; ergo reliqua continet quinas eiuſdem modi partes, quod erat vnum ex demonſtrandis.

Quoniam verò genitoris circuli centrum grauitatis eſt g, duo ſemiſſes ipſius illi æquiponderabunt librâ T g ſuſpensâ ex f perpendiculo f a, brachio T f; ergo toti figuræ cycloidi a b c R d æquiponderant quinque ſemiſſ s genitoris circuli; ſed ipſa cycloides eſt per tertiam ſex eiuſmodi ſemiſſes; ergo cycloides ad ſuum æquiponderans eſt vt ſenarius ad quinarium; portio igitur quæ adiacet baſi a d eſt quinque ſextantes rectæ f g vel brachij T f: ergo reliqua ad verticem eſt ſeptem eiuſmodi ſextantes, quod reſtabat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Ad demonſtrationis effectum patet non eſſe neceſſariam quadraturam figuræ b z c p e, eo quod in æquiponderante partis b z c g includatur adtitia,

ditia,

dititia, & in æquiponderante residuæ partis sit ablatiua, vnde fit vt per additionem æquiponderantium elidatur. Methodus verò inueniendi ęquiponderans cuicunque portioni z c y si sit minor quam b c g suprà est tradita, quòd si detur maior c b G M inuenitur æquiponderans parti z c y, & deinde alteri parti z y M G, vt in pari casu duodecimæ annotatum fuit.

COROLLARIVM II.

Ex præsenti & decima quarta quarti tetragonismicorum patet axem f c figuræ compositæ ex differentiis secari eadem proportione in qua semiaxis hemisphærij secatur per centrum grauitatis, & in qua basis prismatoidis explicati in illa eadem decima quarta, & in corollario quarto primæ propositionis eiusdem quarti libri.

PROPOSITIO XIX.

Iisdem manentibus (*Fig.* 8.) circa axem a d manentem circumuoluatur cycloides a b c R d & describat conoides quod appello *primum*. Præterea circa axem b R manentem circumuoluatur portio b z c R & describat conoides quod voco *secundum*; ad planum a f c excitetur perpendicularis f u, sitque recta f u ad f T, vel ad f g, vel ad f x, vt est circulus ad quadratum diametri circumscriptum.

Ostendendum est Conoides primum esse æquale cylindraceo altitudinis f u baseos æquantis vicenos circulos genitores diametro c f descriptos. Conoides verò secundum esse æquale cylindraceo eiusdem altitudinis, baseos æquantis octo besses quadrati c g, vel T f, & simul duplum circuli genitoris.

Istud conoides primum secetur quolibet plano n h z parallelo ad planum u f c, eiusdem cum quadrante conoidis sectio intercepta inter plana u f a, g f a sit quadrans circularis n m z h quem in punctis n, z tangant rectę n l, z l complentes quadratum z h n l, cuius diameter sit h l. Si intelligatur solidum (vocetur homœoconoides) cuius sectiones in singulis quadrantibus interceptis inter plana a h z, a h n sint quadrata h n l z; ex vigesimæ tertiæ quarti tetragonismicorum corollario secundo habemus octupulum æquiponderantis cycloidi a b c R d librâ T c suspensâ ex f perpendiculo f a, brachio T f esse æquale homœoconoidi illi cuius sectiones sunt quadrata parallela plano u f c. Cùm igitur octuplum huius æquiponderantis per superiorem sit æquale viginti circulis diametri f c, patet homœoconoides istud esse æquale cylindraceo altitudinis f x ęquantis rectam f T, baseos continentis vicenos illos circulos. Præterea quoniam homœoconoidis & conoidis ad positionem plani u f c sectiones sunt vt quadratum & circulus inscriptus, hoc est vt altitudo f x ad altitudinem f u; per vndecimam quarti erit iuxta eandem positionem homœoconoides ad conoides, vt altitudo f x ad f u; sed ita etiam sunt cylindra-

dracea istarum altitudinem f x, f u quorum id quod habet altitudinem f x æquat homœoconoides solidum, ergo cylindraceum altitudinis f u æquat conoides propositum, quod erat vnum ex demonstrandis.

Alterum verò eodem modo ostenditur, superfluumque planè sit id enucleatiù stradere: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Hæc methodus perinde rem propositam demonstrat quæcunque alia ad basim a d parallela sumatur circa quam circumuoluatur figura a c d, dummodo per decimæ secundi tetragonismicorum methodum æquiponderans illi inueniatur. Eadem quoque methodus non exigit vt tota figura a z c R d sumatur, sed potest sumi quęlibet eius portio h z c f ad positionem rectæ f c; & completo parallelogrammo h z y f inueniri seorsum æquiponderans figuræ z c y quod addatur æquiponderanti parallelogrammi h z y f. Ex quibus patet non sine aliqua causa scriptum à nobis esse in illo corollario secundo vigesimæ tertiæ Theorema illius propositionis nostræ planam viam facere ad plurima problemata abstrusa pariter & vtilia.

COROLLARIVM II.

Rectam f u esse octauam partem totius peripheriæ c e f o, hoc est baseos a d, patet inde quod rectangulum sub recta g f & sub a f æquante dimidium peripheriæ totius sit æquale circulo c e f o; ergo rectangulum altitudinis c f baseos æquantis dimidium rectæ f a vel quadrantem peripheriæ totius est æquale circulo c e f o: igitur quadratum c f est ad circulum, vel ad rectangulum altitudinis eiusdem c f, baseos æquantis quadrantem peripheriæ circularis, vt basis c f ad quadrantem eiusdem peripheriæ, vel ad dimidium rectæ a f: ergo cùm f x vel g f sit ad f u, sicut c f dupla rectæ g f est ad quadrantem peripheriæ, erit f u octaua pars rectæ d a æquantis peripheriam c e f o.

PROPOSITIO XX.

EX demonstratis hactenus & iis quæ propositæ quæstionis Autor anonymus de suo spondet, Quadraturam Circuli eruere.

Quod in præsenti propositione nunc intendimus, mouit nos potissimùm ad istam nostram lucubrationem euulgandam. Sæpe enim accidit vt duorum circa idem Autorum inuenta in vnum collata præstent id ad quod singula satis non sint. Nos itaque ea inuenimus circa quæstionem propositam, quibus si accedant quæ doctissimus ille Scriptor promittit se non denegaturum posteris, si quæsita sua nullus soluerit, contendo absolui inde posse quadraturam circuli.

Manente enim schemate propositionis superioris, cùm Nobilissimus ille anonymus promittat figuræ b c R centrum grauitatis; sit illud i; ergo vt f g semidiameter circuli genitoris ad g i longitudinem notam, ita est figura b z c L R ad quartum spatium, quod notetur elemento H, Igi-

tur b z c L R figura continet ex duodecima propositione bis quadratum g c, & semel genitorem semicirculum e c o: spatium verò quod ei æquiponderat librà f c suspensâ ex g brachio g f, perpendiculo g e, continet ratione semicirculi genitoris duos trientes quadrati g c per decimam octauam tertij libri tetragonismicorum; ratione verò figurarum b z c e, R L c o dimidium semicirculi genitoris e c o per decimam sextam huius libri. Igitur rectilineum inclusum in figura b z c L R suspensâ ad rectilineum inclusum in æquiponderante H est vt ternarius ad vnitatem, portio autem semicirculi contenta in suspenso b z c L R ad portionem inclusam in æquiponderante H est vt binarius ad vnitatem: rectilineum igitur suspensi ad rectilineum P æquiponderantis non est vt curuilineum eiusdem suspensi ad curuilineum Q eiusdem æquiponderantis.

Vt f g ad g i ita fiat rectilineum æquiponderantis H ad spatium p, & ita etiam fiat curuilineum æquiponderantis H ad spatium q: ergo cùm eadem sit ratio rectilinei figuræ b z c L R ad rectilineum p, & curuilinei figuræ b z c L R ad curuilineum q; oportet necessariò vt spatij p ad q non sit eadem ratio quæ spatij P ad Q; si enim esset eadem ratio, cùm aliunde sint duo simul p q æqualia duobus simul P Q, essent singula singulis æqualia, ac proinde rectilineum suspensi ad P rectilineum æquiponderantis esset vt curuilineum suspensi ad curuilineum Q æquiponderantis, contra quam suprà ostenderimus. Cùm igitur rectilineum p notum vnà cum curuilineo q noto sint simul æqualia rectilineo P & curuilineo Q simul sumptis, & non singula singulis, differentia rectilineorum p P nota, erit æqualis differentiæ curuilineorum notæ q Q, quod satis est ad quadraturam circuli, vt patet: ergo &c. quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Habes hic, Lector, viginti illas propositiones iterum cusas quas anno superiore decimo Kalendas Augusti in lucem emisi. Nescio quis postea sub initium Octobris visus est inuidere mihi qualemcunque huius inuenti laudem, dum in historiâ Cycloideos Gallico idiomate compositâ scripsit hæc meo nomine edi non oportuisse nulla mentione facta eius à quo illa accepissem. Vanißimum istud commentum risu exceperunt hic Tolosates, plurimique viri graues alibi; ne tamen silentium mihi confeßioni criminis verti ab vllo posset, sub finem sex propositionum de acceleratione grauiũ nuper à me vulgatarum respondi in hæc verba ad lectorẽ: Autor historię Cycloideos initio Octob. editæ ausus est calumniosè scribere nos furtum fecisse problematum eorum quæ de eadem Cycloide ad Clarissimum Senatorem D. de Fermat XII. Kal. Augusti miseramus. Nihil certè posthac edetur quod non posfit suis vindicare amicis pari prorsus iure. At videramus manuscriptas ea de re demonstrationes huc Parisiis transmissas. Ad quem quæso? non certè ad D. de Fermat, neque ad nos, neque verò ad vllum qui eas nobis legendas dederit. Videram equidem in Torricellij libris iamdiu editis demonstrationem qua probat Cycloidem integram esse triplam circuli genitoris: sed hanc eius laudem iamdiu agnoueram in Elementorum meo-

rum libris. Vidi etiam, fateor vltro, eiusdem Torricellij manuscriptam demonstrationem centri grauitatis totius Cycloideos ab eodem D. de Fermat mihi communicatam triduo antequam meum illud Opusculum Parisios mitterem: hanc verò inuentionem vt illi nequaquam præripio, ita cætera ex omnium qui istam rem tentarunt iudicio longè difficiliora primus inuenisse mihi videor, quamdiu alios ante me inuentores penitus ignoro, tantum abest vt furti vllius mihi conscius sim. Illa verò (datâ semel circuli quadraturâ) sunt tria potissimum. I. Quadratura cuiuslibet portionis Cycloideos. II. Cubatura solidi geniti circumductu cuiuslibet portionis Cycloideos circa quamlibet rectam basi parallelam. III. Centrum grauitatis cuiuslibet segmenti Cycloideos subtensi rectâ ad basim parallelâ. Cæterùm expecto vt iste Autor mihi eadem arte deuntiet (id enim facile potest, si velit) à quonam Elementa Tetragonismica iam ante plures annos acceperim: à quo istas ipsas quas iam euulgo propositiones: à quo plura alia quæ prælo parata penes me habeo, in quibus sunt quatuor de cycloide libri cum plena solutione problematum omnium propositorum, quam viris summæ eruditionis & fidei legendam atque examinandam iam pridem dedi in primariis totius Galliæ vrbibus. Sed cùm chartæ istius angustiæ longiorem Apologiam non admittant, erit tempus quando ex literis D. de Pascal ad nos datis plura de Cyclocylindricâ, deque quadratura nostra solidi circa axem cycloideos paruæ pro omni casu geniti, tantopere ab ipso laudatâ, in defensionem nostram describere nobis per chartam ampliorem licebit. Vale Tolosæ VI. Eidus Decembr. 1658.

Cæterùm quod primus ea inuenisse mihi visus sum, quæ primus darem in lucem, quandiu alios ante me inuentores penitus ignorarem, non reprehendet ille Autor, si attenderit ad ea quæ ipse pronuntiauit in continuatione suæ historiæ editâ Parisiis 12. Decemb. 1658. *Ibi enim vt infirmet illud* graues viros iamdiu legisse meos de Cycloide manuscriptos libros, & plenam problematum propositorum solutionem, *opponit* in istis geometricis causis solam editionem publicam facere fidem. *Igitur si primus ego illa problemata publicè emisi, negare non potest me primum illorum inuentorem esse, nisi adducat anteriorem illorum problematum alicuius alterius editionem. Huc spectat quod ibidem edicit,* in geometricis non præberi assensum nisi rebus euidenter probatis. *Quæ autem ad Cyclocylindricam attinent, vide ea in scholio decimæ propositionis libri proximè sequentis: quæ verò ad laudes à D. de Pascal attributas meis inuentis lege (si tantùm vacat) in scholio vltimæ propositionis libri tertij, vbi defensionis iustæ necessitas repugnantem vicit illa referendi pudorem.*



DE CYCLOIDE
LIBER SECVNDVS.

In quo ampliora nostræ methodi fundamenta statuuntur, & Cyclocylindricarum figurarum quadratura *traditur.*

DEFINITIONES.



Yclocylindricam figuram primi nominis vocamus eam quæ intelligitur in superficie cylindri recti describi eo modo quo circulus in plano, nempe si pede circini extremo manente in dato superficiei cylindricæ puncto, ipse circinus circumducatur notans in superficie cylindricâ lineam donec ad idem punctum circuitu peracto redeat, quoties iste reditus fuerit possibilis. Circini autem crura si deducta fuerint interuallo diametri baseos cylindri, vocetur *cyclocylindrica primaria*, & antonomasticè cyclocylindrica; si alio quouis interuallo, dicatur *cyclocylindrica secundaria*; quòd si figatur extra illam superficiem, *nominis secundi* appellabitur, primaria quidem quoties semidiameter circuli, vel interuallum pedum extremorum circini erit æquale rectæ illi quæ à puncto in quo fixus hæret pes eiusdem circini per cylindri axem ducta terminatur in superficie cylindri, illa verò semidiameter & circulus ab ipsa descriptus est in plano basi cylindri parallelo; *secundaria* autem *secundi nominis* quando interuallum circini non terminabitur in superficie cylindri.

Nemini mirum videri debet quòd istam figuram appellem alterum circulum; fratres enim mihi videntur esse, cùm circini, cuius vnus pes fixus maneat, ductu generentur ambo, ille quidem in superficie planâ, iste in cylindricâ: vel seclusâ circuli cogitatione, cùm ambo sint communis sectio sphæræ & superficiei, ille quidem planæ, iste cylindricæ. Porrò in istis cylindricam superficiem intelligo illam quam definit Euclides initio vndecimi libri, cuius videlicet axis est rectus ad basim.

PROPOSITIO PRIMA.

EX centro a (*Fig.* 9.) deſcriptus ſit circulus interuallo cuiſlibet rectæ a d, eiuſque quadrans ſit d a c, ac proinde d a, ac ſecent ſe ad normam; rectæ a d biſectio ſit g, & ex centro g per a, d deſcriptus ſit ſemicirculus a n d, in cuius peripheria ſumptum ſit quoduis punctum e & per illud ductæ e d, e a, quarum alterutra a e producta occurrat peripheriæ d b c in b; ducta ſit b m perpendicularis ad a d.

Oſtendendum eſt rectæ d e æqualem eſſe b m, & rectæ a e rectam a m; arcui verò d i e æqualem eſſe arcum d b, & arcui a n e arcum b c.

Quoniam enim angulus d a b conſtituitur ad centrum circuli maioris d b c, & ad peripheriam circuli minoris d n a; ſi per g ducatur ad d e perpendicularis g l occurrens peripheriæ in i, ac proinde bifariam ſecans in i arcum d i e, arcus d i erit ſimilis arcui d b; ſed arcus ſimiles circulorum ſe habent vt ſemidiametri; ergo cùm ſemidiameter d a ſit dupla ſemidiametri d g, peripheria d b erit dupla peripheriæ d i; ſed peripheria d e eſt quoque dupla eiuſdem d i; ergo arcus d b, d e ſunt æquales.

Præterea quoniam triangula rectangula a e d, a m b habent angulum m a b communem, ſunt æquiangula; ſed habent baſes a d, a b æquales; ergo latus a e eſt æquale lateri a m, & latus d e lateri m b, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Hinc patet ſi peripheriæ a n d ponatur recta æqualis a h, ipſam a h eſſe quoque æqualem arcui c b d; & ſi in eadem recta a h ſumatur a f æqualis arcui a n e, ipſam a f eſſe quoque æqualem arcui b c. Item ſi ex f excitetur perpendicularis f o æqualis rectæ m b vel d e, & intelligatur figura ex differentiis genita reſpondens quadranti circulari c b d, cuius differentiæ ordinatim applicentur ad rectam c a, punctum o eſſe in limbo h o c eiuſdem figuræ.

PROPOSITIO II.

SIt (*Fig.* 10.) a b z c f figura ex differentiis genita, ita vt ordinatim applicata z y æquet arcum p c: ducta ſit quælibet z l ſecans arcum ſuperiorem b c in z parallela axi, complens parallelogrammum h l f c, occurrens rectæ g b in i; completo parallelogrammo g c x b intelligatur deſcripta figura alia x r g b ex differentiis quoque genita ſed ſubcontrariè, ita vt eius ſemiaxis ſit x b, vertex x, ordinatim applicata b g: curua x r g occurrat rectæ l z in r.

Oſtendendum eſt tres rectas h z, r i, z l eſſe proportionales.

Per z, r ducantur ordinatim applicatæ r s, z y occurrentes ſemicirculi genitoris peripheriæ c o f in t, p; per t ducatur t u complens paralle-

logrammum i r t u. Quoniam ex generatione figuræ a b c q d recta h c vel z y vel r s est æqualis arcui c p, completo parallelogrammo b g y m, & b g s e, rectam z vel e r erit æqualis residuo arcui p o; nam tota b g est ex generatione æqualis toti c t o. Rursus quoniam ex generatione figuræ x r g b arcui c p t æqualis est recta e r, eidem rectæ e r erunt æquales arcus c t, p o: ergo inter se sunt æquales iidem arcus c t, p o: ergo sublato vel addito communi p t, erunt c p, t o æquales arcus: ergo ordinatim applicata y p æquat ordinatim applicatam t u. Cùm igitur tres rectæ c y, y p, y f sint proportionales (nam ex p puncto peripheriæ demissa est p y perpendicularis ad diametrum c f) erunt tres rectæ c y, t u, y f proportionales: sed rectis c y, t u, y f æquales sunt h z, r i, z l: ergo tres rectæ h z, r i, z l sunt proportionales, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Curuæ x r g, c z b secent se in puncto λ, & per λ agatur πω occurrens rectis b g, a f in φ, ω; patet rectam ωφ ad φλ esse potestate vt binarium ad vnitatem. Recta enim b g secatur bifariam in φ, ac proinde recta φ g æqualis est dimidio peripheriæ c p o, vel x θ β, descripto ex centro b semicirculo x β n. Per λ acta sit λ θ parallela basi a f occurrens peripheriæ x β n in θ; per θ agatur δ μ complens parallelogrammum rectangulum x n μ δ, occurrens rectæ b β in ⊥. Quoniam x θ arcus est dimidium arcus x θ β, patet tres rectas θ δ, θ ⊥, θ μ esse propotionales, & rectam μ ⊥ ad ⊥ θ, vel ω φ ad φ λ esse potestate vt binarium ad vnitatem.

COROLLARIVM II.

Si figura g λ x producatur ad axis b x partes β, perinde ostendentur tres rectæ l z, z i, r i proportionales, quamuis punctum z sit in arcu b a, & punctum r in altero arcu peripheriæ g r x productæ.

PROPOSITIO III.

Iisdem manentibus, ostendendum est rectas r i, i z esse sinus complementorum, & quadrata ambarum esse simul æqualia quadrato c g.

In parte superiore b c g quoniam y g æquat sinum p B arcûs p t o, sequitur rectam z i æqualem rectæ y g esse sinum arcûs cui recta b i est æqualis: cùm enim recta i g æquet arcum c p, & tota g b totum arcum c p o, apertum est rectam i b æqualem esse arcui p t o, & ordinatim applicatas ad basim b g parallelas axi c f esse sinus arcuum quibus æquales sunt rectæ puncto b adiacentes. Cùm ergo posita sit subcontrariè altera ex differentiis figura x r g b, patet rectas r i, i z esse sinus complementorum, & quadrata ambarum esse simul æqualia quadrato c g, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV.

Iisdem manentibus, ostendendum est h z sinum versum arcûs cui recta h c æqualis est, esse æqualem sinui toti c g demptâ z i æquan-

te ſinum complementi: rectam verò z l compoſitam ex eodem ſinu z i & ex ſinu toto i l vel g f eſſe æqualem ſinui verſo arcûs cui recta i q eſt æqualis.

Quoniam ſinus p B vel y g demptus de ſinu toto c g relinquit ſinum verſum c y arcûs minoris c p; & idem ſinus p B arcûs p o additus ad ſinum totum f g componit y f ſinum verſum arcûs maioris p o f; patet h z ſinum verſum arcûs cui recta h c æqualis eſt eſſe æqualem ſinui toti c g dempta z i æquante ſinum complementi: rectam verò z l compoſitam ex eodem ſinu z i & ex ſinu toto i l vel g f eſſe æqualem ſinui verſo arcûs cui recta i q eſt æqualis, quod erat demonſtrandum.

Hæ figuræ c z b g, x r q b vocentur *ſubcontrariæ*.

PROPOSITIO V.

REuocato ſchemate propoſitionis primæ (*Fig. 9.*) ex a d abſciſſa ſit a h æqualis curuæ d b c vel d e a, ponatúrque h o c a figura ex differentiis ſuperior, cuius ſemibaſis ſit a h, axis a c, circulus genitor ſit is qui ex centro a per c deſcriptus fuit. Ponatur prætérea h λ a f figura ex differentiis ſuperior reſpondens circulo genitori, ſemidiametro g n deſcripto: per f quodlibet punctum rectæ a h ducta ſit f o ordinatim applicata ad ſemibaſim a h ſemicunei expanſi h o c a: ſit a e recta æqualis rectæ illi quæ in ſemicirculo a n d ſubtendit arcum æqualem rectæ a f.

Oſtendendum eſt quadratum rectæ a d eſſe maius quadrato rectæ a e, exceſſúmque eſſe æqualem quadrato rectæ f o.

Ex tertia propoſitione patet rectam f o eſſe æqualem ſinui arcûs d b, cui arcui recta h f eſt æqualis: ſed per primæ corollarium recta f o eſt æqualis rectæ d e; ergo rectæ f o vel d e quadratum eſt æquale exceſſui quo quadratũ a d ſuperat quadratũ rectæ a e, quæ ſubtendit arcum a n e, qui arcus ponitur æqualis rectæ a f: duo autem quadrata a e, e d æqualia eſſe ſimul quadrato a d patet ex elementis Euclidis: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

IIſdem manentibus figura G T a h ſubcontrariè ponatur figuræ h o c a.

Oſtendendum eſt rectas f o, f T eſſe æquales duabus d e, a e ſingulas ſingulis.

Quoniam per corollarium primæ recta f o æqualis eſt rectæ d e, per ſuperiorem autem exceſſus quadrati a d ſupra quadratum f o eſt quadratum rectæ a e; per propoſitionem verò tertiam idem exceſſus eſt æqualis quadrato ordinatim applicatę f T ad baſim a h figurę G T a h ſubcon-

trariè

trariè positæ alteri h o c a: igitur duæ f o, f T sunt æquales duabus d e, a e singulæ singulis, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

Iisdem positis, ostendendum est dicylindraceum ad positionem plani recti super plano d a c & incedentis per a c rectam, genitum ex subcontrariè positis h o c a, a T g h esse condictâ ratione æquale cylindraceo altitudinis æquantis rectam a d vel a c, baseos h λ a f.

Quoniam in semicirculo a e d vt a d recta ad d e, ita est a e recta ad e z, rectangulum sub extremis a d, z e, hoc est rectangulum sub v a, f λ erit æquale rectangulo d e a, vel T f o. Igitur dicylindraceum ad positionem plani recti super plano d a c, & incedentis per a c rectam, genitum ex subcontrariè positis h o c a, a T G h est condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis æquantis rectam a d vel ac, baseos h λ a f, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Iisdem manentibus (*Fig.* II.) ad planum c f d excitetur perpendicularis c h æqualis rectæ c f; in plano h c x intelligatur describi circulus diametro c h; iste verò circulus intelligatur esse basis cylindri cuius axis n o parallelus recta c f; planum per axem circuli & per rectam c f sit parallelogrammum c h m f: iste ergo cylindrus tangit planum a c d in recta c f; parallelogrammi h c g l latus g l occurrat axi n o in r; per r & c ducatur recta r c & intelligatur planum r c x secans cylindrum; vt portio cylindri intercepta ad partes rectæ c g inter planum transuersum r c x & semicirculum i g s quem tangit recta g q, sit cuneus primus definitus in vigesima sexta quarti tetragonismicorū. Iungatur præterea recta r f & intelligatur planum transuersum r f a, vt portio cylindri intercepta planis l g b, m f a, insistensque basi i g s diuidatur in duos cuneos primum g r f, secundum r f o.

Ostendendum est si ad positionem plani l g b vel h c x intelligatur cylindrica superficies cunei primi c r g explicari hinc & inde, ita vt circulorum basi cylindri parallelorum arcus conuertantur in rectas ipsis æquales, & rectæ g b parallelas; superiorem partem b c q esse ipsam superficiem cunei primi ita explanatam: inferiorem verò partem b q d a esse pari ratione portionem cunei secundi r f o, vna cum semicylindro baseos i g s altitudinis r o.

Istud sola mentis contemplatione melius intelligitur quàm verborum prolixitate; in quarta enim primi libri ostendimus rectangulum altitudinis c g baseos z y esse æquale duplo sectoris c g p, & sectorem c p g esse eundem cùm sectore qui in plano z y B ibidem fuit designatus in cylindro

cuius ſectio eſt ſemicirculus c e f ſi rectus ponatur ad planum a f c, ita vt recta e g ſit perpendicularis ad planum a f c. Atqui ſectori c p g inuenietur pari methodo æqualis ſector circuli y B qui eſt ſectio plani z y B & cylindri habentis axem n o, interceptus ad partes plani g c x inter plana r c x, r c g; ergo arcus periphericus cunei reſpondens plano z y B ad partes b eſt ęqualis rectæ z y; igitur cùm idem oſtendatur vbicunque iaceat z inter b eſt c; peripheria cylindrica cunei primi g r c extenditur ad poſitionem rectæ b q in figuram b c q, modo ſuprà præſcripto.

Completo parallelogrammo f c x b t, quoniam recta g b ęquat ex conſtructione peripheriam c e, & recta a f peripheriam c e f, patet rectam f t eſſe dimidium rectæ f a, ac proinde eſſe æqualem arcui f e vel quadranti peripheriæ circularis. Intelligatur figura f D u c ſubcontraria figuræ a z c f, vt in ſimili caſu ſecundæ propoſitionis primi libri; ducatur quælibet baſi a f parallela N D occurrens in N, D vtriuſque limbo figuræ ex differentiis genitæ, axi c f in M; rectæ b t in V: erit igitur vt in pari caſu ſecundæ illius tota N D æqualis toti a f; ergo completis parallelogrammis N M f G, M f a E, ſi ex æqualibus E M, N D auferatur communis recta N M, reſiduæ E N, M D erunt æquales: ſed M D recta eſt ex ſuperiore caſu æqualis peripheriæ X (ita enim vocetur) cunei primi r g f interceptæ inter plana r f a, r f g ad partes plani g f a: ergo reſidua N M eſt æqualis reliquæ peripheriæ quæ vnà cum X æquat ſemicirculi peripheriam: ergo cùm M V æquet quadrantem eiuſmodi peripheriæ circularis, recta autem E V æquet alterum quadrantem, & E N portionem cunei primi, recta N V æquabit portionem cunei ſecundi ad partes b poſitam: ergo tota linea N H continet rectam æqualem duplo rectæ M V, hoc eſt ſemiperipheriæ circuli, & inſuper aliam æqualem duplo rectæ N V, hoc eſt circulari lineæ attinenti ad cuneum ſecundum. Figura igitur inferior a N b q H d ad poſitionem rectæ a f, methodo antè præſcripta reſpondet ſuperficiei cylindricæ attinenti ad cuneum ſecundum, & inſuper ſuperficiei ſemicylindricæ, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

In duodecima propoſitione primi libri oſtendimus figuram ſuperiorem b c q eſſe æqualem duplo quadrati c g; in præſenti verò, eiuſmodi figuram eſſe ſuperficiem cylindricam cunei primi expanſam ad poſitionem plani h c x. Vnde nunc primùm colligimus nos tunc nihil cogitantes quadraſſe ſuperficiem illam ſed expanſam, quam antequam expandatur P. Gregorius à S. Vincentio appellat *cylindricam ſuperficiem vngularem*, & ſubtiliſſimè quadrat libri noni propoſitione 45. & 54. aſſumpta in ſuæ huius quadraturæ fundamentum propoſitione vigeſima libri quinti collectionum Mathematicarum Pappi. Colligimus præterea iſtas duas ſuperficies expanſam videlicet, & contractam in curuum, eſſe æquales: hoc enim ipſum quod nos de expanſa, ille de contractâ demonſtrat, quod non ſine admiratione examinatori cuilibet conſtabit. In hanc igitur figu-

xam possunt conferri ferme omnia quæ ille de sua illa superficie eruditè admodum demonstrat: sed aliena frustra exscribere non amo, licet admiranda iudicem.

Figuram istam in posterum vocabo vno ex istis nominibus, nempe *paruam cycloidem*, vt eam distinguam à maiore Torricellij, vel *cunei expansam superficiem cylindricam*, vel breuiùs *cunei expansam superficiem*, vel certè *cuneum expansum*; eius vero partes superiorem b c q & inferiorem b q d a distinguam sicut in præsenti.

COROLLARIVM II.

Quoniam ordinatim applicatæ M D, E N sunt æquales perpetua lege, patet lineam a N b esse cauam ad partes rectæ a E, & conuexam ad partes rectæ f M; ipsamque figuram F B N a esse subcontrariè positam figuræ b z c g & eandm cum ipsa.

SCHOLIVM.

Figuras expansam & contractam esse inter se æquales si quis generaliter & pro omni casu assumat, rem à Geometriæ certitudine alienißimam facit: speciosum quidem est illud postulatum sed planè dolosum; ideóque nos sæpe sæpius illo delusi æqualitatem inter expansam & contractam in præsenti casu intulimus ex demonstrationibus seorsum factis pro expansâ & contractâ. Sunto igitur longè diuersa duo ista, aliquam superficiem curuam expandi in rectam, & esse illi æqualem; nec istud ex illa generali methodo inferatur. Atque hanc cautionem intelligi volumus in corollario primo decimæ septimæ tertij libri, vbi coni superficiem expansam damus. Vtrum autem contracta sit expansæ æqualis, an inæqualis, nihil ibi consultò pronuntiamus: nouimus etenim plurimas cautiones esse adhibendas vt æqualitas legitimè inferatur, eæ verò quænam sint, non est huius loci dicere. Aduerto vnum in præsenti casu quod cùm probabili veritatis laruæ suppositum lateat plures decipere posset; superficiei istius contractæ & ante explanationem sumptæ illum limbum qui peripheriæ circulari opponitur esse ellipseos arcum; at verò in expansâ figurâ limbum a b c q d non rectè inferri æqualem illi arcui propterea quod is in ipsum a b c q d expandatur & explicetur. Si enim consecucio ista esset legitima, plura demonstrarentur quæ ad hunc vsque diem licet diu quæsita, attamen irreperta latent. Qui autem noua principia totos dies inquirunt, videant ne nitori veritatis Geometricæ quam nobis maiores nostri tradiderunt, incauti officiant: nihil enim faciliùs est quàm vt quod in aliquo casu tantummodo verum est, ad alios inani quadam veritatis specie traducatur; iuuátque meminisse Archimedem testari (vt §.5 prolegomenon nostrorum aduertimus) quosdam quadraturam circuli aggressos successu caruisse, quòd principia noua & minimè concedenda assumpsissent.

PROPOSITIO IX.

ASsumpto schemate propositionis primæ (*Fig.* 12.) ducta sit quæcunque z i parallela axi c f occurrens limbo expansæ cyclocylindricæ superioris in z; rectæ b g in i; per z ducta sit z y u pa-

rallela rectæ b g occurrẽs axi c f in y; peripheriæ semicirculi c o f in u.

Ostendendum est completo parallelogrammo g y u m, figuræ i z c g æquale esse rectangulum o g m.

Istud ostendi posset ex methodo duodecima primi libri, quia tamen methodus Gregorij à Sancto Vincentio est facilior eam vsurpamus hoc loco. In planum c g o ex puncto c excitetur perpendicularis c t æqualis rectæ c g, cuius dupla sit c x, & iungantur rectæ g t, g x. Si ergo circulus diametri c f ponatur basis cylindri, & is secetur plano x g b transuersò ostendit ille Autor libri noni propositione quadragesima septima superficiem cunei primi x g c respondentem arcui c u esse æqualem rectangulo contento sub circuli c o f r diametro o r & sub eius parte g m; cúmque in quinquagesima quarta eiusdem libri demonstret superficiem cunei primi x g c ad superficiem primi t g c esse vt rectam x c ad t c, hoc est vt diametrum r o ad semidiametrum g o, patet superficiem cylindricam cunei t g c respondentem arcui c u esse æqualem rectangulo o g m.

Quoniam verò arcus c u extenditur in rectam y z, & rectæ in superficie cylindricâ cunei t c g quæ sunt sectiones planorum parallelorum plano g c t sunt æquales ordinatim applicatis ad diametrum r o: m u vel i z erit ordinatim applicata ad basim b g figuræ cylindricæ expansæ. Igitur portio i z e c g est æqualis portioni cuneatæ superficiei cylindricæ insistenti super arcu c u: ergo figura i z e c g est æqualis rectangulo o g m, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Cùm tota portio b z c g sit per duodecimam primi libri æqualis rectangulo o g o, & eius pars i z e c g rectangulo o g m, patet partem b z i esse æqualem rectangulo g o m.

COROLLARIVM II.

Quando arcus c u est bes peripheriæ c u o, hoc est, quando c u arcus est duplus alterius o u patet rectam g c bifariam secari in y, & rectam g o ad g m esse potestate vt quaternarium ad ternarium. Quod si arcus c u foret triens peripheriæ c u o patet rectangulum o g m fore æquale semiquadrato rectæ g c, & ipsam g c fore ad g y potestate vt quaternarium ad ternarium.

PROPOSITIO X.

Reuocato schemate propositionis primæ (*Fig.* 9.) intelligatur a n d circulus fieri basis cylindri cuius superficies describatur motu rectæ a s perpendicularis ad planum circuli a n d. Pede circini manente in puncto a intelligatur interuallo rectæ a d describi linea quam vocamus absolutè cyclocylindricam.

Ostendendum est spatium inclusum istâ cyclocylindricâ esse æquale spatio quod potest c u dupla rectæ a c.

Intelligatur basis cylindri esse circulus centro g per d & a descriptus, vt a h recta æquet peripheriam a n d: ordinatim autem applicatæ ad basim a h æquent rectas in cyclocylindricâ figurâ ante ipsius expansionem parallelas axi cylindri. Istius itaque figuræ ita expansæ semiaxis longior erit a h, breuior a c (ita enim vocentur) eius verò quadrans erit a h o c, In rectâ a h sumatur quoduis punctum f, & a f æqualis sit arcui a n e: ergo si c a ponatur axis semicunei primi expansi vel cycloideos paruæ respondentis quadranti circuli a d b c, a h æquabit peripheriam d b c ex primæ corollario, ac proinde a h erit basis illius semicunei expansi: igitur per quintam recta f o ordinatim applicata ad semibasim a h semicunei primi expansi a c o h potest spatium quo recta a d superat quadratum subtensæ a e: ergo f o est ordinatim applicata figuræ cyclocylindricæ expansæ. Nam ante expansionem si per e agatur e t parallela rectæ a s, quæ axi cylindri æquidistat, recta e t erit in superficie cylindrica, si autem a t recta ponatur æqualis interuallo circini siue rectæ a d, patet rectam e t secari à circino in puncto t, ergo recta e t est ordinatim applicata, axi parallela, insistens super peripheria d n a; ergo t e recta & a e possunt duo quadrata æqualia quadrato a t vel a d; ergo cùm quadratum a e quadratúmque f o vel m b, vel d e æqualia simul sint eidem quadrato a d; erunt rectæ f o, e t æquales; ergo cùm arcui a n e æqualis sit recta a f, & ordinatim applicatæ e t, ordinatim applicata f o, semicuneus expansus primus h o c a erit quadrans cyclocylindricæ figuræ expansæ, earumque limbi h o c, h p c erunt vnus & idem.

Quoniam igitur ex duodecima primi libri tota figura h o c a æqualis est quadrato a c, & h o c a est, vt iam ostendimus, quadrans cyclocylindricæ figuræ, patet quadruplum quadrati a c, vel quadratum quod potest dupla rectæ a c esse æquale cyclocylindricæ integræ, quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

De hac figura quadrandâ vt cogitarem fecit Clarissimus D. de Fermat; postea enim quàm primum huius operis librum vulgaui, nescio qua se dante occasione significauit mihi inuenisse se solidi, motu cuiuslibet cyclocylindricæ primi nominis circa basim geniti proportionem cùm cylindro circa eandem basim genito motu rectanguli cuius vnum latus sit eadem basis, alterum æquet axem cyclocylindricæ. Vbi primùm solus fui, cœpi mecum cogitare quid istud rei foret, reperique tandem post aliquot dies non tantùm proportionem illam, quam mihi vir optimus non expresserat, sed etiam quadraturam cyclocylindricæ primariæ primi nominis. Hoc, cum iterum illum alloquerer, ipsi denuntiaui, deque meo inuento pro sua qua me licet immerentem complectitur beneuolentia, & pro studio illo quo artium omnium incrementa mirificè fouet, mihi amplè gratulatus est. Aliquot post diebus literis ad D. Carcaui datis inserui quantùm hac in re deberem integerrimo illi senatori, quanti facerem subtilissimam quam mihi tunc communicarat demonstrationem circa proportionem cylindri & solidi. De me nihil scribere aliud tunc libuit nisi meâ quidem sententia facturum illum rem docta sæ-

culi curiositate dignam qui cyclocylindricas figuras (*nempe primi nominis, nam de aliis nondum quicquam cogitaram*) quadraret. *Quarta Septembris proximè lapsi die primas ad me dedit literas D. Pascal, vt me doceret quas ego edideram viginti propositiones de cycloide, non attigisse problematum ab Anonymo propositorum difficillima, & quæ ego ex illis solnissem si comparentur ad solidum circa axem cycloideos magnæ vel paruæ, esse vt elementa Euclidis collata cum Archimedeis operibus. Præterea tam longè adhuc distare inuentionem solidorum istorum circa axem genitorum ab inuentione centri grauitatis solidorũ propositâ, quàm procul remoti sunt eiusdem Euclidis libri ab inuentis Lucæ Valerij aut Archimedis. Vt autem intra inuentorum infimum gradum potentiùs me cohiberet, subiecit in infimo illo loco esse quadraturam cyclocylindricæ, quam ego tamen in literis ad D. Carcaui tantopere extollo, eamque iam repertam esse etiam à me ipso quamuis insciente; sed pace illius dixerim, fallitur; conscius enim mihi eram mei istius inuenti Ostendit autem à me inuentam esse, quòd cycloideos paruæ quadraturam dederim in duodecima primi libri iam tunc editi; illa autem cyclocylindrica expansa, quando describitur interuallo diametri baseos cylindricæ, sit ipsa (quod demonstrare inquit paratus sum, si opus fuerit) cycloides parua. Ista syncerè narraui vt constet quid me doceri de cyclocylindrica figura curarit Anonymus: at certè nihil; expectabam tamen quadraturam cyclocylindricæ cuiuslibet, quam eruditâ ista ætate dignam existimabam tunc, & etiam nunc existimo. Quis tamen non putet mihi arcanum aliquid de cyclocylindrica figura, quod numquam in mentem meam venire potuisset, detectum tunc fuisse, si attendat ad illa verba Autoris historiæ Cycloideos editæ Gallice* 10 *Octob.* 1658. Quo in negotio (*inquit ille Autor Anonymus*) rem Patri LALOVERÆ gratissimam facturum me credidi; quia suis in literis, quæ penes nos seruantur, scribit de quadratura huius figuræ, quam cyclocylindricam vocat, tanquam de re sibi maximè incognita, & quam imprimis optaret cognoscere. Dominus de Carcaui, cum non vacaret per se, per vnum ex amicis (*is est D. de Pascal*) illi explanauit ista omnia, & quidem valde amplis literis, quibus idem Pater respondit. *Diceres isto responso me agnouisse inscitiam meam, & gratias illi egisse me de doctrinâ summè reconditâ. Respondi, fateor, sed hoc ipsum quod hîc inculco, me nihilò doctiorem circa cyclocylindricam ex illis literis euasisse, méque in illis desiderasse illam cyclocylindricæ quadraturam, quam tantorum Geometrarum nomine allecta spes mihi pollicebatur.*

PROPOSITIO XI.

Isdem manentibus (*Fig.* 13.) in quadrante cyclocylindricæ figuræ h o c a ducta sit quælibet ordinatim applicata f o ad semiaxem longiorem a h, parallela axi a c breuiori.

Ostendendum est figuram alterutram a f o c, vel h f o esse æqualem rectilineo noto.

Istud patet ex nona; ibi enim ostendimus modum quadrandi istas portiones semicunei primi expansi; sed h o c a quadrans cyclocylindricæ

per demonſtrata in ſuperiore eſt primus ſemicuneus expanſus; ergo &c. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XII.

Iſdem manentibus circa axem longiorem circumuoluatur quadrans cyclocylindricæ h o c a & deſcribatur conoides cyclocylindricum.

Oſtendendum eſt conoides iſtud cyclocylindricum eſſe æquale cylindraceo baſeos æquantis circulum deſcriptum diametro breuiore u c, altitudinis quæ ad ſemidiametrum huius circuli ſit vt circulus ad quadratum ſuæ diametri.

Iſtud non aliter demonſtratur quàm decima nona primi libri; nam ex decima ſexta eiuſdem libelli librâ u c ſuſpensâ ex a perpendiculo a h, brachio a u æquiponderans quadranti cyclocylindricæ expanſo h o c a integro pars eſt octaua circuli diametro u c deſcripti; ergo octuplum illius eſt circulus diametro u c deſcriptus, quod pro iſto caſu demonſtrandum erat, vt cætera decimæ nonæ libri primi illi competerent; ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam cyclocylindrica expanſa componitur ex duplici parte ſuperiore cycloideos paruæ, hæc & plura alia ampliùs conſtabunt ex proximè ſequenti libro, vbi octo Anonymi problemata applicantur cycloidi paruæ, ac proinde etiam cyclocylindricæ expanſæ. Paucula tamen adhuc quæ ſequuntur addere lubet.

PROPOSITIO XIII.

Iſdem manentibus (*Fig.* 13.) rectæ a u, h a bifariam ſecentur in C, r, & compleantur parallelogramma h r q A, h a C A: centro r per q intelligatur deſcriptus circulus qui ſit genitor partis ſuperioris q t h r cycloideos paruæ, ſitque etiam genitor partis ſuperioris q i u C cycloideos paruæ: figuræ q t h r reſpondeat h x q A ſubcontrariè poſita. In recta h r ſumptum ſit quoduis punctum f, & per id ducta f o ordinatim applicata ad baſim h a occurrens curuis q t h, q x h & rectæ q A in punctis t, x, y.

Oſtendendum eſt tres rectas a c vel a d, f o, f x eſſe proportionales.

Quoniam ſemicunei primi q x h A, h t q r ſunt ſubcontrariè poſiti, & duæ rectæ h f, f r æquant peripheriæ circularis quadrantem d e n, repræſentantque arcus d e, e n qui ſibi ſunt ad quadrantem d e n mutuò complementa; ergo cùm per propoſitionem tertiam rectæ t f, x y repræſentent ſinus arcuum d e, e n complentium ſimul quadrantem d e n, duo autem iſti ſinus poſſint ſimul quadratum g d vel q r, patet duo quadrata

f t, y x esse simul æqualia quadrato q r, & rectam y x repræsentare sinum complementi arcûs d e. Cùm igitur per propositionem quartam sinus versus arcûs d e sit sinus totus d g vel y f imminutus sinu x y complementi, patet rectam f x esse æqualem sinui verso d z. Tribus igitur rectis d z, d e, d a æquales sunt tres, f x, f o, a c vel d a: atqui ex corollario octauæ sexti Euclidis tres d z, d e, d a sunt proportionales; igitur tres f x, f o, a c vel d a sunt proportionales, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Quod si punctum e cadat inter n & a tunc sinus versus componetur ex rectâ q r & ex rectâ f t, vt ex eadem quarta liquet. Vnde prærerea constat duas simul figuras h x q r, r q i u a continentes sinus versos qui toti semicirculo d n a respondent, esse æquales parallelogrammo h A C a. Similis est ratio si sumantur duo simul arcus vtrinque æquales, & ad centrum g eodem respectu positi, ambo enim æquant parallelogrammum altitudinis q r, baseos æquantis eam rectæ a h portionem cui duo illi arcus sunt simul æquales.

COROLLARIVM II.

Quoniam tres figuræ quarum prima est parallelogrammum a c D h, secunda est quadrans h o c a cyclocylindricæ figuræ, tertia est h x q i u a cuius dimetientes æquant sinus versos iam dictos, habent dimetientes l f, f o, f x proportionales, apertum est ad positionem rectæ a c, cylindri, circumuolutione parallelogrammi a c D h circa rectam a h manentem geniti sectionem parallelam plano s a c, esse ad sectionem conoideos geniti circumuolutione figuræ h o c a circa eandem a h manentem, vt est figura plana parallelogramma a c D h ad *figuram sinuum versorum* h x q i u a: ita enim vocetur.

PROPOSITIO XIV.

Isdem manentibus cylindrus supra descriptus respondens toti parallelogrammo a c D h est ad conoides genitum ex quadrante cyclocylindricæ respondens toti rectæ a h, vt binarius ad vnitatem. Quod si ad positionem plani s a c sumantur quæuis duæ portiones cylindri & conoideos inter eadem plana condicta & inæqualiter à puncto r remota interceptæ, conoideos portio ad portionem cylindri habebit porportionem certo quodam modo notam.

Quoniam enimparallelogamum a c D h, quadrans h o c a cyclocylindricæ figuræ, & figura constans sinibus versis habent parallelas rectæ a c continuè proportonales, vt ex superiore liquet, dicylindraceum genitum ex quadrante h o c a in seipsum ducto ad positionem plani s a c, erit ad positionem plani s a c æquale cylindraceo altitudinis a c, cuius basis sit figura constans sinibus versis, vt ex vndecima quarti tetragonismicorum liquet. Igitur cùm dicylindraceum genitum ex parallelogrammo a c D h in se ducto, & cylindraceum altitudinis a c, cuius basis sit figura h x q i u

a ex si-

a ex ſinibus verſis conſtans habeant eandem altitudinem a c, erunt ad poſitionem rectæ a c vt baſes; ergo dicylindraceum ex parallelogrammo a c D h in ſe ducto ad dicylindraceum ex quadrante h o c a in ſe ducto ad poſitionem plani s a c, eſt ad poſitionem rectæ a c condicta ratione vt parallelogrammum a c D h ad figuram h x q i u a ex ſinibus verſis: ergo vt ex decima nona primi libri conſtat ita quoque eſt cylindrus ad conoides.

Igitur cùm ex corollario primo ſuperioris, baſis ex ſinibus verſis reſpondens toti h D c a ſit æqualis parallelogrammo A C a h. quod eſt dimidio parallelogrammi a c D h æquale, patet cylindrum genitum ex parallelogrammo a c D h integro ad conoides genitum ex quadrante cyclocylindricæ h o c a integro eſſe vt binarium ad vnitatem, quod erat vnum ex propoſitis. Simili verò ratione oſtenditur ſi vltra punctum r ſumantur vtrinque f r, r m æquales, portionem cylindri reſpondentem rectæ d m inter plana ad planum ſ a c parallela eſſe ad conoidis portionem inter eadem plana iacentem, vt eſt binarius ad vnitatem.

Quòd ſi vltra r ad partes h ſumpta ſit portio quæuis cylindri reſpondens rectæ r f, cùm ſinus verſi poſiti inter r & h ſint æquales rectæ q r imminutæ dimetiente ſemicunei expanſi h x q A, & quadratura figuræ h x q A obtineatur ex nona propoſitione, apertum eſt figuram h x q r ex ſinibus verſis conſtantem vnà cum figura h x q A notâ eſſe æqualem dimidio parallelogrammi altitudinis a c, baſeos r h: ergo dicylindraceum genitum ex parallelogrammo p r f l in ſe ducto ad poſitionem plani ſ a c, ad portionem dicylindracei ſimiliter geniti ex cyclocylindricæ quadrante h o c a in ſe ducto ſe habet vt parallelogrammum p r f l ad parallelogrammum y q r f imminutum figura q x y nota: ſed ita etiam ſe habet portio cylindri ad portionem conoideos, vt ex ſupra monſtratis liquet: igitur portio conoideos ad portionem cylindri eſt in iſto caſu vt parallelogrammum y q r f imminutum noto ſpatio ad parallelogrammum r p l f duplum ipſius y f r q. Hinc verò apertum eſt ſi ad partes a ſumatur quæuis recta r m, vt eſt parallelogrammum q r a C altitudinis q r auctum portione ſemicunei primi q i u C expanſi ad parallelogrammum F p r m altitudinis a c duplæ ipſius q r, baſeos eiuſdem r m, ita eſſe portionem conoideos cyclocylindrici ad portionem cylindri, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam tres rectæ x f, f o, f l ſunt proportionales, & figura h x q r eſt parallelogrammum A q r h imminutum rectilineo noto æquante figuram A q x h, patet ex vigeſima octaua quarti tetragoniſmicorum axe libræ planæ r h ſuſtentaculo u G, quod latus eſt parallelogrammi h a u G, dimidium condicta ratione ſumptum figuræ h x q r imminutæ figura nota A q x h aptatum ſuſtentaculo iam dicto æquiponderare condicta ratione ad rectæ a c poſitionem, figuræ h o E r vt iacet manenti; reliquæ au-

tem figuræ E r a c æquiponderare dimidium parallelogrammi altitudinis q r aucti portione nota semicunei primi expansi q i u C.

SCHOLIVM.

Doctißimus D. de Fermat methodo subtilitatis prorsus mirabilis istam proportionem in quacunque primi nominis cyclocylindrica mihi demonstrauit; quam quidem methodum suis in operibus, quæ tota Europa enixè expetuntur, edet, vti spes est, Amicorum omnium precibus tandem victus.

PROPOSITIO XV.

Iisdem manentibus (*Fig.* 14.) compleatur quadratum d a u H & in e o ponatur H u axis parabolæ H m a cuius vertex H, ordinatim applicata u a: In circuli d e a diametro d a sumptum sit quoduis punctum z & per illud ducta e z ordinatim applicata occurrens rectæ u H in P, parabolæ in puncto m.

Ostendendum est rectam P m esse æqualem rectæ e t dimetienti cyclocylindricæ nondum expansæ: ac proinde cyclocylindricæ quadrantem nondum expansum esse parabolam H m a u translatam in peripheriam d e a, illique insistentem ad positionem rectæ a s.

Quoniam enim ordinatim applicata u a æqualis est axi H u, latus rectum parabolæ erit æquale rectæ H u vel d a; ergo rectangulum u H P est æquale quadrato P m: sed rectangulum a d z est æquale per corollarium octauæ sexti libri Euclidis quadrato rectæ d e vel e t: ergo cum rectangula a d z, u H P sint æqualia, erunt quoque P m, e t æquales: igitur cyclocylindricæ quadrans nondum expansus est parabola H m a u translata in peripheriam d e a ad positionem rectæ u a, illique insistens ad positionem rectæ s a, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hinc licet inferre cyclocylindricæ figuræ quadrantem h o c a nihil aliud esse quàm parabolam expansam, quæ ante quam expanderetur erat H m a u, & ad positionem rectæ a s super limbo semicirculi d e a insistebat. In hac verò extensione istud seruatur vt arcus d e a conuertatur in rectam sibi æqualem, & singulæ illius arcûs portiones extensæ in rectas æquales retineant illas ipsas ordinatim applicatas quæ ipsis competebant ante extensionem. Simili prorsus pacto expansus cuneus primus h q a est semicirculus d n a expansus ita vt curua a n d conuertatur in rectam a h sibi æqualem, & ordinatim applicata f λ ad a b basim expansi semicunei h λ q a sit æqualis ordinatim applicatæ z e ad diametrum d a semicirculi d n a, rectâ h f æquante arcum de. Itaque figura h q a est semicirculus d e a expansus quatenus curuatura d e a intelligitur in rectam a h expandi retentis ordinatim applicatis iisdem parallelis rectæ g n. Est autem cuneus primus expansus quatenus superficies cylindrica cunei primi noti insistens ad positionem rectæ a s super peripheria d n a intelligitur

expandi in rectas parallelas rectæ a h quarum singulæ sunt æquales peripheriæ ad cuneum attinenti circulorum parallelorum basi cylindri. Denique si in plano ſ a g recto ad planum d a c, intelligatur triangulum rectangulum g a s; in semicylindro cuius basis d e a g, planum ſ g n auferet semicuneum primum interceptum planis n g a, ſ g n, ſ g a. Superficies autem cylindrica ipsius semicunei erit triangulum g a s ad positionem ſ a c translatum in curuam a n, & illi insistens ad positionem rectæ a s. Pari de causa superficies semicunei eadem est quadrans circularis insistens super semidiametro g n translatus in ipsam superficiem ad positionem plani ſ a g. Porrò dum triangulum vel aliud quid translatum dicimus, nolumus intelligi post translationem manêre æquale sibi ipsi ante translationem sumpto; id enim apertè falsum est: sed solùm quocunque plano ad planum ſ a c parallelo secetur triangulum ſ g a & cunei superficies illa, sectionem trianguli & superficiei esse inter se æquales. Quæ autem de cuneo primo scripsimus possunt, vt patet, proportione quadam applicari cuneo secundo, qu vt patet ex corollario secundo decimæ tertiæ & ex ipsa decima tertia expandetur in figuram sinuum versorum ibidem definitam & demonstratam.

PROPOSITIO XVI.

REuocato (*Fig.* 15.) schemate decimæ tertiæ sit h o c a paruæ semicycloideos pars superior, genita quadrante circulari d b c a: sit h q i u a figura ex sinibus versis: sit d p c limbus parabolæ cuius axis a c, ordinatim applicata a d: ducta sit b m quælibet ordinatim applicata ad circuli semidiametrum c a occurrens limbo parabolico in p: per b ducta sit b o æquidistans rectæ a d, & occurens limbo h o c in o; per o acta sit o f parallela rectæ a c occurrens lineis h a, h q u in f, x.

Ostendendum est rectas m p, f x esse æquales, ac proinde quo pacto figura d b c a expanditur in figuram h o c a, eodem expandi figuram d p c in figuram ex sinibus versis h x q i u a.

Quoniam enim per tertiam tertij tetragonismicorum tres rectæ u a, m b, m p sunt proportionales; tres autem u a, f o, f x sunt proportionales per decimam tertiam, patet rectas f x, m p esse æquales, ac proine verum id esse quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

Sicuti quadrans circularis d b c a expãditur in paruam semicycloidem superiorem h o c a, ita parabola d p c a in figuram ex sinibus versis u q h a: vnde fit vt sicuti tres a c, m b, m p ante expansionem sunt proportionales, ita post expansionem tres a c, f o, f x maneant proportionales; potest itaque figura u x h a appellari etiam parabola expansa, in sensu videlicet iam exposito.

PROPOSITIO XVII.

Iisdem manentibus compleatur quadratum c a d e, & ducatur eius diameter d c: completo parallelogrammo u a h l, intelligatur parua semicycloides superior a y l h subcontrariè respondens superiori semicycloidi h o c a. Recta f x occurrat limbo a y l in y, & rectæ u l in z.

Ostendendum est tres rectas u a vel z f, f y, z x esse proportionales, figurámque a y l h esse triangulum c d e expansum sicuti in superioris corolario ostendimus u i x h a esse parabolam d p c a expansam.

Recta o b producta occurrat rectæ a c in n, & rectam b rectis c d, c e in r & g. Igitur per secundam huius libri rectæ b n, f y sunt æquales: sed latera b n, g c parallelogrammi g b n c, sunt æqualia: igitur rectæ f y, g c sunt æquales: sed in triangulo c d e rectangulo cuius duo latera c e, d e sunt æqualia, applicata r g æqualis est lateri c g: ergo rectæ r g, f y sunt æquales. Igitur a y l h est triangulum c d e expansum iuxta explicationem suprà traditam.

Rursus quoniam recta z f æquat rectam m g, & recta f x rectam m p per superiorem, residua z x æquabit reduam p g: tres igitur rectæ z f, f y, z x æquant tres rectas m g, g r, g p singulæ singulas: ergo cùm per duodecimam tertij tetragonismicorum tres rectæ m g, g r, g p sint proportionales, erunt quoque & tres z f, f y, z x. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Nouem, quæ sequuntur, propositiones adiecimus ineunte hoc mense Februario anni labentis 1659. Postea quàm quatuor hos de cycloide libros Regius Magistratus nostro rogatu censuit obsignandos, quod eiusdem autoritate & manu factum deinde est, vt certò omnibus constaret nos eo ipso tempore quo calculum sexdecim casuum edidimus, habuisse exaratos eos libros quorum in eo calculo mentionem facimus. Has porrò propositiones non putamus fore Lectori iniucundas, cùm cyclocylindricæ tractatum mirificè amplificent.

PROPOSITIO XVIII.

Parabolam f a g tangat (*Fig.* 16.) recta ad in a, eiusque axis sit a e: illius quemlibet arcum h n subtendat recta h n non parallela rectæ a d, quæ bifariam secta sit in i, & per i ducta sit i l parallela rectæ a e occurrens arcui h n in l: ex d e abscissa sit a s æqualis rectæ i l, & per s ductæ sint vtrinque ordinatim applicatæ s g, s f ad axem a e; per f, g, h, n ductæ sint f r, g m, h c, n d parallelæ axi a e & occurentes tangenti in r, m, c, d. Parabolæ f a g latus rectum a C respondeat axi a e.

Oſtendendum eſt rectas r m, c d eſſe æquales, & ſi deſcribantur ſemicirculi r B m, c t d ex centris a, x, ſumptiſque a y, x z æqualibus agantur y q, z p æquidiſtantes axi a e, & occurrentes in A, u, q, b, o, p lineis B m, a g, g s, t d, l o n, h i n, rectas q u, o p eſſe æquales: & tres rectas C a, A y, q u, vel C a, z b, o p eſſe proportionales.

Rectas f g, c d eſſe æquales patet ex methodo propoſitionis 267. & 266. Gregorij à S. Vincentio de Parabola. Præterea quoniam rectangulo C a s æquale eſt quadratum ordinatim applicatæ f g vel a m, vel a B, tres rectæ C a, a B, a s, vel tres C a, t x, i l erunt continuè proportionales: ergo per tertiam tertij tetragoniſmicorum tres rectæ C a, y A, q u, vel tres C a, z b, p o erunt proportionales: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Si recta a s non eſſet axis, ſed quæuis alia diameter, r B m, c t d non forent ſemicirculi, ſed ſemiellipſes quarum ſemidiametri coniugatæ r a, a B, vel c x, x t forent inter ſe æquales: Cætera verò perinde demonſtrarentur, vt patet. Cæterùm præſentem propoſitionem cùm haberemus in noſtris manuſcriptis nondum editis aliter demonſtratam, & pendentem ex nonnullis aliis, libuit illam breuitatis ſtudio monſtrare adhibita methodo Gregorij à S. Vincentio.

PROPOSITIO XIX.

INtelligatur (*Fig.* 17.) ſemicirculus f e g diametro f g, centro s deſcriptus circa manentem f g volui & deſcribere ſphæricam ſuperficiem, cuius centrum erit s, diameter f g. Ad diametrum f g ſemicirculi f e g excitetur perpendicularis ſe ex centro s ad peripheriam educta, ſitque e a dupla rectæ ſ e: ponatur f a g parabola cuius axis a s, baſis f g. Ex rectâ f g vtrinque productâ in infinitum abſcindatur quælibet recta d p, quæ vel tota ſit inter puncta f, g vel ſaltem aliqua ipſius pars; & y eius biſectio non congruat puncto s. Per d, p ducantur d c, p b parallelæ axi ſ a occurrentes limbo parabolico in c, & b: iungatur recta c b occurrens rectæ f g in r: rectangulo contento ſub rectis ſ e, d c fiat æquale rectangulum contentum ſub rectis d r, r q: deſcribatur parabola r t u cuius axis r d, latus rectum r q. Intelligatur cylindrus cuius baſis ſit circulus centro y, ſemidiametro y p vel y h deſcriptus, axis verò ſit y x: parabola u t r d intelligatur circa axem manentem d r volui, quouſque planum u d r ſtet rectum ad baſim cylindri; ad poſitionem plani x y h intelligatur parabola u t r d, vel eius portio u t p d transferri in ſuperficiem cylindricam iuxta methodum traditam in decima quinta propoſitione.

Ostendendum est parabolam ita translatam esse portionem superficiei cylindricæ inclusam hemisphærio quod supra basim cylindri abscindit circulus centri s semidiametri s e : ac proinde duplum illius parabolæ ita translatæ esse totam portionem superficiei : cylindricæ comprehensæ intra sphæram centro s, semidiametro s f descriptam.

Recta c d producta occurrat peripheriæ f e g in z : ergo per tertiam tertij tetragonismicorum erunt tres rectæ s e, z d, d c proportionales, & rectangulo e s, d c erit æquale quadratum ordinatim applicatæ d z ad f g diametrum semicirculi f z g generantis sphæricam superficiem; idemq; ostenditur in quacunque alia ordinatim applicata p n. Cùm ergo rectangulo contento sub rectis e s, d c æquale sit rectangulum d r q siue quadratum d u, erunt d u, d z æquales : simili prorsus pacto ostendentur p t, p n æquales. Igitur rectæ p t, d u non transferentur, sed manentes in plano u r d erecto ad basim cylindri occurrent in t & u superficiei cylindricæ & sphæricæ simul.

Rursus in recta d p sumatur quodcunque aliud punctum y, & per illud ducta sit y h ordinatim applicata ad d p diametrum circuli d h p, quæ occurrat peripheriæ f e g in m, rectæ c r in i, curuis u t r, f a g in o & l. Igitur per superiorem rectangulo contento sub rectis s e, i l æquale est quadratum y h : Præterea rectangulo contento sub rectis s e, y i æquale esse quadratum y o patet, quia quadratum d u ad quadratum y o est vt recta d r ad y r, cùm sint æqualia rectangulis d r q, y r q : sed rectangulum altitudinis e s baseos d c est est ad rectangulum eiusdem altitudinis, baseos y i vt recta d c ad y i, hoc est in triangulo c d r vt recta d r ad y r; ergo vt quadratum d u ad y o, ita est rectangulum altitudinis s e baseos d c, ad rectangulum eiusdem altitudinis, baseos y i : ergo cùm illud rectangulum sit æquale quadrato d u, rectangulum altitudinis s e, baseos y i erit æquale quadrato y o. Duo igitur quadrata y o, y h æquant duo rectangula altitudinis s e, basium i l, i y, vel æquant rectangulum altitudinis s e, baseos y l : sed rectangulo isti æquale est per tertiam tertij tetragonismicorum quadratum y m; ergo quadrato y m æqualia sunt duo simul quadrata y h, y o : ergo cùm manente c d r plano recto ad basim cylindri, rectæ o y, y h constituant angulum rectum, & perpendicularis o y transferatur ex puncto y in punctum h; circulus interuallo rectæ m y descriptus, motu semicirculi describentis peripheriam sphæricam, transibit per punctum o translatum : ac proinde punctum o translatum erit in peripheriâ cylindri & simul in peripheriâ sphæricâ, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

Parabolam cuius vertex congruat termino diametri circularis, & quæ ex superioris methodo sit translata, quadrare & expandere.

Reuocetur ſchema decimæ quintæ, (*Fig.* 14.) & in eo datus ſit ſemicirculus d e a centro g, ſemidiametro g n vel g d deſcriptus, quem tangat recta d H ſiue ſit æqualis rectæ d a, ſiue inæqualis, & completo parallelogrammo H d a u intelligatur in eo parabola H m a cuius axis H u, ordinatim applicata u a. Ponatur curuæ a e d æqualis recta a h, & deſcribatur cuneus expanſus h o c a reſpondens quadranti circuli a d b c centro a deſcripti; ex a ç auferatur a M æqualis rectæ a u & deſcribatur cuneus proportionalis expanſus cuius dimetiens f N ad f o ſit vt recta a M ad a c, vel vt recta H d ad d a. Dico figuram h N M a eſſe æqualem parabolæ tranſlatæ in peripheriam d e a, & eſſe ad quadratum a c vel a d, vt eſt recta d H ad d a. Quod ſi non ſumatur tota, ſed eius pars f N M a, aio illam eſſe ad partem f a c o vt eſt recta d H ad d a; partis verò f a c o quadratura abſoluta conſtat per nonam & vndecimam.

Si H d, d a ſint æquales, ex decima quinta propoſitione parabola tranſlata expanditur in figuram h o c a; ſi autem H d, d a ſint inæquales, patet figurarum h N M a, h o c a dimetientes parallelas rectæ a c eſſe inter ſe vt rectas H d, d a, vel vt rectas a M, a c: ac proinde ex ſexta primi tetragoniſmicorum figuram h N M a eſſe condicta ratione ad figuram h o c a, vt eſt recta a M ad a c.

Vt autem portionem f o i c a reſpondentem portioni parabolæ tranſlatæ in arcum a n e inueniamus, hac methodo vtemur. Completo ſemicirculo d b c x l, ex a c auferatur recta a r æqualis rectæ d e; per r agatur recta r x parallela rectæ a h occurrens peripheriæ l x c in x, & limbo h i c in o; per x agatur x p complens parallegrammum a r x p; compleatur quoque parallelogrammum a r o f. Ex methodo nonæ patet figuræ f o i c a æquale eſſe rectangulum l a p, ex prima verò eiuſque corollario liquet rectas f o, d e eſſe æquales, & arcui a n e rectam a f eſſe æqualem. Habemus igitur portionem parabolæ tranſlatæ inſiſtentem arcui a n e eſſe æqualem rectangulo l a p; portionem verò reliquam inſiſtentem arcui d e eſſe æqualem rectangulo a l p. Ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Quando recta g d bifariam ſecatur in z, cùm tres rectæ z d, d e, d a ſint proportionales, patet rectam d e vel a r eſſe æqualem rectæ d g, ac proinde eſſe dimidium rectæ a c vel a d. Ergo in iſto caſu recta a p ad a l eſt poteſtate vt ternarius ad quaternarium; portio verò parabolæ H m a u tranſlatæ in arcum d e, ſi H d, d a ſint æquales æquat rectangulum a l p; ſi verò ſint inæquales, ſe habet ad rectangulum a l p, vt recta H d ad d a. Atque ex calculo huius caſûs manifeſta eſt methodus calculi reliquorum omnium.

PROPOSITIO XXI.

SIt (*Fig.* 18.) vt in decima nona f e g ſemicirculus cuius motu circa diametrum manentem f g generetur ſphærica ſuperficies

habens centrum s, diametrum f g, ac proinde circulum maiorem fe g qui diuidat ſphæram in duo hemiſphæria, ſuperius ad partes puncti x quòd extat plano f e g, & inferius oppoſitum. In diametro f g ſumatur recta g d minor rectâ g f, bifariámque ſecetur in y; centro y per d, g deſcribatur circulus d h g i qui fiat baſis cylindri cuius axis y x ſit perpendicularis ad planum circuli (de iſto enim cylindro loquimur quoties aliud non indicamus, vt monuimus intio præſentis libri.) Per d ducta ſit d z ordinatim applicata ad f g diametrum ſemicirculi f e g.

Oſtendendum eſt portionem ſuperficiei cylindricæ incluſam ſuperficie illa ſphærica eſſe æqualem quadruplo rectanguli g d z.

Deſcribatur vt in decima nona parabola g u d, & parabola f a p, cuius limbo recta z d occurrat in c: ergo vt ibi oſtendimus d u ordinatim applicata parabolæ u p d transferendæ erit æqualis rectæ d z: igitur per ſuperiorem parabola tranſlata ſiue portio cylindricæ ſuperficiei arcui d h g inſiſtens & comprehenſa hemiſphærio ſuperiore eſt ad quadratum d g ſicut recta d g vel p d ad rectam d u vel d z: ergo æquat rectangulum g d z: ergo duæ portiones inſiſtentes arcubus d h g, d i p æquant bis rectangulum g d z: ergo cùm totidem inſiſtant iiſdem arcubus ad partes hemiſphærij inferioris: quater rectangulum p d z erit æquale ſuperficiei cylindricæ incluſæ ſuperficie ſphæricâ, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM

Ex ſuperioris demonſtratione nota fit quadratura cuiuſlibet portionis ex iſta ſuperficie cylindrica intra ſphæram contentâ abſciſſæ per planum h y x, vel per aliud quodcunque illi parallelum. Porrò ex definitionibus initio libri præſentis præfixis patet iſtam portionem cylindricam ſphærâ concluſam, quando punctum y congruit puncto s, eſſe cyclocylindricam primariam; quando autem non congruit, cyclocylindricam ſecundi nominis. Vnde inſuper liquet præſentem propoſitionem eſſe longè ampliorem decimâ, ibi enim quadratura ſolius cyclocylindricæ primariæ tradita eſt, hîc & illius primariæ primi nominis, & primarię etiam ſecundi nominis, quoties recta g d minor eſt rectâ g f: nam ſi fuerit non minor, cylindrica ſuperficies non ſecat ſphæram. Pes porrò circini qui figitur intelligi debet collocatus in puncto s, vt deſcribatur cyclocylindrica primaria primi & ſecundi nominis definita initio libri, & congruens portioni cylindricæ clauſæ intra ſphæram ſemidiametri s p. Iſta autem quadratura ita amplè ſumpta non dubito quin nouitate ſua plurimos teneat ſuſpenſos, & quin comparantes quadraturam circuli vnà cum quadratura iſtius quaſi-circuli dubitaturi primo aſpectu ſint vtra difficilior exiſtat: vtraque enim figura eſt portio ſuperficiei cuiuſdã intra ſphæram incluſa; circulus quidem ſuperficiei planæ, altera verò ſuperficiei cylindricæ & minùs

minùs tractabilis. Cæterùm licet postquam res est monstrata, non videatur multò difficilior quadratura cyclocylindricæ primariæ secundi nominis, quàm primi; fuit tamen mihi longè abstrusior, quousque ad hanc methodum omnia oculis lustrando perductus fui. Neque vnquam mihi proposita ab vllo fuit alia cyclocylindrica præter eam qua pes circini collocatur in ipsa superficie cylindrica, non autem extra illam, vt fit in cyclocylindricis secundi nominis.

PROPOSITIO XXII.

Iisdem manentibus cylindrus genitus circumductu rectanguli cuius latus circumactum æquet rectam s e, est ad solidum genitum ex cyclocylindricæ, de qua superior propositio agit, circumuolutione circa basim suam, vt est recta s e ad dimidium rectæ d c.

Ista propositio demonstratur eadem prorsus methodo, qua vsi sumus in demonstranda decima quarta superiore. Quando enim punctum d puncto s congruit, & recta d c congruit rectæ s a, fit casus illius decimæ quartæ; ac proinde cylindrus est duplus solidi, quia parallelogrammum quo circumacto gignitur cylindrus est duplum spatij æquantis figuram sinuum versorum, in quam expanditur triangulum c g d, vt in corollario decimæ quintæ monuimus. Atque in aliis casibus pro figura ex sinibus versis vsurpatur alia illi proportionalis cuius dimetientes quæ ad rectam s a parallelæ sint, se habent ad dimetientes figuræ sinuum versorum, sicut se habet recta c d ad d g, vel sicut quadratum d z ad d g. Ergo (sicuti in vigesimæ propositionis pari causa ostendimus) proportionalis ista figura ad figuram ex sinibus versis constantem se habet ad positionem rectæ a s, vt recta c d ad d g: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Si non sumatur totus cylindrus sed pars eius cum parte solidi intra easdem ad rectam s a parallelas positi, eorum proportio inuenietur adhibita methodo corollarij illius decimæ quartæ. Quando autem totus sumitur, si d g sit quadrans rectæ g f, cylindrus ad solidum est vt octonarius ad ternarium: si verò d g sit dodrans eiusdem g f, cylindrus ad solidum est vt octonarius ad ternarium, & ita de aliis. Hinc verò patet propositionem istam patêre latiùs decimâ quartâ.

PROPOSITIO XXIII.

In quibuscunque (*Fig.* 19.) cyclocylindricis secundariis tam primi quàm secundi nominis inuenire proportionem cylindri & solidi de quibus agitur in pari causâ superioris propositionis pro cyclocylindricis primariis vtriusque nominis.

Maneat vt in decima nona f e g semicirculus genitor sphęrę circa axem f g, & parabola f c g, cuius axis s a æquet rectam f s, vel s e: d p sit diameter circuli d h p, qui fiat basis cylindri, cuius axis y x perpendicula-

ris ad planum baſeos. Per e ducatur e t parallela rectæ f g, & completis parallelogrammis ſ e t p, d n t p; ponatur t i recta æqualis peripheriæ p h d, & ſuper t i intelligatur constructa figura i l m t proportionalis ſinuum verſorum, cuius dimetiens ad dimentientem figuræ ſinuum verſorum ſit vt recta c d ad d r. Per p agatur p u complens parallelogrammum b c u p; recta c u producta occurrat limbo l m t in m. Quando punctum g cadit inter d & r, vt in primo ſchemate, addatur rectæ m n recta n q æqualis rectæ c u vel b p; quando autem r cadit inter d & p dematur rectæ m n recta n q; per q agatur q o parallela rectæ e t vel ſ g. Dico portionem figuræ proportionalis i l m t inſiſtentem rectæ q o ad partes l, habere proprietatem quæ demonſtratur in decimâ tertiâ, hoc eſt eſſe tertium gradum quorum primus ad poſitionem rectæ ſ e ſit lateris ſ e parallelogrammum quo circumacto generatur cylindrus, ſecundus ſit figura cyclocylindrica inſiſtens rectæ t i, cuius circumductu generatur ſolidum quod cylindro comparatur: eorum verò graduum dimetientes ſint ad poſitionem rectæ ſ e proportionales. Igitur per demonſtrata in corollario ſecundo decimæ tertiæ propoſitionis, & per methodum decimæ quartæ, cylindri quælibet portio intercepta planis ad baſim ipſius parallelis eſt ad ſolidum iiſdem planis contentum, vt parallelogrammi portio iacens inter eadem plana parallela ſe habet ad portionem figuræ ſuper recta q o conſiſtentis, cuius dimetiens eſt q m. Reliqua patent ex ſuprà monſtratis: ergo &c. quod erat faciendum.

PROPOSITIO XXIV.

IN ſecunda figura ſuperioris propoſitionis punctum d, congruat puncto s (*Fig.* 20.) & ducta b z ordinatim applicatâ ad axem a s parabolæ f a g, ſint a s, s z æquales.

Oſtendendum eſt cylindrum de quo agitur in ſuperiore propoſitione, nempe cuius baſis ſit circulus diametri a e ad totum ſolidum genitum circumductu figuræ totius cyclocylindricæ ſecundariæ eſſe in præſenti caſu, vt eſt circulus ad quadratum quod poteſt latus quadrati circulo inſcripti ad ipſum circulum.

Quoniam recta a z ad a s eſt vt binarius ad vnitatem; erit ſ g ad z b poteſtate vt eſt vnitas ad binarium: rectæ autem r p, r s erunt inter ſe æquales, ac proinde recta ſ p ad ſ r erit poteſtate vt quaternarius ad vnitatem, ſed eadem ſ p vel z b ad ſ g eſt poteſtate vt quaternarius ad binarium, ergo recta ſ g ad ſ r eſt poteſtate vt binarius ad vnitatem: ergo recta e q æquat rectam p b vel d a. Rurſus quoniam figuræ proportionalis ſinuum axis i l ad ſ p eſt ſicut recta a s ad ſ r, recta i x dimidium rectæ i l erit æqualis rectæ ſ a: ſed eidem eſt æqualis recta e q: ergo recta o q producta conuenit in punctum x. Igitur ex generatione figuræ ſinuum verſorum proportionalis, recta x q o aufert ex ipsâ proportionali

figuram x l m o quę ad quadratum ſemidiametri r p vel r s eſt vt recta i a ad ſ r, vel vt diameter quadrati ad latus; ergo figura x l m o æqualis eſt rectangulo r ſ a.

Rurſus quoniam rectangulum ſub ſ r ſemidiametro circuli d h p, & ſub t i rectâ æquante arcum ſ h p eſt æquale circulo diametri ſ p, vt ex tertia primi liquet, recta verò i t bifariam ſecatur in u vt ex generatione figuræ ſinuum verſorum patet, rectangulum contentum ſub ſemidiametro ſ r vel ſ y & ſub recta i u erit æquale ſemicirculo diametri d p: ergo rectangulum i u A contentum ſub ſ a vel u A & ſub i u erit ad ſemicirculum d h p vt recta a s ad ſ r, vel vt rectangulum a ſ r ad quadratum ſ r. Quoniam igitur vt rectangulum a ſ r ad quadratum ſ r, ita eſt rectangulum i u A ad ſemicirculum ſ h p, erit alternando vt rectangulum a ſ r ad rectangulum i u A, ita quadratum ſ r ad ſemicirculum: ſed rectangulum a ſ r eſt æquale figuræ x q o m l: ergo figura x q o m l ad rectangulum i u A, hoc eſt ſolidum ad cylindrum eſt vt quadratum ſ r ad ſemicirculum, vel vt quadratum quod poteſt latus quadrati circulo inſcripti ad ipſum circulum, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Tres rectas ſ r, ſ g, ſ p eſſe proportionales quamcunque porportionem habeat recta a s ad a z, & ſiue z cadat intra puncta a, s, ſiue extra, patet ex demonſtrandi methodo: nam vt recta a s ad a z, ita eſt poteſtate ordinatim applicata ſ g ad z b: ſed vt a s ad a z, ita eſt ſ r ad z b, vel ad ſ p: ergo vt ſ r recta ad ſ p, ita eſt poteſtate ſ g ad eandem ſ p æqualem rectæ z b: igitur tres rectæ ſ r, ſ g, ſ p ſunt proportionales.

COROLLARIVM II.

Ex methodo præſentis casûs poterit facili negotio fieri progreſſus ad quoſcunque alios, quamuis puncta d, & s diſcrepent: ac proinde iſti methodo ſatis ſit vnus iſte calculus. Ex demonſtratis autem circa cyclocylindricam manifeſtum eſt faciliùs eſſe quadrare ſolidum genitum ex quacunque cuiuſcunque nominis cyclocylindrica, quàm illam quadrare: ſolidi enim quadraturã datâ circuli quadraturâ demonſtrauimus pro omni caſu cuiuſlibet nominis cyclocylindricæ: cùm tamen quadraturam cyclocylindricarum vtriuſque nominis primariarum tantummodo dederimus, prætermiſſa quadraturâ ſecundariarum. Hoc tamen habemus quadraturam cyclocylindricarum datam non pendere à quadratura circuli; cùm illa ſolidorum inde pendeat.

PROPOSITIO XXV.

Reuocato ſchemate (*Fig.* 17.) propoſitionis decimæ nonæ, circulus ſphæræ genitor motu circa axem f g eſto f e g, & baſis cylindri d h p: ſemidiametri eius dimidium y E ita ſecetur in V vt tres rectæ p r, V E, V y ſint proportionales: ex recta y p abſcindatur y λ

dupla rectæ y V, per λ ducantur λ D, λ H ordinatim applicatæ ad d p diametrum circuli d h p, & ad r λ axem parabolæ r t u.

Ostendendum est parabolam u t r d translatam lege præscripta in superficiem cylindricam baseos d h p ita respondere illi figuræ quæ in eadem superficie d h p intelligitur gigni ex rectis à puncto λ eductis ad singula peripheriæ d h p puncta, & postea erectis perpendiculariter ad basim, vt sicut est recta λ D a d rectam λ H, ita sint singulæ dimetientes parabolæ translatæ ad singulas istius figuræ insistentes eidem peripheriæ puncto.

Ex constructione patet trium rectarum proportionalium quarum prima V y, secunda V E, tertia sit p r, rectam y λ continere bis primam; rectam y p vel y h bis primam & bis secundam; ergo y r composita ex y p & ex p r tertiâ continebit bis primam, bis secundam & semel tertiam: ergo ablatâ y λ bis prima, residua y λ vel illi æqualis r B contineat necesse est, vt attendenti patet statim, bis secundam semel tertiam: ergo duæ simul y r, r B vel tota y B continent bis primam, quater secundam, & bis tertiam. Igitur y λ æquat bis primam, y p verò bis primam & bis secundam, y B denique bis primam, quater secundam & semel tertiam; vel si bis prima sumatur pro primo termino, recta y λ est primus terminus; recta y p primus & secundus; recta y B primus, secundi duplus, & tertius: ergo vt ex decursu propositionis septimæ libri tertij tetragonismicorum liquet, tres rectæ y λ, y p, y B sunt proportionales.

Quoniam igitur tres rectæ y λ, y p, y B sunt proportionales, & rectæ λB dimidium r occupat vertex parabolæ r t u, ex trecentesima prima propositione libri quinti Gregorij à S. Vincentio constat vt est ordinatim applicata λ D ad λ H, ita rectam à puncto λ eductam & ad quoduis circuli d h p punctum terminatam esse ad parabolæ r t u ordinatim applicatam axi r i per idem peripheriæ punctum ductam, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quando punctum r siue vertex parabolæ r t u congruit puncto p, ex trecentesima propositione libri quinti Gregorij à S. Vincentio, & ex hactenus demonstratis à nobis satis constat proprietatem iam explicatam competere huic casui. Quando autem punctum r caderet inter y & p, eiusmodi proprietas cessare conuincitur ex vi demonstratorum. Quoties autem D λ, λ H fuerint æquales, parabola r u d translata erit vt patet, ipsa figura descripta in superficie cylindri baseos d h p, cuius dimetientes æquant rectas ex puncto λ eductas ad perimetrum d h p.

PROPOSITIO XXVI.

Esto semicirculus f h d g (*Fig.* 21.) in cuius diametro f g sumpta sint duo puncta a, b æqualiter remota à centro y; per b, a eductæ sint ordinatim applicatæ a c, b d; & per c, d tangentes c e, d F;

per centrum y educta sit ordinatim applicata y h: eductæ etiam sint rectæ a h, b h ex punctis a, b ad h.

Ostendendum est sumpto quouis puncto m in peripheria circuli & eductis rectis a m, b m, duo quadrata a m, b m simul esse æqualia duplo quadrati a h. Et si ex puncto m excitetur m s perpendicularis ad planum circuli æqualis rectæ m b, figuram in superficie cylindri cuius basis sit f c d g comprehensam curuâ f c d g & lineâ descriptâ à punctis s, esse cyclocylindricam secundariam descriptam à circino cuius vnus pes hæreat in puncto a, interuallum autem inter extrema crurum puncta æquet rectam h r cuius quadratum sit duplum quadrati h a.

Rectæ a e, b F bifariam secentur in l, t, & describantur parabolæ l c, t d quarum vertices l, t, ordinatim applicatæ a e, b d; ex puncto m demittatur perpendicularis m u ad f h rectam. Patet duas istas parabolas esse easdem, & habere idem latus rectum; patet quoque ex superiore, rectam m b esse æqualem ordinatim applicatæ ad parabolæ t diametrum t b per punctum u ductæ; similiterque rectam a m æqualem esse ordinatim applicatę per u punctū actę ad axem parabolæ l c. Esto l q latus rectum parabolæ; igitur rectangulum q l u est æquale quadrato ordinatim applicatę vnius, & rectangulum sub q l & sub t u comprehensum est æquale quadrato ordinatim applicatæ alterius: ergo duo quadrata simul ordinatim applicatarum per u ductarum sunt æqualia rectangulo q l t quocunque cadat punctum u: ergo quando punctum u congruit puncto y, cùm a h, b h sint æquales, & duo quadrata a h, b h sint simul æqualia rectangulo q l t, patet duo quadrata ordinatim applicatarum ad parabolarum communem axem, vel duarum rectarum a m, m b vel m s esse æqualia quadrato h r: ergo recta a s est æqualis rectæ h r; ergo punctum s est in superficie sphæræ ex centro a descriptæ, cuius semidiameter æquet rectam h r, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Puncta a & b repræsentantur in schemate præsentis propositionis intra diametri f g terminos f, g: sed eadem est demonstrandi ratio si collocentur extra illos terminos, vt in e & F; ostendit enim Gregorius à S. Vincentio in propositione 303. de parabola, rectas ex punctis e, F eductas ad peripheriæ f h d g quodlibet punctum m esse æquales ordinatim applicatis certæ cuiusdam parabolæ. Hinc verò præterea conficitur præsentis propositionis methodo ampliorem euadere demonstrationem quam Gregorius à S. Vincentio fecit vltimam libri sui tertij. Hinc denique patet istam proprietatem non conuenire solis punctis f, g extremis diametri f g, quod tantum in Elementis Euclidis demonstratur.

COROLLARIVM II.

Figuram cuius dimetientes m s æquales ſint rectis b m ex puncto vno b eductis eſſe æqualem ſuperficiei cylindri ſcaleni demonſtrauit Dettonuillæus in epiſtola data ad D. de Hugguens, vnde factum eſt vt ex demonſtratione perlecta iſtud nos lucrum perceperimus pro pręſenti & ſuperiore propoſitione, nimirum ſuperficiem cyclocylindricæ ſecundariæ, cuius dimetientes m s ſunt æquales rectis m b, eſſe certa quadam ratione æqualem ſuperficiei cylindri ſcaleni; ac proinde data huius ſcalenæ ſuperficiei quadratura, inuentum eſſe à nobis tetragoniſmum cyclocylindricarum ſecundariarum de quibus agunt duæ huius libri poſtremæ propoſitiones. Iſtud verò lucrum cùm non contemnendum eſſe duxerimus, adjiciendum quoque putauimus ſub finem huius libri.





DE CYCLOIDE
LIBER TERTIVS.

In quo octo problemata ab Anonymo propoſita demomſtrantur in cycloide paruâ.

DEFINITIONES.

INtelligatur progreſſio geometrica cuius primus terminus ſit quadratum ſemidiametri circularis, ſecundus ſit ipſe circulus, ac proinde cuius primum ſpatium ſit ad ſecundum vt eſt circuli diameter ad rectam æqualem toti peripheriæ ipſius; vel vt eſt circuli ſemidiameter ad rectam æqualem ſemiperipheriæ ipſius; vel vt eſt ſemidiameter circuli genitoris ad ſemibaſim cycloideos paruæ. Iſta progreſſio vocetur *perſpecta*, cuius hæc eſt proprietas vt ſi intelligatur altera progreſſio rectarum quæ *adiuncta* dicatur, & cuius primus terminus ſit ſemidiameter circuli genitoris, ſecundus ſit ſemibaſis cycloideos paruæ, rectangulum ſub primo & ſub ſecundo termino huius progreſſionis ſit æquale ſecundo termino primæ progreſſionis, itemque rectangulum ſub primo & tertio ſecundæ progreſſionis ſit æquale tertio, & ſic de aliis, ita vt rectangulum ſub primo & ſub quouis alio termino ſecundæ progreſſionis æquet terminum primæ numero pari procedentem à primo. Primæ enim progreſſionis termini ſunt vt termini ſecundæ; ſed rectangula quorum altitudo ſit primus, baſes ſint alij termini conſequentes ſe habent vt baſes; ergo ſe habent vt termini primæ; ergo cum rectangulum ſub primo & ſub ipſo primo comprehenſum ſit primus terminus primæ, patet rectangula conſequentia eſſe æqualia terminis primæ conſequentibus, ſingula ſingulis. Inde inſuper patet tertio termino primæ progreſſionis æquale eſſe quadratum ſecundi termini ſecun-

dæ, & quinto primæ quadratum tertij ſecundæ, & ſeptimo primæ quadratum quarti ſecundæ, & ſic deinceps. Progreſſio *ſubperſpecta* vocetur illa cuius primus terminus eſt quadratum ſemidiametri circuli, ſecundus verò eſt ſpatium quod ad quadratum ſemidiametri, ſit vt ipſum quadratum ad circulum: *ſubadiuncta* verò progreſſio ea vocetur quæ rectis conſtat in eadem ratione ſpatiorum procedentibus, eiuſque primus terminus eſt ſemidiameter circuli eiuſdem.

PROPOSITIO PRIMA.

ESto (*Fig.* 22.) ſemicuneus primus expanſus c z b g reſpondens circulo genitori diametro c f deſcripti, ita vt recta b g æquet quartam partem totius peripheriæ circularis; completo rectangulo b g f n ponatur b m f n alter ſemicuneus primus expanſus reſpondens circulo genitori ſemidiametro n b, centro n deſcripti. Intelligatur ſolidum b g a c comprehenſum planis b g c, a g c ſecantibus ſe in recta g c, & ad ſe inuicem rectis, & ſuperficies curua, cuius hæc ſit proprietas vt quæcunque z d ordinatim applicata ad axem c g ducatur, ſi ex puncto d excitata fuerit perpendicularis d e occurrens ſuperficiei in e, & iungatur recta z e, ipſa z e ſit in ſuperficie, & angulus e z d ſit ſemirectus. Ex recta g a perpendiculari ad planum b g c abſciſſa ſit g u æqualis rectæ g c.

Oſtendendum eſt ſolidum iſtud ad poſitionem plani a g c eſſe condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis g u, baſeos b m f g i.

Ducta ſit quælibet i p ordinatim applicata ad baſim b g, per i ducta ſit i s parallela rectæ g a occurrens ſuperficiei curuæ ſolidi in s; iungatur recta b s, quæ ex conſtructione erit in ſuperficie ſolidi, & angulus ſ b i erit ſemirectus, ac proinde rectæ b i, i s erunt æquales. Planum ſ i p ſecet ſuperficiem curuam ſolidi ſecundum lineam ſ t p; quæcunque z d ordinatim applicata ad axem ducatur occurrens rectæ i p in o; ſi per o ducatur o t parallela rectæ i s occurrens lineæ p t s in t, recta z t erit in eadem ſuperficie ex conſtructione, & o t erit æqualis rectæ z o; cùm anguli ad z, t trianguli z o t ſint æquales. Igitur figura p t ſ i ad poſitionem plani b g a eſt condicta ratione æqualis figuræ b z p i, cùm ambæ inſiſtant ſuper eadem baſi p i, & ordinatim ad illam applicatæ z o, o t ſint inter ſe æquales.

Præterea ex quarta ſuperioris libri conſtat ſinum rectum arcûs in circulo genitore æquantis rectam b i, æqualem eſſe rectæ p i; & ſinum verſum, rectæ i m; eſt enim b g f m complementũ ſubcontrarię ibidem definitum. Igitur per ſeptuageſimã quintam libri noni quadraturæ Gregorij à S. Vincentio vt i l recta vel g f ſemidiameter circuli genitoris eſt ad m i ſinum verſum arcûs æquantis rectam b i, ita eſt cunei vel vngulæ expanſæ

portio

portio i s t p hoc eſt b z p i ad b z c g: ſed figuræ b z c g eſt per nonam ſuperioris æquale quadratum g c vel g f vel i l: ergo vt i l recta ad m i rectam, ita quadratum l i ad ſolidi ſectionem i s t p: ſed vt l i recta ad m i ita etiam eſt idem l i quadratum ad rectangulum l i m: ergo ſectio i s t p eſt æqualis rectangulo l i m, hoc eſt ſectioni cylindracei altitudinis g u vel l i, baſeos b g f m; ergo iſtud cylindraceum & illud ſolidum ſunt condicta ratione æqualia ad poſitionem plani a g c, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Hinc patet ſi compleatur quadratum e d z q & iungatur diameter d q, cùm triangulo z d e, quod eſt quadrati z d e q dimidium, æquale ſit triangulum q d z quod etiam eſt dimidium eiuſdem quadrati, notum eſſe cuneatum ſolidum cuius ſectio ſit triangulum q d z, baſis ſit c z b g, vel quæuis eius portio p z b i abſciſſa per rectam p i parallelam axi c g. Igitur ſi libræ b g brachium g x ponatur æquale rectæ g f vel g u, & libra ſuſpendatur ex g perpendiculo c g, æquiponderans figuræ b z c g erit per vigeſimam primam quarti tetragoniſmicorum æquale figuræ b m f g i, quæ per nonæ ſuperioris libri methodum eſt æqualis dimidio circuli genitoris deducto quadrato g u vel g c. Item ſi ſuſpendatur ex i, brachio i r æquante eandem g u vel g c, perpendiculo i p, æquiponderans figuræ b z p i eſſe æquale ſpatio b i m, quod per methodum nonæ illius reducitur ad ſpatium mixtum ex circuli genitoris parte & ex rectilineo noto.

COROLLARIVM II.

Si in curuâ b z c ſumatur quoduis punctum z, & per z ducatur z d ordinatim applicata ad axem g c, propoſitumque ſit brachio g x perpendiculo g c inuenire æquiponderans portioni z p c d, res facilè obtinetur. Nam toti y z c g æquiponderat y A m f g ſpatium mixtum ex methodo illius nonæ: præterea parallelogrammo z y g d æquiponderat dimidium rectanguli d g C, ponendo tres rectas x g, g y, g C eſſe proportionales: ergo cùm recta g y ſit data, & recta g x ſit nota, notum quoque erit rectangulum d g C, eiuſque dimidium: igitur dempto hoc æquiponderante de ſpatio y A m f g pariter noto (hîc notum appello quod ad rectilineum dato tetragoniſmo circuli reducitur) relinquetur notum æquiponderans figuræ z p c d datæ. Hinc patet notum quoque eſſe æquiponderans figuræ d z b g datæ, cùm notum ſit toti c z b g, & parti c z d.

COROLLARIVM III.

Quoniam, z e & aliæ omnes rectæ quæ ſunt ſectiones communes ſuperficiei iſtius curuæ & planorum ad planum a g b parallelorum, æquidiſtant rectæ b a, patet iſtam ſuperficiem eſſe cylindraceam deſcriptam motu rectæ lineæ quæ ſit, ad rectam b a parallela, & quæ incedat per limbum b z c.

PROPOSITIO II.

SIt (*Fig. 23.*) totus ſemicuneus expanſus c z b s a f reſpondens circulo genitori diametri c f, cuius pars ſuperior ſit ſemicuneus primus b z c g, reliqua autem pars ſit inferior b s a f g. In arcu b s a ſumptum ſit quodcunque punctum s, & per s ducta s t æquidiſtans rectæ a f, ſiue s congruat puncto a, ſiue ab eo diſcrepet; per s ducta ſit ordinatim applicata s t ad axem c f: ex recta s t abſcindatur t x æqualis rectæ g c.

Oſtendendum eſt librâ s x ſuſpensâ ex t perpendiculo t c, brachio t x, æquiponderans figuræ t s b z c eſſe notum rectilineum, dato tetragoniſmo circuli, vt in corollario ſecundo ſuperioris vocem iſtam vſurpauimus.

Compleatur parallelogrammum f a q g, & recta s t occurrat rectæ q a in r: ex recta g c abſcindatur g y æqualis rectæ g t, & per y ducatur ordinatim applicata z y ad axem c f. Per corollarium octauæ libri ſuperioris recta r s erit æqualis rectæ z y, & figura r s b q erit æqualis & ſimilis figuræ b g y z. Si ergo ex recta t r abſcindatur r d æqualis brachio t x; brachio verò t x perpendiculo t c inueniatur per ſuperiorem ſpatium A æquiponderans figuræ g b z y: libra d t ſuſpensâ ex r perpendiculo r q, brachio d r æquiponderans figuræ r s b q vt iacet manenti erit A. Vt eſt recta d r ad r t rectã, ita fiat figura r q b s per nonam ſuperioris nota ad B: ergo per methodum nonæ ſecundi libri tetragoniſmici paulo ampliatam, ſi perpendiculum r q mutetur in t c, & brachium d r in t x æquiponderans figuræ r q b s vt iacet manenti erit B ſpatium imminutum ſpatio A. Rurſus vt eſt t x ad t r vel ad f a, ita fiat ipſa f a ad f e, cuius biſectio ſit h: ergo per principia libræ vulgaria parallelogrammo q r t g, brachio manente t x æquiponderat rectangulum notum C contentum ſub rectis t g, f h: ſed figuræ q r s b æquiponderat ſpatium B imminutum ſpatio A: ergo reſiduæ g b s t æquiponderat rectangulum C auctum ſpatio noto A, & imminutum ſpatio noto B: ergo cùm figuræ b z c g æquiponderet per ſuperiorem rectilineum notum, patet duabus ſimul figuris ſ b g t, b z c g, hoc eſt toti figuræ ſ b z c t æquiponderare rectilineum notum, poſito tetragoniſmo circuli, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Duo ſuperioris propoſitionis corollaria huc transferuntur nullo negotio, vt patet.

COROLLARIVM II.

Quoniam ex ſuperioris corollario primo æquiponderans parti ſuperiori c z b g eſt æquale ſemicirculo genitori dempto quadrato g c, ſpatium A erit ſemicirculus genitor imminutus quadrato g c: ergo æquiponderans toti c b a f eſt rectangulum C contentum ſub recta f h & ſub

t g vel f g (nam in hoc casu t & f sunt idem punctū) auctum circulo genitore & imminutum duplo quadrati g c, & spatio B quod ad quadratum g c sic vt recta f a ad g c; hoc est vt circulus genitor ad quadratum ipsius semidiametri: nam rectangulum g f a æquat circulum genitorem, & vt g f ad f a, ita quadratum g f ad g f a. Igitur circulus genitor & B sese elidunt, & restat purgatum æquiponderans toti c b a f rectangulum g f h vel semiquadratum f a imminutum duplo quadrati g c.

PROPOSITIO III.

Isdem manentibus datum sit semisegmentum c z y ita vt z sumatur ad libitum, propositumque sit inuenire eius centrum grauitatis.

Ex c f abscindatur y i æqualis rectæ g c vel t x, & ex z y abscindatur y l eidem æqualis. Ex primi libri decima sexta eiusque corollario inueniatur rectilineum D notum dato tetragonismo circuli, quod librâ i c suspensâ ex y perpendiculo y z æquiponderet figuræ c z y, brachio y i. Inueniatur per superiorem rectilineum E quod libra l z suspensâ ex y perpendiculo y c æquiponderet eidem c y z, brachio y l. Inueniatur per duodecimam eiusdem primi, vel per nonam superioris libri, rectilineum F pari modo notum, quod æquet figuram c z y. Vt est F ad D ita fiat i y recta ad y p, & vt est idem spatium F ad E, ita fiat l y recta ad y o, compleatur parallelogrammum o y p m. Dico punctum m esse centrum grauitatis in figura c z y.

Quoniam enim vt suspensum F ad æquiponderans D ita vicissim est brachium i y ad longitudinem y p, & per p acta est p m parallela perpendiculo y z, erit in recta y z centrum grauitatis figuræ c y z vt ex vulgaribus elementis libræ liquet. Simili pacto quoniam vt suspensum F ad æquiponderans E, ita vicissim est brachium y l ad longitudinem y o, & per o acta est o m parallela perpendiculo c y, centrum grauitatis figuræ c y z erit in recta p m: sed est in recta o m; ergo est in earum communi sectione m, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quod Anonymus proposuit in cycloide sua his verbis *quærimus dimensionem spatij c z y, eiusdemque centrum grauitatis*; liquet esse à nobis peractum in figura præsenti, quæ est ipsa cycloides circulo genitore imminuta. Dimensionem enim dedimus figuræ c z y posito tetragonismo circuli, eiusque centrum m grauitatis inuenimus, quod erat propositum: vide corollarium tertium septimæ propositionis sequentis.

PROPOSITIO IV.

Isdem manentibus intelligatur circa axem c f circumuolui figura c b a f.

Ostendendum est totum solidum hac circumuolutione genitum, vel quamuis eius partem abscissam plano ad planum u f a parallelo

esse æquale cylindraceo altitudinis f u quæ ad f g sit vt circulus ad quadratum suæ diametri, baseos æquantis octuplum æquiponderantis inuenti in propositione secunda.

Istud demonstratur eodem prorsus modo quo decima nona primi libri, nec aliud addi debet; ergo &c. quod erat demonstrandum. Hoc verò est vnum ex iis quæ Anonymus postulat in sua cycloide, dum ait *quærimus solida genita ex circumuolutione dicti spatij z c y, tam circa z y quàm circa c y.* Solida ergo ambo habemus, illud ex decima nona primi libri, istud ex præsenti.

COROLLARIVM I.

In corollario secundo superioris extat calculus pro duplici casu, primus est pro tota cycloide, secundus pro superiore parte b z c g: igitur octuplum illorum spatiorum est basis cylindracei propositi in præsenti propositione.

COROLLARIVM II.

Cylindraceum altitudinis f u baseos æquantis octies rectangulum h f c, vel g f e est æquale per methodum decimæ nonæ primi, cylindro genito ex reuolutione parallelogrammi a f c circa latus f c: octies autem rectangulum g f e est octies quadratum f a, cùm tres rectæ g f, f a, f e sint proportionales. Rursus cylindraceum altitudinis f u baseos æquantis octuplum spatij collecti in secundo secundæ corollario pro primo casu, habet ipsam basim mixtam ex octo rectangulis h f g vel ex quatuor e f g vel ex quatuor quadratis f a imminutis duplo quadrati f g. Cùm igitur cylindrus & conoides sint æqualia istis cylindraceis eiusdem altitudinis f u, & ipsa sint vt bases, cylindrus ad conoides erit vt octo quadrata f a ad quatuor quadrata f a imminuta duobus quadratis f g: hoc est vt quadratum f a ad dimidium eiusdem quadrati imminutum quadrante quadrati f g, vel decima sexta parte quadrati f c.

COROLLARIVM III.

Quoniam in superiore propositione inuenimus centrum grauitatis cuilibet portioni figuræ c b a f, ex methodo decimæ nonæ primi libri habemus solidum genitum ex circumuolutione eiusdem figuræ circa quamlibet rectam datam. Cumulatissimè igitur satisfecimus secundæ quæstioni Anonymi, *quærimus*, inquit, *solida genita ex circumuolutione dicti spatij c z y, tam circa z y, quàm circa c y*; cùm non tantum circa c y & z y, sed circa quãlibet iis parallelam; nec solùm ex reuolutione figuræ c z y, sed cuiusuis alterius, quamuis c y non sit portio axis.

PROPOSITIO V.

SVper rectam c g (*Fig.* 24.) incidat ad normam recta b g, & eidem rectæ c g ad positionem rectæ b g insistat figura c z b g in plano c g b iacens. Ad planum c g b ex puncto g excitetur perpendicularis g a cuiuslibet longitudinis, & ducatur recta b a; per limbum

b z c moueatur recta æquidistans rectæ b a describátque superficiem cylindraceam de qua agit corollarium tertium primæ. Ex b g recta auferatur quælibet g d, & libræ planæ a x e g c, perpendiculo plano a g c, sustentaculo d i parallelo ad rectam g c, solido superficiei cylindraceæ intercepto inter plana c g a, c g b æquiponderet spatium æquale magnitudini A: itelligatur aliud solidum cuius sectio z y e t parallela plano a g b existat parallelogrammum z y e simile parallelogrammo comprehenso sub rectis b g, g a.

Ostendendum est æquiponderans isti solido cuius sectio est z y e t, esse ad positionem plani a g b triplum spatij A.

Completo parallelogrammo d g y i, quoniam per y ductum est planum e y z parallelum plano a g b; erit triangulum e y z sectio solidi cylindracei, & latera z y, y e erunt vt latera b g, g a trianguli b g a. Recta z y ita secetur in f & h, vt y f sit triens & y h dimidium rectæ y z; per f, h ducantur f x, h u parallelæ ad rectam y e. Trianguli igitur z y e centrum grauitatis erit in recta f x per sextam Archimedeæ quadraturæ parabolæ. Similiter in recta h u erit centrum grauitatis parallelogrammi z y e t. Vt ergo recta i y ad rectã y f, ita est suspensum triangulũ e z y quod est dimidiũ parallelogrami z y e t, ad æquiponderans B aptatum puncto i, vt ex libræ planæ definitione patet exposita in vigesima octaua quarti tetragonismicorũ. Præterea vt i y brachium ad y h ita est suspensum parallelogrammũ t z y e ad æquiponderans C aptatum puncto i. Quoniã igitur vt recta y h ad y i ita est C ad t z y e vel ad duplum triãguli e z y, vt autem y i ad y f ita est t z y e vel duplum trianguli e z y ad duplum spatij B: ergo ex ęquo vt y h ad y f siue vt ternarius ad binariũ, ita C ad duplum spatij B: igitur vt ternarius ad vnitatem ita C æquiponderans sectioni parallelogrammæ t z y e ad B æquiponderans sectioni triangulari e z y: ergo per vigesimam octauam quarti tetragonismicorum æquiponderans solido cuius sectio est t z y e est triplum spatij A, quòd erat demonstrandum.

COROLLARIVM

Posuimus angulum c g b esse rectum perspicuitatis causâ, nam id non est necessarium vt patet ad hoc vt demonstratio cogat, dummodo g y, d i æquidistent. Eadem de causa posuimus angulum b g a esse rectum. Porrò solido cuius sectio sit triangulum t e z, vel quod in idem redit t y z, patet æquiponderare duplum spatij A, & bessem eius quod æquiponderat solido cuius sectio est z y e t.

PROPOSITIO VI.

Maneat idem solidum cuius sectio sit quadratum z y e t, ita vt latera z y, y e parallelogrammi z y e t sint æqualia, intelligatur aliud solidum periphericum cuius sectio sit quadrans circularis z m e y descriptus centro y semidiametro y z vel y e.

Oſtendendum eſt beſſem ſpatij quod æquiponderat ſolido ſectionis quadratæ æquiponderare ſolido ſectionis periphericæ z m e y.

Intelligatur ſemicirculi r z m e centrum grauitatis p in ſemidiametro y z iacens, per p agatur p q parallela rectæ y e: eſt igitur in recta p q centrum grauitatis quadrantis circularis z m e y. Vt igitur y n æqualis rectę y z ad y p, ita eſt quadrans circularis z m e y ad æquiponderans aptatum puncto n, vt ex primis libræ principiis patet: ſed iſtud æquiponderans eſt per decimam octauam tertij tetragoniſmicorum æquale trienti quadrati z y: ergo vt quadrans circularis z m e y ad trientem quadrati ſemidiametri z y, ita eſt ſemidiameter z y ad y p: ergo vt circulus ad trientem quadrati quod poteſt diameter, ita eſt ſemidiameter z y ad y p diſtantiam centri grauitatis ſemicirculi à centro y: & vt circulus ad beſſem quadrati circumſcripti ita eſt h y dimidium rectæ z y ad a p. Intelligatur quadrans circularis z m e y ita transferri in plano z y e vt punctum p congruat puncto h, & recta p q rectæ h u; igitur circulari quadranti ita tranſlato æquiponderans aptatum puucto n erit ad æquiponderans quadrato t z y e, vt eſt ipſe quadrans circularis ad quadratum z y e t, hoc eſt vt circulus totus ad quadratum circumſcriptum, vt patet ex decima quinta ſecundi tetragoniſmicorum. Rurſus ſi idem quadrans circularis reſtituatur ſuæ primigeniæ ſedi æquiponderans eidem quadranti ſemoto, ad æquiponderans eidem poſito in ſua prima ſede erit viciſſim per octauam ſecundi tetragoniſmicorū vt recta y p ad h y, hoc eſt vt circulus ad beſſem quadrati circumſcripti. Quoniam igitur æquiponderans quadrato t z y e vt iacet manenti librâ n z grammicâ ſuſpenſâ ex y, perpendiculo y e, brachio i y, eſt ad æquiponderans quadrantis cireularis z m e y ſemoti vt quadratum circumſcriptum ad circulum, æquiponderans autem ſemoti ad æquiponderans locati in ſua natiua ſede eſt vt idem circulus ad beſſem quadrati circumſcripti; erit ex æquo vt quadratum circumſcriptum ad ſui beſſem, ita æquiponderans quadrato z t e y ad aliud quadrantis circularis z m e y librâ grammicâ i z ſuſpenſâ ex y perpendiculo y e, brachio y i; quod cùm perinde demonſtretur in aliis omnibus ſectionibus iſtorum ſolidorum, patet ex vigeſima octauâ quarti tetragoniſmici beſſem æquiponderantis toti cuius ſectio eſt quadratum t z y e eſſe æquale ad poſitionem plani a b g æquiponderanti ſolido cuius ſectio eſt quadrans circularis z m e, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex ſuperiore patet duplum ſpatij A æquiponderare ſolido peripherico cuius ſectio eſt quadrans circularis z m e y, & quadruplum ſpatij A æquiponderare ſolido cuius ſectio eſt ſemicirculus r z m e. Quoniam verò per corollarium ſuperioris ſolido cuius ſectio eſt triangulum t y z, æquiponderat bes eius quod ſolido ſectionis quadratæ, patet cuneo cuius ſectio eſt t y z, & peripherico præſentis propoſitionis idem ſpatium æquipondera-

re: igitur per octauam secundi tetragonismicorum vt est periphericum sectionis z m e y ad cuneum sectionis t y z, hoc est vt semicirculus ad quadratum suæ semidiametri, ita vicissim interuallum, quo cunei centrum grauitatis distat ab axe c g, se habet ad interuallum quo peripherici centrum grauitatis distat ab eodem axe. Igitur cùm vt quadratum semidiametri, hoc est primus terminus perspectæ progressionis definitæ initio huius libri se habet ad dimidium circuli, siue ad dimidium secundi termini perspectæ, ita se habeat primus adiunctæ progressionis, hoc est radius circuli ad dimidium secundi adiunctæ, hoc est ad quadrantem totius peripheriæ circularis (nam adiunctæ secundus est dimidium totius peripheriæ circularis) patet interuallum centri cunealis ad interuallum centri peripherici esse vt quadrantem peripheriæ circularis ad suum radium.

PROPOSITIO VII.

Reuocato schemate primæ (*Fig.* 22.) intelligatur circa axem c g circumuolui figura c z b g & gigni solidum conoides, cuius dimidio ad partes z plani a g c posito æquiponderans quæratur.

Ostendendum est libræ planæ axe g c, perpendiculo plano a g c, sustentaculo x D parallelo ad rectam g c, æquiponderans dimidio illi conoidis vel toti, vel ad positionem plani a g c ex parte sumpti, esse noto parallelepipedo æquale, ex hypothesi tetragonismi circuli inuenti.

Quoniam per primam solidum cuius sectio est triangulum a g b æquale est ad positionem plani a g c cylindraceo altitudinis g u, baseos b g f m; istius cylindracei, & solidi illius centrum grauitatis erit in eodem plano ad planum a g c parallelo, vt ex vndecima quarti tetragonismicorum liquet. Præterea quoniam istius cylindracei altitudinis g u, & eius baseos b g f m centrum grauitatis est in eodem plano ad planum g c parallelo, & per tertiam notum est centrum grauitatis baseos b g f m vel integræ vel cuiuslibet eius partis ad positionem rectæ f g sumptæ, nota quoque est quadratura eiusdem per eandem propositionem: ergo axe g c, perpendiculo a g c, sustentaculo D x ita ducto vt recta g x æquet rectam g u vel g c, si inueniatur rectilineum E æquiponderans basi cylindracei, parallelepipedum altitudinis g u, baseos E æquiponderabit cylindraceo, ac proinde & solido cuius sectio est b g a: ergo per corollarium superioris cylindraceum altitudinis g u, baseos æquantis quadruplum spatij E æquale est æquipōderanti proposito, quando g x æquat altitudinem g u. Quòd si g x, g u sint inæquales, ex octaua secundi tetragonismicorum liquet vt est g u recta ad g x, ita vicissim fieri debere quadruplum spatij E ad basim quæsitam. Vel retenta eadem basi ita vicissim fieri debere altitudinem g u ad altitudinem quæsiti cylindracei: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quando sumitur dimidium totum conoideos, cùm figuræ b m f n, brachio æquante rectam g c, perpendiculo b n, æquiponderans per corollarium secundum secundæ sit semicirculus genitor diametri f c imminutus quadrato g c, ex nonâ & decima secundi tetragonismicorum constat si axis b n mutetur in g c, brachio g x æquante rectam g c, æquiponderans figuræ b m f n esse spatium quod ad b m f n hoc est ad quadratum c g se habeat vt b g recta ad g c, auctum quadrato g c & imminutum semicirculo genitore: sed ex eodem corollario spatium illud quod ita se habet ad quadratum g c est æquale semicirculo genitori: ergo figuræ b m f n, brachio g x, perpendiculo g c æquiponderat quadratum g c. Præterea fiant tres rectæ g c, g b, g F proportionales, punctum verò G sit bisectio rectæ F g: æquiponderans ergo toti b g f n parallelogrammo erit parallelogrammum G g f, hoc est dimidium quadrati g b: ergo si ex hoc æquiponderante dematur æquiponderans figuræ b m f n restat E æquale dimidio quadrati b g imminutum quadrato g c. Igitur cylindraceum altitudinis g u baseos æquantis duplum quadrati b g imminutum quadrato f c æquiponderat conoidi propositionis præsentis in casu assumpto.

COROLLARIVM II.

Calculus reliquorum casuum tractari debet pari methodo, qui quidem tam latè patent quàm propositio prima eiusque corollaria. Porrò sicuti inuenimus æquiponderans esse æquale cylindraceo cuius altitudo æquet semidiametrum g c circuli genitoris, basis sit dimidium spatij quod potest recta b g, dempto rectangulo contento sub g c semidiametro circuli genitoris & sub sinu verso arcûs cui ęqualis est recta b g. Ita si sumatur quælibet figura b z p i ostendetur æquiponderãs figuræ b i s cuneatæ, libræ planæ axe i p, brachio æquante rectam g c, esse æquale cylindraceo eiusdem altitudinis, cuius basis sit dimidium spatij quod potest recta b i, dempto rectangulo contento sub semidiametro g c & sub sinu verso arcûs cui æqualis est recta b i.

COROLLARIVM III.

Quoniam ex corollario primo brachio g x æquante semidiametrum g c circuli genitoris, perpendiculo g f, æquiponderat toti semicuneo primo expanso b m f n spatium æquale quadrato semidiametri g c, ipsa autem figura b m f n est æqualis eidem quadrato, si ex recta g b auferatur g y æqualis rectæ g c vel g x, & per y agatur y A B parallela rectæ g f, ex principiis libræ notis patet, cùm vt g x brachium ad g y longitudinem, ita viciſſim sit suspensa magnitudo b m f n ad æquiponderans, in recta A B esse centrum grauitatis semicunei expansi b m f n. Igitur secluso tetragonismo circuli inuenitur recta A B parallela axi c g ducta per centrum grauitatis semicunei expansi. Pari verò methodo inuenietur secluso eodem tetragonismo, recta per centrum cuiusuis partis b n l m positâ l m parallela recta g c.

PROPO-

PROPOSITIO VIII.

SVper recta b a (*Fig.*25.) stet ad normã recta b g, & eidem ad positionem eiusdẽ b g insistat figura a h g b, quæ etiam ad positionem rectæ a b insistat rectæ b g. Ex a b abscissa sit quælibet b c, cui b D ponatur æqualis; completo parallelogrammo g e c b intelligantur duæ figuræ c ſ e, c t e ita se habentes ad parallelogrammum g b c e & ad figuram b a h g vt quæcunque h d æquidistans rectæ b c ducatur occurrens lineis a h g, b g, c ſ e, c t e, c e in punctis h, f, ſ, t, d, quatuor rectæ f d, f h, ſ d, t d sint continuè proportionales. Libra grammica c D suspensa ex b perpendiculo b g, brachio b c, intelligantur generari prima b i a quadratrix & secunda b x a respondentes figuræ b a h g sic vt quemadmodum c b ad b o quamuis portionem rectæ b a, ita o h parallela perpendiculo b g & dimetiens figuræ b a h g, sit ad o i dimetientem primæ quadratricis, & ita sit ipsa o i ad o x dimetientem secundæ.

Ostendendum est quæcunque o h parallela rectæ b g ducatur, completo parallelogrammo h o b f, trientem figuræ c t d esse æqualem quadratrici secundæ figuræ b a h f compositæ ex figura D o x & ex secunda quadratrice notâ parallelogrammi b o h f.

Ad planum a b g excitata sit perpendicularis b A & completum sit quadratum A b D l, cuius diameter b l; in plano b D l descripta sit parabola b n l cuius axis A b, ordinatim appllicata A l. Intelligatur cylindraceum cuius basis b a h g, descriptum per limbum baseos b a h g motu rectæ b A perpendicularis ad planum a b g; intelligatur aliud cylindraceum cuius basis b a l n descriptum per limbum baseos b a l n motu rectæ b g perpendicularis ad planum A b a. Per h ducatur planum h o p parallelum plano A b g secans lineas a b, l n b, l b, l A in punctis o, n m, p. Quoniam per duodecimam tertij tetragonismicorum vt b c vel p o ad b o vel ad o m, ita est b o vel o m ad o n; rectis autem b c, b o æquales sunt d f, f h, & vt d f ad f h ita est f h ad ſ d, erunt o n, ſ d æquales; ergo cùm o n r h sit sectio parallelogramma dicylindracei suprà descripti, erunt h r, ſ d æquales. Quoniam igitur vt d f ad f h, ita est ſ d vel h r ad t d, rectangulo sub mediis f h, ſ d contento æquale erit rectangulum f d t sub extremis comprehensum.

Rursus quoniam planum r h f æquidistat plano A b a, si compleantur parallelogramma r h f u, n o b B erunt similia, & cylindracei cum plano r h f sectio r h f y erit similis & æqualis siue, vt Archimedes loquitur, erit eadem cum sectione n o b z. Est igitur r y f parabola quam tangit f h, cuius axis u f, ordinatim applicata u r: ergo portio r y f h est per demõstrata ab Archimede triens parallelogrammi r h f u, siue rectanguli f d t. Quo-

niam igitur dicylindracei cuius ſectio n o h r parallela plano A b g ſingulæ ſectiones r h f y parallelæ plano A b a ſunt æquales trienti rectanguli f d t, patet ex vndecima tertij tetragoniſmicorum dicylindraceum illud eſſe ad poſitionem plani A b a condicta ratione æquale trienti cylindracei altitudinis b c, baſeos c t e.

Rurſus quoniam vt c b ad b o vel vt p o ad o m, ita eſt o h ad o i, & vt o m ad n o ita eſt o i ad o x, erit ex æquo vt p o ad n o, ita o h ad o x: ergo rectangulum ſub mediis n o, o h eſt æquale rectangulo ſub extremis p o, o x. Igitur dicylindraceum genitum ad poſitionem plani A b g ex figuris b a l n, b a h g eſt condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis b c baſeos b x a o: ſed dicylindraceo iſti æqualis eſt, vt oſtendimus, triens cylindracei altitudinis f d, baſeos c t d: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Quando punctū o congruit puncto b patet punctum h congruere puncto g, & nullum eſſe parallelogrammum o h f b. Præterea ex demonſtrationis progreſſu liquet idem euinci quæcunque ſit linea a h ſiue recta, ſiue caua ad partes rectæ b g, ſiue conuexa: & ſiue pertingat ad g, ſiue non pertingat.

COROLLARIVM II.

Patet quoque ex demonſtratis ſi habeatur quadratrix ſecunda parallelogrammi b o h f, & quadratrix ſecunda D o x, triplum eiuſmodi ſpatij eſſe æquale figuræ c t d. Figuras autem iſtiuſmodi quarum prima eſt parallelogrammum quodlibet b c e g, ſecunda quælibet figura b a h g, tertia c ſ e, quarta c t e, habentes iam dictam proprietatem voco gradus primum, ſecundum, tertium, quartum, & rectas d f, f h, ſ d, d t parallelas rectæ b c, voco earum dimetientes. Dati igitur quarti gradûs ad poſitionem rectæ b c triens eſt quadratrix ſecunda ad poſitionem rectæ b g: & viciſſim datæ ſecundæ quadratricis ad poſitionem rectæ b g, triplum eſt quartus gradus ad poſitionem rectæ b c.

COROLLARIVM III.

Patet inſuper vt habeatur quadratrix ſecunda D o x, datâ figurâ c t d, ex triente figuræ c t d auferendam eſſe quadratricem ſecundam parallelogrammi o h f b: & viciſſim vt ex quadratrice data D o x obtineatur quartus gradus c t d, ad triplum ipſius quadratricis D o x addi oportere triplum quadratricis ſecundæ parallelogrammi o h f b.

COROLLARIVM IV.

Præterea ſi dicylindraceo genito ex ipſa figura b a h g ad poſitionem plani A b a in ſeipſam ducta notum ſit æquiponderans axe libræ planæ b g, perpendiculo plano A b g, ſuſtentaculo c e, patet baſim cylindracei altitudinis b c, æquantis dictum æquiponderans ad poſitionem plani A b a eſſe dimidium quarti gradûs; nam vt d e ad f E dimidium rectæ f h, ita eſt f h ad dimidium rectæ d s; ergo poſita eadem altitudine f h ita quo-

quę est quadratum f h ad rectangulum contentum sub f h & sub dimidio rectæ d s. Cùm igitur quadrati f h centrum grauitatis sit in perpendiculari ad planum a b g ex puncto E excitata, & cùm vt d f ad f E ita vicissim sit quadratum f h suspensum ad rectangulum contentum sub f h & sub dimidio rectæ d s, patet istud rectangulum aptatum puncto d ad positionem plani A b a æquiponderare quadrato f h ad eandem positionem stanti: ergo per vigesimam octauam quarti tetragonismicorum solido genito ex figura b a h g præscriptâ iam ratione, æquiponderat solidum genitum pari pacto ex secundo gradu b a h g & ex dimidio tertij c f e; hoc est ex primo gradu c b g e ex dimidio quarti c t e, vt ex demonstratis liquet.

PROPOSITIO IX.

SIt vt in secunda (*Fig. 26.*) totus semicuneus expansus c b a f circulo genitore diametri c f genitus; axis c f bifariam sectus sit in g, vt c b g sit semicuneus primus expansus: ex recta g f productá abscissa sit f E æqualis ipsi a f, & adimpletum sit parallelogrammum a f E B cuius diameter a E, itemque parallelogrammum f g h a. Ex puncto h excitetur h F perpendicularis ad planum b h a & æqualis rectæ h b: intelligatur figura a h F G condictá ratione æqualis figuræ a h b z ad positionem plani F h b, ita vt quodcunque planum G F z ducatur parallelum plano F h b, sectiones eius F G, F z cum figuris a h F G, a h b z sint æquales. Intelligatur cylindraceum cuius basis sit a h F G, altitudo a f: per limbum a z b intelligatur incedere recta æquidistans rectæ h F, & describendo superficiem cylindraceam diuidere cylindraceum altitudinis a f, baseos a h F G in duas portiones quarum bases sunt h a z b, a z b g f. Ista vocetur *portio secunda cylindracei condicti*. Completo quadrato q h a e intelligatur libra grammica h g suspendi ex h perpendiculo h a, brachio q h, & generetur quadratrix a o n respondens figuræ a t z b h, vt sicut q h ad quamlibet h s portionem rectæ h b, ita s t parallela rectæ a h dimetiens figuræ a t b h, sit ad r o dimetientem quadratricis. Intelligatur præterea solidum cuius sectio parallela plano F h g sit z y D triangulum rectangulum simile triangulo p f a cuius latera a f, f p sunt æqualia sicut in primá descriptum fuit, eius verò basis sit pars inferior g b t a f semicunei expansi c b a f.

Ostendendum est figuræ isti cuius sectio D z y, æquale ad positionem plani F h a esse cylindraceum altitudinis f A æquantis rectam f g, cuius basis sit triangulum rectilineum a E f, demptis cylindraceo altitudinis A f baseos a o n, & portione secunda cylindracei condicti. Eiusmodi verò solidi centrum grauitatis esse in plano noto parallelo ad planum A f c.

Quoniam per octauæ libri secundi corollarium 2. figura h b z a est eadem cum figura c b g, sed subcontrariè posita; figura autem c b g si ponatur basis solidi cuius sectiones plano p f a æquidistantes sint quadrata, habet notum æquiponderans per septimam, axe c f perpendiculo plano c f p: igitur si figura h b t a ponatur basis paris solidi erit notum æquiponderans eiusmodi solidi portioni quæ ad plani p f c partes f iacet. Igitur cùm eiusmodi solidum sit ad positionem plani F h a condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis f A vel f g, baseos a o n vt ex methodo vigesimæ quintæ & sextæ quarti tetragonismicorum liquet, erit per superioris corollariū secundum nota secunda quadratrix respondens primæ a o n siue tota sumatur, siue ex parte: ac proinde notum est planum parallelum plano F h a incedens per centrum grauitatis cylindracei altitudinis f A, baseos a o n. Similiter cùm cylindracei condicti baseos a h F G, altitudinis a f, centrum grauitatis iaceat in plano noto parallelo ad planum F h a, & portionis primæ centrum grauitatis iaceat in plano noto parallelo ad idem F h a vt ex septima constat, notum erit planum parallelum illis incedens per centrum grauitatis portionis secundæ. Cùm igitur cylindracei altitudinis A f, baseos a f E trianguli rectilinei centrum grauitatis iaceat in plano noto eisdem parallelo, patet si ex isto cylindraceo cylindraceum baseos a o n, & portio secunda demantur ad positionem plani F h a, residui centrum grauitatis iacere in plano noto parallelo ad planum F h a.

Quoniam verò solido cuius sectio sit triangulum a f p, basis parallelogrammum a h g f, ad positionem plani p f c æquale est condicta ratione solidum altitudinis f A vel f g, baseos a f E rectilineæ: solido verò cuius sectio sit triangulum F z i comprehensum sub F z, & sub z i parallelâ rectæ y D in triangulo F y D, æquale est ad positionem plani F h a cylindraceum baseos a o n: secundæ verò portioni condicti cylindracei æqualis est portio cuius sectio est parallelogrammum i z D C; igitur solido cuius sectio est triangulum z y D ęquale est ad positionem plani F h a solidum illud residuum de quo paulo antè egimus, & cuius centrum iacet in noto plano parallelo ad planum F h a: ergo per vndecimam quarti tetragonismicorum solidi cuius sectio est triangulum z y D centrum grauitatis iacet in plano noto parallelo ad planum F h a, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

Propositionis primæ corollaria hîc locum habent rectè aptata, vt patet.

PROPOSITIO X.

Isdem manentibus ostendendum est de dimidio solidi conoidis descripti circa axem g f motu figuræ g b z a f, idipsum quod de dimidio conoidis geniti motu figuræ b c g circa axem c g, ostendimus in septima.

Istud posita demonstratione superioris propositionis ostenditur eodem planè pacto, nec aliud quicquam adjici oportet: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quoniam ex corollario primo septimæ æquiponderans toti quadranti conoideos geniti circa axem h a circumuolutione figuræ h b z t a, axe h a, perpendiculo plano F h a, sustentaculo q e, est cylindraceum altitudinis h d æquantis rectam h a, baseos æquantis quadratum b g, vel quadrantem quadrati f a imminutum dimidio quadrati f c; istud verò æquiponderans ad æquiponderans solido cuius sectio loco quadrantis circuli sit quadrans quadrati circumscripti est vt binarius ad ternarium per sextam, æquiponderans isti solido homœoconoidi (ita enim fuit appellatum in decima nona primi) erit cylindraceum altitudinis h d, baseos æquantis tres semiquadrantes quadrati f a imminutum tribus quadrantibus quadrati f c. Si igitur quadratum q h a e ponatur ad positionem rectæ q h esse primus gradus, secundus h b z a, quartus ex corollario quarto octauæ erit duplum eiusmodi baseos; videlicet tres quadrantes quadrati f a detractis tribus semissibus quadrati f c. Igitur ex corollario secundo eiusdem octauæ quadratrix quadratricis a o n, librâ q b suspensâ ex h perpendiculo h a, brachio h q, est triens quarti illius gradus; nempe quadrans quadrati f a, detracto dimidio quadrati f c.

Rursus quoniam quadratrix a o n est per corollarium secundum secundæ æqualis semicirculo genitori dempto quadrato g c, si perpendiculum h a mutetur in g f, & brachium h q in g l ipsi æquale, æquiponderans figuræ a o n erit, vt patet ex methodo nonæ & decimæ libri secundi tetragonismicorum, spatium quod ad supensum a o n (hoc est ad semicirculum imminutum quadrato g c) sit vt recta a f ad f g, imminutum quadrante quadrati f a, & auctum dimidio qurdrati f c. Igitur æquiponderans quadratrici a o n, erit quadrans quadrati f a, auctus dimidio quadrati f c, & imminutus circulo genitore. Atque hæc est basis cylindracei altitudinis h d æquiponderantis cylindraceo eiusdem altitudinis, baseos a o n, brachio g l libræ suspensæ ex g, perpendiculo plano A f c.

Præterea iisdem positis quadrato a f E B vt iacet manenti æquiponderans ita inuenitur. Fiant tres rectæ g f, f a, f V proportionales, & f V diuidatur bifariam in M; igitur rectangulum M f E vel V f n æquiponderat quadrato a f E B, vt ex methodo primi corollarij septimæ constat. Rursus quoniam vt recta g f ad f a, ita est quadratũ g f ad circulum genitorem æqualem rectangulo g f a, & vt recta g f ad f a ita est f a ad f V, ac proinde ita est rectangulum g f a siue circulus genitor ad rectangulum g f V siue ad quadratum f a; erunt porportionalia tria hæc spatia, quadratum f g, circulus genitor, & quadratum f a. Cùm igitur vt recta f a ad f V, vel vt g f ad f a, ita sit quadratum f a ad rectangulum a f V, & ita etiam sit quadratum g f ad circulum genitorem, patet quatuor spatia

esse continuè proportionalia, quadratum g f, circulum genitorem, quadratum a f, rectangulum V f a. Est igitur V f a ad quadratum f g semidiametri circuli genitoris in triplicata ratione circuli ad quadratum suæ semidiametri. Est ergo V f a *quartus terminus progreßionis perspectæ*, cuius dimidium est rectangulum V f n. Igitur cùm dimidium quarti termini perspecti æquiponderet parallelogrammo a f E B, libra g h suspensa ex g perpendiculo g f, brachio g l, triens huius æquiponderantis, hoc est sextans quarti termini perspecti æquiponderabit toti triangulo f a E, vt ex quintæ methodo apertè constat. Igitur cylindraceo cuius basis sit triangulum a f E, altitudo f A æquiponderat iisdem positis cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis sextantem quarti termini perspectæ progressionis: nam ipsa hæc est progressio, quam *perspectam* initio huius libri diximus & cuius hæc est natura vt primus terminus ad secundum sit sicuti est diameter circuli ad rectam æqualem toti peripheriæ; quod ad calculum centrorum numeris quàm proximè exprimendum miros præstabit vsus.

Rursus cylindracei condicti insistentis super basi a h F G pars prima respondens figuræ a h b z est æqualis per quartam cylindraceo altitudinis h d vel a h, baseos æquantis circulum genitorem imminutum duplo quadrati g c. Æquiponderans eidem primæ parti axe h a perpendiculo plano d h a, sustentaculo q e est per demonstrata paulò antè cylindraceum altitudinis h d, baseos æquantis tres semiquadrantes quadrati f a imminutos tribus quadrantibus quadrati f c. Si igitur perpendiculum h a mutetur, vt suprà in g f, & brachium h q in g l ipsi æquale, æquiponderans primæ partis condicti cylindracei erit spatium quod ad primam illam partem suspensam sit vt recta a f ad f g, imminutum æquiponderante antè inuento: erit igitur cylindraceum altitudinis f A vel f g, baseos æquantis quinque octauas partes quadrati f a auctas tribus quadrantibus quadrati f c, & imminutas duobus circulis genitoribus.

Quoniam igitur cylindraceum condictum baseos a h F G altitudinis a f est ad positionem plani F h a condicta ratione æquale cylindraceo cuius altitudo a f, basis sit figura a h F G; hæc verò figura quando tota sumitur æquat quadratum f g vel a h ex duodecima primi, quando verò non sumitur tota sed pars eius ad positionem rectæ h F, est æqualis per octauam rectilineo noto; quando igitur tota sumitur istud dicylindraceum erit ad positionem plani A f c condicta ratione æquale cylindraceo baseos parallelogrammæ g h a f, altitudinis f A. Igitur cùm basi g f a h æquiponderet dimidium quadrati a f ex methodo supra tradita, cylindraceo isti siue cylindraceo condicto æquiponderabit cylindraceum altitudinis A f, vel f g, baseos æquantis dimidium quadrati f a. Tale igitur est æquiponderans duabus simul partibus cylindracei condicti: ergo dempto æquiponderante primæ partis relinquetur æquiponderans secundæ nempe cylindraceum altitudinis f g baseos æquantis duos circulos genitores im-

minutos ſemiquadrante quadrati f a, & tribus quadrati f c quadrantibus.

Præterea quoniam cylindraceo altitudinis f A baſeos rectilineæ f a E æquiponderat cylindraceum eiuſdem altitudinis, baſeos æquantis ſextantem quarti termini perſpecti, ſi inde auferatur æquiponderans ſecundæ parti cylindracei condicti, & æquiponderans cylindraceo baſeos a o n, reſiduum fiet æquiponderans ſolido cuius ſectio eſt triangulum z D y, nempe cylindraceum altitudinis f g, baſeos æquantis ſextantem quarti termini perſpectæ primæ progreſſionis auctum quadrante quadrati f c, imminutum octaua parte quadrati f a, & circulo genitore.

Igitur ex corollario ſextæ quadruplum huius æquiponderantis videlicet bes termini quarti perſpecti auctus quadrato f c, imminutus dimidio quadrati f a & quatuor circulis genitoribus eſt baſis cylindracei altitudinis f A, quod repræſentat æquiponderans dimidio conoideos geniti circa axem g f motu partis inferioris b z a f g, libræ planæ axe f c, perpendiculo plano A f c, ſuſtentaculo l x parallelo ad rectam g f.

Igitur ſi æquiponderanti iſti addatur ſpatium æquiponderantis dimidio conoideos ſuperioris collectum in corollario ſeptimæ, fiet æquiponderans dimio totius conoideos motu figuræ c b a f deſcripti, nempe cylindraceum altitudinis f A baſeos æquantis beſſem termini quarti perſpecti deductis quatuor circulis genitoribus.

COROLLARIVM II.

Calculus reliquorum caſuum tractari debet ſimili methodo, qui quidem tam latè patent quàm propoſitio prima cum ſuis corollariis.

PROPOSITIO XI.

SIt (*Fig.* 27.) ſemicuneus primus expanſus h o c a genitus circulo diametri c u, centri a, eius baſis a h ſecta ſit bifariam in r; in quam incidat r q parallela rectæ a c, & æqualis dimidio rectæ a c, vel a u. Intelligantur completa parallelogramma h a u g, b h r q, y q r a. Sit b h t q ſemicuneus expanſus genitore circulo centri b, ſemidiametri b h ſit quoque y u i q ſemicuneus alter expanſus genitore circulo centri y, ſemidiametri y u; figura h t q i u a ſit illa quam *ex finibus verſis* appellauimus in ſecundo corollario decimæ tertiæ ſecundi libri, ac proinde quæcunque t l parallela axi a c ducatur occurrens baſi h a in e, limbo h o c in o, lateri g u in l, tres rectæ l e, e o, e t ſint proportionales. Intelligatur præterea ex puncto a excitari a m perpendicularis ad planum c a b æqualis rectæ a c. Ponatur circa axem a h manentem circumuolui figura h o c a & gignere conoides cuius tantum quadrans interceptum planis h a c, m a h, m a c hic conſideratur perſpicuitatis cauſa, cùm ex quadrantis modulo ad totum tranſitus facilè

fiat: ex recta h a, producta abscindatur a B æqualis rectæ a c: vt est quadratum diametri ad circulum, ita fiat recta a m ad a p.

Ostendendum est cylindraceũ baseos h t q i u a altitudinis a p esse ad positionẽ plani p a c condicta ratione æquale conoidis quadranti proposito; & libra B h suspensa ex a perpendiculo plano m a c notum esse cylindraceum altitudinis p a, baseos æquantis rectilineum (dato circuli tetragonismo) notum; æquale spatio quod æquiponderat quadranti, vel cuilibet eius portioni ad positionem plani p a c sumptæ.

Quoniam tres rectæ l e, e o, t e sunt proportionales, rectangulum altitudinis l e vel a m, baseos t e erit æquale quadrato e o: ergo per vndecimam quarti tetragonismicorum cylindraceum altitudinis a m baseos h t q i u a erit ad positionem plani m a c condicta ratione æquale quadranti solidi homœoconoideos cuius sectiones sunt quadrata parallela plano m a c, latera autem eorum sunt ordinatim applicatæ ad basim h a semicunei expansi h o c a. Igitur vt in decima nona primi ostendimus pro pari casu, cylindraceum altitudinis p a eiusdémque baseos erit quadranti conoideos proposito æquale condicta ratione ad positionem plani m a c.

Quoniam igitur cylindraceum altitudinis p a, baseos h t i u a ad positionem plani p a c est condicta ratione æquale quadranti conoideos circa basim a h descripti; per eandem vndecimam quarti tetragonismicorum, quod ad positionem plani m a c æquiponderabit cylindraceo, æquiponderabit quoque quadranti: sed quod æquiponderat cylindraceo altitudinis a p, est cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis æquiponderans figuræ h t q i u a ad positionem rectæ a c, vt ex methodo vigesimæ quintæ quarti tetragonismicorum liquet: ergo cùm ex tertiæ methodo habeatur æquiponderans figuræ h t q i u a cuilibet portioni ad positionem rectæ a c sumptæ, patet quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Ex methodo calculi initi in corollariis septimæ & decimæ inuenitur quadrãti conoideos integrè sumpto æquiponderare axe a c perpendiculo plano m a c, brachio a B cylindraceum altitudinis p a, baseos æquantis quadrantem quadrati a h, imminutum quadrante quadrati a c, ac proinde toti conoidi æquiponderare quadratum a h imminutum quadrato a c: dimidio verò eiusmodi conoideos abscisso per planum m a h, æquiponderare dimidium quadrati a h imminutum dimidio quadrati a c. Diuidatur enim a B bifariam in C, vt rectæ q r, a C sint æquales; ex recta r a abscindatur r s rectæ q r æqualis: igitur per demonstrata initio corollarij primi primæ librâ a h suspensâ ex r perpendiculo r q, brachio r s, æquiponderans figuræ b h t q est æquale quadrato q r: ergo per recessum si axis r q mutetur in a y, & brachium r s in a C æquiponderans figuræ b h t q erit spatium quod ad b q t h sit vt recta a r ad r s auctum quadrato q r: sed illud spatium proportionale per demonstrata initio eiusdem corollarij est

larij est æquale semicirculo genitori semidiametri q r : ergo figuræ b q t h librâ C h suspensâ ex a perpendiculo a y, brachio a C æquiponderat semicirculus semidiametri q r auctus quadrato q r. Rursus iisdem positis parallelogrammo a h b y vt iacet manenti ex methodo corollarij primi decimæ æquiponderat dimidium quadrati h a : ergo figuræ residuæ y q t h a æquiponderat brachio a C, perpendiculo a y dimidium quadrati h a imminutum semicirculo semidiametri q r, & quadrato q r: sed figuræ u i q y iisdem positis ęquipõderat per demõstrata in corollario secundo secundæ propositionis dimidium eiusdem circuli dempto quadrato q r: ergo figuræ u i q t h a æquiponderat dimidium quadrati h a imminutum duplo quadrati q r vel dimidio quadrati a c: Igitur brachio a B, æquiponderat prioris æquipondarantis dimidium per octauam secundi tetragonismicorum, nempe quadrans quadrati a h, imminutus quadrante quadrati a c. Ergo quadruplum illius est quadratum h a imminutum quadrato a c: & huius dimidium illiusque duplum est dimidium quadrati h a imminutum dimidio quadrati a c.

COROLLARIVM II.

Propositionis nonæ corollaria hic locum habent, vt patet.

PROPOSITIO XII.

Iisdem manentibus compleatur totus semicuneus expansus vel tota semicycloides parua u c o h x A, additâ parte inferiore u a h x A, & figuræ u i q t h a subcontrariè posita sit figura eadem D h f P, ita vt tres E F, F z, F R dimetientes figurarum g A D h, h x A D, h f P D sint proportionales, est enim h x A D subcontrariè posita eadémque cum figura h o c a per superioris libri octauam in corollario. Ex rectâ h g abscindatur g V æqualis ipsi g h, & compleatur parallelogrammum g A T V: intelligatur figura T H g V ad positionem rectæ g h insistere ita rectæ T V, vt quæcunque S E parallela rectæ a c ducatur occurrens lineis T V, T H g, A g, A x h in punctis S, H, E, z, tres rectæ S E, E z, S H sint proportionales.

Ostendendum est figuram T H g V ad positionem rectæ a c esse condicta ratione æqualem parallelogrammo A g h D aucto figura h f P D, & imminuto bis figura A z h D: ac proinde sicuti in superiore, librâ a h suspensâ ex a perpendiculo plano m a c, brachio a B æquiponderans quadranti conoidis circa axem g A circumuolutione figuræ g A x h esse idem quod æquiponderans cylindraceo altitudinis a p, baseos æquantis rectilineum ex dato tetragonismo circuli notum.

Figuræ A x h D axe h D sustentaculo M P æquiponderat condicta ratione ad positionem rectæ a c dimidium figuræ h f P D; cùm enim tres

rectæ F N vel a c, z F & F R sint proportionales, vt F N brachium ad dimidium rectæ F z, ita viciſſim eſt tota F z ad dimidium rectæ F R: ergo ex vigeſima octaua quarti tetragoniſmicorum dimidium figuræ D h f P aptatum ſuſtentaculo M P æquiponderat condicta ratione figuræ A z h D. Si igitur axis h D mutetur in g A & ſuſtentaculum P M in T V, æquiponderans eidem figuræ aptatum ſuſtentaculo T V erit ipſa figura A z h D imminuta dimidio figuræ D h f P, vt ex nona ſecundi tetragoniſmicorum liquet. Præterea quoniam parallelogrammo A g h D axe g A ſuſtentaculo V T æquiponderat condicta ratione ad poſitionem rectæ g h dimidium parallelogrammi ipſius A g h D, æquiponderans figuræ A g h x erit iiſdem poſitis condicta ratione æquale dimidio parallelogrammi A g h D ad poſitionem iam dictam ſumpti, addito dimidio figuræ h f P D, & ablata figura A z h D. Igitur cùm figura T H g V ſit ad poſitionem eandem condicta ratione dupla iſtius æquiponderantis, erit ipſa parallelogrammum A g h D auctum figurâ h f P D & imminutum bis figura A z h D. Ergo vt ex ſuperiore liquet cylindraceum altitudinis a p baſeos V T H g eſt ad poſitionem plani m a c condicta ratione æquale quadranti conoideos circa rectam g A deſcripti motu figuræ A z h g: & habent idem æquiponderans: ſed cylindraceo æquiponderat cylindraceum altitudinis a p, baſeos æquantis rectilineum vt ex præcedentis methodo patet notum, quod figuræ T V g H æquiponderat iiſdem poſitis: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Calculus pro caſu quadrantis conoideos reſpondentis toti figuræ g A z h circa rectam g A manentem circumuolutæ exhibet cylindraceum altitudinis a p baſeos æquantis nouem decimas ſextas partes quadrati u A imminutas circulo genitore, & ſeptem decimis ſextis quadrati u c. Ex rectâ a D producta abſcindatur D Y æqualis rectæ a c vel a B. Quoniam figura T H g V eſt parallelogrammum A g h D auctum figurâ D h f P, & imminutum bis figurâ A x h D: librâ autem Y a ſuſpensâ ex D perpendiculo D G æquiponderat figuræ A g h D dimidium quadrati D h vel h a vt ex corollario decimæ liquet; figuræ verò D h f P per corollarium ſuperioris æquiponderat quadrans quadrati D h imminutus quadrante quadrati a c; figuræ demum a z h D bis ſumptæ æquiponderat per corollarium ſecundum ſecundæ circulus diametri u c imminutus bis quadrato a c: ſumma ex illis collecta erit æquiponderans figuræ T H g V brachio D Y, perpendiculo D G, videlicet tres quadrantes quadrati D h aucti ſeptem quadrantibus quadrati a c, & imminuti circulo diametri u c. Ipſa porrò figura T H g V eſt tres quadrantes circuli genitoris diametro u c deſcripti dempto bis quadrato a c: nam prima pars A g h D eſt dimidium circuli genitoris ex corollario ſeptimæ; ſecunda D h f P eſt quadrans eiuſdem circuli ſiue rectangulum b h D G; tertia eſt bis quadratum a c. Si igitur brachium Y D mutetur in a B & perpendiculum D G in a y, æ-

quiponderans postremum erit spatium quod ad figuram T H g V sit vt recta D a ad a c imminutum æquiponderante priore. Cùm igitur T H g V sit tres quadrantes genitoris circuli demptis duobus quadratis a c, proportionale illi spatium ex methodo corollarij iam dicti erit tres quadrantes quadrati u A vel a D subductis duobus circulis genitoribus: ergo deducto priore æquiponderante relinquetur æquiponderans figuræ T H g V, nempe nouem decimæ sextæ quadrati a D deducto circulo genitore, & septem decimis sextis quadrati u c. Istud verò æquiponderans est basis cylindracei altitudinis a p, quod æquiponderat quadranti conoideos propositi.

PROPOSITIO XIII.

Isdem manentibus vt in vndecimâ, circa axem g u intelligatur circumuolui figura g h o c u.

Ostendendum est figuram cuius dimetiens parallela rectæ u c sit tertia proportionalis post primam L u, secundam l o parallelam rectæ u c interceptam recta u g & arcu h o c, esse compositam ad positionem rectæ u a ex parallelogrammo u g h a, ex figurâ h q i u a & ex bis figurâ h o c a; ac proinde librâ a h suspensâ ex a perpendiculo plano m a c, brachio a B notum esse æquiponderans quadranti huius conoidis nempe cylindraceum altitudinis a p, baseos æquantis rectilineum notum, posito circuli tetragonismo.

Quoniam enim tres rectæ l e, e o, t e sunt proportionales, erunt quoque proportionales l e, l o composita ex prima l e & ex e o secundâ, & composita ex primâ, bis secundâ, & semel tertiâ; cùm vt prima trium proportionalium ad primam & secundam, ita sit prima secunda, ad primam, bis secundam & tertiam simul sumptas. Cùm igitur tertia ista figura respondens secundæ g h o c u sit hoc pacto composita, & illi æquiponderans ad positionem rectæ a u sit notum vt ex superioribus duabus liquet, erit quoque nota basis cylindracei altitudinis a p æquiponderantis ad positionem plani p a c, libra B h suspensa ex a perpendiculo a u, brachio a B, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quando poneretur circumuolui circa quamuis rectam, parallelam rectæ a h, obtinebitur tertia illa figura proportionalis, non multum absimili methodo, vt propiùs inspicienti patebit. Nam per axis paralleli rectæ h a recessum ab ipsa h a manet dimidium eiusmodi tertiæ figuræ inuentæ pro æquiponderante in primo statu ante recessum, & augetur figura proportionali quæ ad tertiam sit vt recessûs interualum ad u a rectam. Huius verò duplum vnà cum parallelogrammo cuius latus parallelum rectæ a h se habeat ad u a, vt quadratum interualli recessûs ad quadratum u a, erit tertia proportionalis quæsita. Nec dissimilis admodum

erit ratio per accessum, vel inuertendo brachium ad partes oppositas, prout ex nona & decima secundi tetragonismicorum patet, & planius fiet ex calculo casuum specialium in sequentibus. Semper verò eiusmodi tertiæ figuræ perinde obtinebitur æquiponderans brachio B a, perpendiculo a u. Istud quoque annotari oportet, figuram h q i u a esse totam semicycloidem paruam circulo diametri u a genitam centro y, ita vt pars eius superior sit u i q y, inferior y q t h a; vt ex decima tertia secundi liquet.

COROLLARIVM II.

Totius istius conoidis quadranti æquiponderans cylindraceum altitudinis a p si hoc calculo computetur, eius basis inuenitur esse tres decimæ sextæ partes quadrati a D auctæ circulo genitore diametri u c, & imminutæ nouem decimis sextis quadrati u c. Nam parallelogrammo u g h a æquiponderat ex corollario superioris dimidium quadrati a h; figuræ u t h a quadrans eiusdem quadrati imminutus quadrante quadrati a c; figuræ h o c a bis sumptæ circulus genitor imminutus duobus quadratis a c. Igitur tertiæ illi figuræ brachio a B, perpendiculo a u æquiponderat dodrans quadrati a h auctus circulo genitore, & imminutus nouem quadrantibus quadrati a c; hoc est tres decimæ sextæ partes quadrati a D vel u A auctæ circulo genitore & imminutæ nouem decimis sextis quadrati u c.

COROLLARIVM III.

Si in vnum confundantur æquiponderantia in superioris propositionis corollario, & in præsentis 2. inuenta, fiet æquiponderans quadranti totius conoidis motu figuræ u A h c circa axem u A geniti, nempe cylindraceum altitudinis a p, baseos æquantis dodrantem quadrati u A vel a D, deducto quadrato u c. Duplum illius dimidio conoidis respondebit, & quadruplum toti, vt in corollario vndecimæ ostensum fuit.

COROLLARIVM IV.

Corollaria nonæ aptari possunt præsenti propositioni, cum opus fuerit.

PROPOSITIO XIV.

Rectæ a b, b g (*Fig.* 28.) secent se ad normam; centro b descriptus sit circulus per a, g, cuius quadrans a f g b; sit parabola a p g cuius vertex g, axis g b, ordinatim applicata b a: circuli diameter f b g intelligatur suspendi ex centro b perpendiculo b a, & generari prima, secunda, tertia quadratrices g m, g l, g i respondentes quadranti circulari ita vt sicuti est f b ad b q quamlibet portionem rectæ b g, sic sit ordinata q f ad ordinatim q m primæ quadratricis, & q m ad q l ordinatam secundæ, & q l ad q i ordinatam tertiæ. Sit alia quadratrix g y x respondens figuræ a p g b ita vt sicuti f b ad b r, sic p r parallela rectæ d b sit ad r x.

Ostendendum est si intelligatur ad positionem rectæ b g figura b g

l u cuius limbus sit quadratrix secunda g l, basis b u portio rectæ a b productæ; intelligatur autem alia figura b g y x u cuius limbus sit quadratrix g y x; tres figuras quarum prima est parallelogrammum f b u e, secunda est limbi g l, tertia limbi g y x, ita esse positas vt quæcunque e l parallela rectæ b g ducatur occurrens lineis f e, b u, g y x, g l in e, u, x, l, tres rectæ e u, u l, u x sint proportionales.

Per f ducatur f n parallela rectæ b g occurrens limbo parabolæ in p; rectæ a b in n, rectæ e s in o: igitur per tertiam tertij tetragonismicorum tres rectæ o n, n f, n p sunt proportionales. Rursus quoniam vt f b ad b q ita ex generatione quadratricis est f q ad q m, & q m ad q l; vt autem f b vel o n ad b q vel ad n f, ita est f n vel b q ad n p vel ad b r; ergo tribus rectis f q, q m, q l proportionales sunt tres f b, b q, b r; ergo ex æquo vt f b ad b r, ita f q vel p r ad q l: sed ita etiam ex generatione quadratricis est eadem p r ad r x: ergo duæ rectæ r x, q l sunt æquales, cúmque sint parallelæ, recta x l connectens puncta x l æquidistabit rectæ b g: tres igitur rectæ e u, u l, u x cum sint æquales tribus o n, n f, n p sunt proportionales; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Demonstrationis robur viget in quibuslibet aliis figuris dummodo tres rectæ o n, n f, n p sint proportionales. Oportet autem cauere vt si recta e u secet in duobus punctis limbos g l, g y, sumantur illæ tres e u, u l, u x quæ tribus o n, n f, n p proportionalibus sunt æquales, alioqui peruersè omnia incederent.

COROLLARIVM II.

Quoniam tres rectæ e u, u l, u x sunt proportionales patet ex vigesima octaua quarti libri tetragonismicorum, si b u ponatur axis libræ planæ & sustentaculum f e, cui ad positionem rectæ b g aptetur dimidium figuræ tertiæ, ita vt puncto c aptetur dimidium dimetientis u x, & sic de aliis, istud dimidium ita aptatum æquiponderare condicta ratione figuræ limbi g l: ergo si libra plana conuertatur in grammicam f g suspensam ex b perpendiculo b u, brachio f b, idem manebit æquiponderans vt ex corollario eiusdem vigesimæ octauæ liquet.

COROLLARIVM III.

Axis b g ita diuidatur in d vt d g ad b d sit sicut ternarius ad binarium, & per d agatur d c parallela rectæ b a; ex demonstratis in prima quarti tetragonismicorum centrum grauitatis figuræ a p g b est in recta d c: ergo axe b a sustentaculo f o, æquiponderans figuræ a p g b est vt f b ad b d hoc est vt quinarius ad binarium: sed a p g b est bes quadrati b g: ergo æquiponderans figuræ a p g b est quatuor decimæ quintæ partes quadrati b g: ergo tota tertia quadratrix g i b est dimidium illius, nempe duæ decimæ quintæ partes quadrati b g.

COROLLARIVM IV.

Quadratrix prima g m b toti quadrāti circulari respondens est vt patet ex decima octaua tertij tetragonismicorum triens quadrati b g: secunda g l b tota est quadrans figuræ a f g b, nam cuneo bascos a f g b, cuius acies sit a b, & angulus plani inclinati per a b ducti sit semirectus, æquiponderat cylindraceum altitudinis b g bascos æquantis quadrantem figuræ a f g b vt in decima tertia primi ostendimus: ergo per methodum vigesimæ quintæ & vigesimæ sextæ quarti tetragonismicorum secunda quadratrix g l b tota est quadrans figuræ a f g b vel decima sexta pars totius circuli centro b geniti.

PROPOSITIO XV.

SIt (*Fig.* 29.) quadratum d b C Q cuius diameter b Q; ex puncto d excitata sit ad planum Q d b perpendicularis d z æqualis lateri d Q; ex centro d descriptus sit quadrans circularis d z M Q, qui basis sit cylindri habentis axem d b; ex recta Q d abscissa sit d L ipsi æqualis, & completo quadrato d b B L cuius diameter b L, descripta sit parabola b h L cuius axis b B, ordinatim applicata B L, ac proinde latus rectum d b. Intelligatur conus descriptus motu trianguli b L d circa latus manens b d, eiusque quadrans inclusus planis d b B, z d b consideretur in præsenti propositione. Iungatur recta z b, & in triangulo b z d descripta sit parabola b m z quam tangat recta b d in puncto b, & cuius axis æquidistet rectæ z d. Intelligatur solidum cuius quælibet sectio parallela plano z d Q sit e c g f quadrans ellipseos semiaxium f g lateris parallelogrammi b f g C, & f e parallela rectæ d z occurrens rectæ z b in e, & parabolæ f m z in m: intelligatur aliud solidum cuius sectio parallela plano z d Q sit m q g f quadrans ellipseos semiaxium m f, f g. Recta f g producta occurrat limbo b h L in h, & rectis b L, b Q in i, n; plani e f i sectio cum quadrante coni sit quadrans circularis i p e f: per h ducta sit ordinata h p ad f i semidiametrum circuli centro f peri descripti. Recta t n parallela rectæ b d occurrat lateribus, d Q, b C in y, t, & per y ducta sit y M ordinata ad semiaxem d Q quadrantis circularis z M Q d.

Ostendendum est vt est recta b a ad m f ita esse spatium z d M y comprehensum arcu z M & rectis z d, M y, d y ad spatium h p e f comprehensum arcu p e, & rectis p h, h f, f e: & ita spatium M y Q ad p h i: spatiúmque m f n q n comprehensum arcu m q & rectis m f, f n, n q esse æquale spatio p h f e; spatiúmque q n g, spatio p h i.

Quoniam enim vt a b dimidium diametri a d ad b f, ita est f g recta ad i f, erit vt quadratum a b ad b f, ita quadratum f g ad f i: sed qua-

dratum a b ad b f est vt recta a b ad f m vt ex duodecima tertij tetragonismicorum liquet; ergo vt recta a b ad f m, ita est qudratum f g ad f i quadratum: ergo vt recta a b ad f m, ita quadrans circularis z M Q d ad quadrantem circularem i p e f. Rursus quoniam tres rectæ a b vel f g, f i, f m sunt proportionales ex illa duodecima, quadrans ellipticus m q g f erit æqualis quadranti i p e f, ac proinde ad positionem plani z d Q solidum cuius sectio m q g f erit condicta ratione æquale quadranti coni cuius sectio i p e f. Igitur vt recta a b ad f m, ita est quadrans circularis semidiametri f g ad quadrantem ellipticum m q g f. Sunt igitur proportionales quadrans circularis semidiametri f g, quadrans ellipticus e c g f, & quadrans ellipticus m q g f; cùm sint præditi eodem semiaxe f g, & alij semiaxes f D vel f g, f e, f m sint proportionales; inter se verò sunt vt recta a b ad b f.

Rursus quoniam vt a b recta ad b f ita est f g recta ad f n, & ita est etiam ex duodecima illâ tertij, recta f i ad h f; semiaxes f i, f g secantur proportionaliter in h & n: ergo cùm quadrans ellipticus m q g f sit æqualis quadranti e f i, & semiaxes f g, f i secentur proportionaliter in n & h, erit f m q n portio æqualis prtioni p e f h, & portio residua q g n residuæ p h i: Tres ergo portiones z d y M, e f n c, m f n q sunt proportionales tribus rectis a b, b f, f m; tresque item M y q, c n g, q n g: ergo ex æquo vt a b ad f m ita est z d y M ad f m q n vel p h f e; & ita etiam est M y q ad q n g vel p h i; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

Quoniam vt f g ad f i vel f e, ita est f e ad f m, & semiaxes f g; f i secantur proportionaliter, tres rectæ M y, p h, q n erunt proportionales tribus a b vel f g, f n vel b f, & f m: ergo cùm tres etiam M y, c n, q n sint proportionales iisdem tribus, erunt c n, p h æquales; ac proinde septum medium, hoc est portio superficiei cylindraceæ descriptæ motu rectæ parallelæ ad rectam z d incedentis per limbum b h L inclusa quadrante coni ad positionem plani z d Q, habebit easdem altitudines cùm septo medio siue portione plani E b Q recti ad planum d b C intercepto intra quadrantem solidi elliptici e c g f. Præterea descriptus sit quadrans circularis b a C, & in eo quadratrices prima b r C, secunda b o C occurrentes rectæ n t in r, o: quoniam vt a b vel B b ad b f vel ad f n, ita est M y vel t s ad c n, & c n ad q n, & ita quoque est t s ad t r, & t r ad t o vt ex generatione quadratricum liquet, er nt c n, q n æquales rectis t r, t o, & rectangula t n c, t n q erunt æqualia rectangulis n t r, n t o; & cuneatum cuius sectio est t n c, cuneato, cuius sectio est n t r, & ita de aliis.

PROPOSITIO XVI.

Iisdem manentibus *sectio* plani t y M cum *superficie solidi cuius sectio est* e c g f, *est linea recta* t c M; *sectio verò cum solido cuius*

ſectio m q g f, eſt parabola t q M cuius tangens t y, axis æquidiſtat rectæ y M.

Quoniam enim vt B b ad b t, hoc eſt vt t y ad t n, ita eſt M y ad c n; & c n ad q n; & ita quoque eſt z d ad e f & e f ad f m; ſicuti b e z eſt recta ita quoque t c M erit recta, & ſicuti b m z eſt parabola quam tangit b d & cuius axis æquidiſtat rectæ d z, ita quoque t q M erit parabola quam tanget recta t y, & cuius axis æquidiſtabit rectæ M y; id enim ex eo patet quod ordinatim vtrinque applicatæ & parallelæ ad rectam z d ſint perpetua lege inter ſe vt rectæ z d, M y: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Quoniam t n q eſt ceratoides parabolica, patet figuram t n q eſſe trientem parallelogrammi t n q, ac proinde portionem ſolidi cuius ſectio f m q g interceptam planis ad planum d b C rectis E b C, E b Q eſſe ad poſitionem plani E b d æqualem trienti ſolidi geniti ex triangulo Q b C & ex quadratrice ſecunda b o C. Tota igitur portio erit vt ex corollario tertio decimæ quartæ patet, æqualis cylindraceo altitudinis b E æquantis rectam b C, cuius baſis ſit duæ quadrageſimæ quintæ partes quadrati b C; Cùm autem ex ſuperiore propoſitione portio quadrantis coni iacens inter ſeptum medium & planum E b L ſit ad poſitionem plani E b B condicta ratione æqualis portioni ſolidi cuius ſectio m q g f, intercepti inter plana E b Q, E b C, patet totam illam coni portionem eſſe æqualem eidem cylindraceo.

COROLLARIVM II.

Quod ſi quæratur portionis eiuſdem pars intercepta planis E b B, e f i, illa erit æqualis cuneato genito ex triangulo b n t & ex ſecunda quadratrice b t o, noto per methodum corollarij ſecundi ſuprà laudati, & ex cylindraceo altitudinis n g, baſeos t n q quæ eſt portio nota ceratoidis parabolicæ, Illa itaque pars erit æqualis cylindraceo eiuſdem altitudinis, baſeos æquantis rectilineum notum.

COROLLARIVM III.

Quoniam ſi iungatur recta p f, ſector i f p componitur ex figura i p h & ex triangulo h f p, hoc eſt ex dimidio parallelogrammi f h p vel f n q, ſolidum cuius ſectiones ſint ſector i f p & alij ſimiliter ſumpti, erit ad poſitionem plani E b C condicta ratione æquale ſolido cuius ſectio eſt i p h ſuprà computato, & dimidio ſolidi geniti ad poſitionem plani E b C ex triangulo b d Q & ex ſepto medio cuius dimetiens q n, hoc eſt dimidio ſolidi geniti ad poſitionem plani E b d ex triangulo Q b C: & ex quadratrice b o C. Erit igitur vt ex ſuperiore corollario patet æquale cylindraceo altitudinis E b, baſeos æquantis rectilineum notum; & pro caſu totius figuræ baſis eiuſmodi erit vna decima quinta pars vel tres quadrageſimæ quintæ partes quadrati b C. Igitur ſolidum cuius ſectio parallela

plano

plano E b C est sector p f i, est æquale cylindraceo altitudinis E b, baseos æquantis rectilineum notum, quod in casu iam computato erit quinque quadragesimæ quintæ partes, vel vna nona quadrati b C. Duplum verò eiusmodi solidi erit æquale cylindraceo altitudinis E b, baseos æquantis duas nouenas partes quadrati b C.

COROLLARIVM IV.

Iungatur recta d M, patet sectorem M d Q esse similem sectori p f i: est enim vt Q d ad d y, ita f i ad f h: ergo arcus M Q, i p sunt similes, atque adeo sectores M d Q, p f i. Si igitur recta f i producta occurrat rectæ L B in F, & interuallo rectæ f F describatur quadrans circularis F G D f & per i ducatur i G parallela rectæ D f occurrens arcui F D in G, arcus F G erit æqualis arcui M Q, cùm rectæ d y, f i vel f n sint æquales, ergo recta f p producta transit per G; vt sectores G F f, p f i sint similes.

COROLLARIVM V.

Hinc denique patet si in cylindro cuius basis sit quadrans circularis L z d, axis d b, consideretur quadrantis cylindri portio intercepta planis E b L, E b B, hoc est cuneus primus; vnà cum portione solidi cuius sectio est triangulum G f i, hoc est vnà cum semicuneo primo cuius basis est quadrans ellipseos axium L b, b E, eiusmodi solidum ex duobus genitum, ad solidum cuius sectio est sector p f i compositum ex duobus aliis solidis esse condicta ratione ad positionem plani E b C vt est recta b a ad f m, vel vt quadratum b a ad b f. Res autem in idem redit quamuis inter parallelas B C, L Q anguli parallelogrammi L B C Q non sint recti vt in nona primi libri monuimus.

PROPOSITIO XVII.

Isdem manentibus (*Fig.* 30.) angulus L B b sit semirectus, ac proinde angulus L b C rectus, sintque L b, b C æquales: per a ducta sit a t parallela rectæ B C, vt plani E b L sectio cum cylindro baseos L z Q, cuius axis b d, sit circulus diametri t L vt in septima primi ostendimus. Quadrans circularis E b L G fiat genitor semicunei expansi L y n b, ita vt eius dimetiens i y sit æqualis arcui L G, vel F G. Figuræ L y n b librâ grammica t L suspensâ ex b perpendiculo b n, brachio b t respondeat prima quadratrix L c b, & secunda L q b, ita vt sicut brachium t b ad longitudinem b i (hoc est a b ad b f) ita sit i y ad i c, & i c ad i q.

Ostendendum est ad positionem rectæ b n, quadratricem secundam esse æqualem rectilineo noto; & quando tota sumitur, esse æqualem duabus nouenis partibus quadrati b C.

Quoniam enim vt quadratum a b ad b f, vel vt quadratum t b ad b i, ex corollario vltimo superioris ita est sector G F f ad sectorem p i f & ita duplum sectoris illius ad duplum istius; rectangulum autem altitudinis

b C baseos y i est per demonstrata in tertia primi libri æquale duplo sectoris G F f: ergo si rectangulum eiusdem altitudinis baseos i r sit æquale duplo sectoris p i f, vt est quadratum t b ad b i ita erit rectangulum ad rectangulum, ac proinde basis i y ad basim i r. Quoniam verò vt t b recta ad b i, ita ex generatione quadraticum est recta y i ad c i, & c i ad c q; ergo vt quadratum t b ad b i, ita est recta y i ad i q: sed ita etiam ostendimus esse eandem i y ad i r: ergo rectæ i q, i r sunt æquales: ergo rectangulum altitudinis b C, baseos q i quæ est dimetiens ordinata secundæ quadratricis L q b est æquale duplo sectoris p i f. Igitur per vndecimam quarti tetragonismicorum solidum cuius sectio sit dupla sectoris p i h est ad positionem plani E b C condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis E b vel b C, baseos L r b quæ est secunda quadratrix: ergo cum ista basis sit ad positionem rectæ b C rectilineo noto æqualis per corollariũ tertium superioris, erit quadratrix secunda æqualis rectilineo noto ad eandem positionem, & tota L q b erit æqualis duabus nouenis quadrati b C, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quoniam vt t b ad b i ita est i y ad i c; & ita quoque est arcus F G ad arcum similem p i; recta vero y i ponitur æqualis arcui F G ex generatione ipsius figuræ L y i: ergo recta i c est æqualis arcui i p coni cuius axis b d, basis L z Q. Cùm igitur ex primi decima sexta eiusque corollario primo habeamus quadratricem primam L c b, habemus etiam portionem illam superficiei conicæ expansam. Similem superficiei conoideos parabolici obtineremus, si necessarium id foret; quamuis neque istud corollarium erat necessarium; sed prætermittere id noluimus, cùm vno verbo absolueretur: huc tamen reuocari ea oportet quæ in scholio propositionis octauæ libri secundi scripsimus.

COROLLARIVM II.

Quoniam, vt ex nona secundi tetragonismicorum liquet, si ex b L producta auferatur L s æqualis rectæ b L & fiat brachium libræ suspensæ perpendiculo L d, quadratrix prima subcontraria figuræ L y n b ita suspensæ est figura L y n b c, hoc est suspensa figura imminuta quadratrice primâ prioris perpendiculi, quæ absolutè vocatur prima, nam alia dicitur subcontraria; igitur secunda subcontraria erit suspensa figura imminuta bis primâ quadratrice & aucta semel secundâ. Suspensa enim figura notetur elemento A, & quadratrix prima B, secunda C. Patet vt A ad A - B ita esse A - B ad A - B - B † C.

COROLLARIVM III.

Ex simili ratiocinij methodo si pro axe primario b n sumatur quilibet i g inter rectas b n, L Q brachium verò maneat æquale rectæ b t, & suspensum vocetur A vt suprà, prima quadratrix erit per decimam secundi tetragonismicorum. B — a. Voco a spatium quod ad A sit vt recta i b ad b t: simili pacto b, & c voco spatia quæ ad B & C sint in eadem ratione: b

b autem & c c quæ ad B & C sint in duplicata ratione, & ita de b b b in triplicata &c. Igitur vt A ad B — a ita erit B — a ad C — b — b — c c. Quod si punctum i iaceat vltra puncta L, b ad partes t erit prima quadratrix B † a, secunda verò C † b † b † c c. Quæ progressio potest in infinitum propagari, vt intelligunt qui istis sunt assuefacti.

PROPOSITIO XVIII.

SIt semicuneus (*Fig. 31.*) expansus c b a f genitus circulo diametri c f, ex c f producta abscissa sit f T æqualis rectæ f g, & genita sit b n f g brachio f T perpendiculo f a quadratricis quadratrix respondens parti inferiori b i a f g.

Ostendendum est posito tetragonismo circuli istam quadratricem secundam esse rectilineo noto æqualem; & totam f n b g esse æqualem septem vnciis circuli genitoris diametro f c descripti, deductis vndecim trigesimis sextis quadratri f c.

Quoniam completo parallelogrammo e b d a, ex superioris corollario secundo figuræ e a i b secunda quadratrix est ipsa e a i b, quæ est æqualis quadrato g c, vnà cum secundâ quadratrice notata ibidem elemento C quæ est duæ nouenæ quadrati g c, deductâ bis primâ qudratrice quæ per primi decimam sextam est bis semiquadrans, vel semel quadrans circuli genitoris; quadratrix quadratricis figuræ e a i b erit vndecim nouenæ quadrati c g deducto quadrante circuli genitoris. Sed quadratrix quadratricis parallelogrammi f g e a est, vt patet per duodecimam tertij tetragonismicorum, triens ipsius parallelogrammi quod per corollarium secundum secundæ est æquale circulo genitori: ergo quadratrix quadratricis figuræ a i b g f est circuli genitoris septem vnciæ deductis vndecim nouenis quadrati g c, vel vndecim trigesimis sextis quadrati f c, quod pro casu designato erat demonstrandum.

In aliis verò casibus methodus est eadem positâ superiore propositione, eiusque corollariis: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quoniam ex corollarij secundi superioris propositionis methodo quadratrix secunda partis c z b g vt iacet manentis brachio T f perpendiculo f a est † A † bis B † C erit vndecim nouenæ quadrati g c auctæ quadrante circuli genitoris. Ergo quadratrix quadratricis toti c b a f respondens est decem vnciæ vel quinque sextantes circuli genitoris.

COROLLARIVM II.

Quadratrix secunda quarumlibet partium in figura c b a f assignatarum, notam esse, perpendiculo f a vel quouis ei parallelo, patet examinanti rem, neque res eget noua vlla demonstratione homini cui istorum contemplatio est familiaris.

PROPOSITIO XIX.

Iisdem manentibus ad planum a f c excitetur perpendicularis f x æqualis rectæ f g; intelligatur conoides genitum circa rectam f a reuolutione totius c b a f; itemque aliud circa b g reuolutione figuræ c z b g: denique aliud circa quamcumque l i parallelam basi f a reuolutione figuræ i z c L.

Ostendendum est librâ grammicâ T g suspensâ ex f perpendiculo plano x f d, brachio T f æquante rectam f g, æquiponderans totius conoidis dimidio iacenti ad partes c esse æquale cylindraceo altitudinis f x vel f g, baseos æquantis trientes quinque circuli genitoris diametro c f descripti. In secundo verò casu si compleatur parallelogrammum g f x d diuidaturque in duo g l u, u l f, æquiponderans dimidio conoidis descripti circa rectam b g manentem, librâ f c suspensâ ex g perpendiculo plano d g b, brachio g f, esse æquale cylindraceo altitudinis g d, baseos æquantis quatuor nouenas quadrati g c. In tertio denique casu librâ f g suspensâ ex l perpendiculo plano u l i, brachio l o æquante rectam g f esse æquale cylindraceo eiusdem altitudinis, baseos noto rectilineo æqualis, datâ quadraturâ circuli.

Quoniam ex superioris corollario primo quadratrix secunda figuræ a b c f librâ T g suspensa ex f perpendiculo f a, brachio T f, est quinque sextantes circuli genitoris, ex corollario secundo octauæ triplum huius spatij erit quartus gradus ad positionem rectæ f c, quorum primus sit parallelogrammum dimetientis f T, secundus figura a b c f. Igitur ex corollario quarto eiusdem octauæ æquiponderans solido cuius sectiones sint quadrata parallela plano x f g, latera sint ordinatim applicatæ ad basim f a, est cylindraceum altitudinis f x, baseos quæ sit dimidium quarti gradûs. Rursus ex sexta bes istius cylindracei est æquiponderans peripherico cuius sectio est quadrans circuli inscripti quadrato cuius latus sit duplum ordinatim applicatæ: huius verò bessis duplum est æquiponderans dimidio conoidis ad partes c posito: ergo cùm ex ductu harum minutiarum ^{3} $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{1}$ in se ipsas gignatur minutia , æquiponderans quæsitum erit cylindraceum altitudinis f x baseos duplæ spatij inuenti in superiore propositione; eiusmodi ergo basis pro primo casu est quinque trientes circuli genitoris: pro secundo (eadem enim ratio) est quatuor nouenæ partes quadrati g c; pro tertio denique duplum inueniendi spatij ex methodo superioris, eiusque corollariorum : ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

Secent se (*Fig.* 32.) ad normam duæ quælibet rectæ b a, a c; ad positionem rectæ a c insistat rectæ b a figura quæcunque b i c a, &

eadem b i c a ad poſitionem rectæ b a inſiſtat rectæ a c, ita vt omnes parallelæ ad rectas b a, a c cadant intra figuram b i c a. Intelligatur ex puncto a excitari ad planum b a c perpendicularis x a; concipiatur ſolidum cuius omnes ſectiones parallelæ plano x a b ſint quadrata quorum latera ſint ordinatim applicatæ ad rectam a c, vel certè quadrantes circulorum vt in ſuperiore & in ſexta expoſuimus; intelligatur aliud ſolidum cuius ſectiones ad poſitionem plani x a c ſint vt modo diximus quadrata vel quadrantes circulorum. Ex rectis a c, a b abſcindantur e a, a d inter ſe æquales.

Oſtendendum eſt ſolido ſectionis quadratæ genito ad poſitionem plani x a c, brachio d a, perpendiculo plano x a c æquiponderare idem ſpatium quod ſolido ſectionis quadratæ genito ad poſitionem plani x a b, brachio e a perpendiculo plano x a b. Idémque æquiponderans reſpondere ſolidis ſectionum periphericarum pari pacto comparatis.

Compleatur parallelogrammum e a b h, & ſuper recta h e ad poſitionem rectæ a c inſiſtat figura h m a e cuius quælibet dimetiens t m parallela rectæ a c ſit tertia proportionalis poſt primam t f dimetientem parallelogrammi e a b h, & ſecundam f i dimetientem figuræ b i c a; per m ducatur m q parallela ad rectam h e; ex punctis e, q educantur perpendiculares e o, q p ad planum h e a æquales dimetientibus h e, m q figuræ h m a e, & iungantur rectæ h o, m p quæ erunt ſectiones planorum o e h, p q m & ſuperficiei cylindraceæ deſcriptæ motu rectæ parallelæ ad rectam h o incedentis per limbum h m a, vt in corollario tertio primæ notatum extat. Intelligatur quoque ſuperficies cylindracea deſcripta ſimili pacto motu rectæ ad rectam h o parallelæ incedentis per limbum b i c. Per i ducatur planum parallelum plano x a c cuius cum ſolido contento ſub baſi b i c a & ſub cylindracea ſuperficie modo deſcripta ſit figura f s i; ſectio verò cum ſolido comprehenſo ſub baſi h m a e & ſub ſuperficie cylindracea primò deſcriptâ ſit r t m.

Quoniam vt in primæ pari prorſus caſu oſtendimus figura f s i eſt eadem cum figura b f i, & figura r t m eadem quoque eſt cum figura h t m; dimidium autem figuræ h t m ad poſitionem rectæ a c aptatum ſuſtentaculo h e axe b a æquiponderat figuræ b f i vt iacet manenti: ergò in plano r t i figuræ ſ f i vt iacet manenti axe ſ f ſuſtentaculo t r æquiponderabit dimidium figuræ t r m aptatum ſuſtentaculo r t. Igitur ex vigeſima octaua quarti tetragoniſmicorum dimidium ſolidi cuius ſectio eſt triangulum p m q aptatum plano h e o ad poſitionem plani x a c æquiponderat condicta ratione ſolido cuius ſectio eſt triangulum rectangulum i h u habens latera i h, h u æqualia, poſito libræ planæ axe b a, perpendiculo plano x a b, ſuſtentaculo plano h e o; ſiue quod in idem redit recta h e

obeunte vicem ſuſtentaculi. Igitur ſolido cuius ſectio eſt quadratum lateris h i duplum trianguli i h u, ad poſitionem plani x a c æquiponderat iiſdem poſitis ſolidum cuius ſectio eſt triangulum m q p. Sed ſolidum cuius ſectio eſt triangulum p q m eſt ad poſitionem plani x a b idem cum ſolido cuius ſectio eſt triangulum q y m contentum ſub lateribus q m, m y parallelogrammi p q m y, & ſub q y eius altera diametro: ſunt enim triangula p m q, y m q æqualia: ergo cùm ſolidum cuius ſectio eſt triangulum y q m habens angulum y q m ſemirectum, & angulum q m y rectum, ſit ex vigeſima tertia quarti tetragoniſmicorum æquale ſpatio quod cylindraceo altitudinis x a baſeos h m a e æquiponderat libræ planæ axe a c perpendiculo plano x a c, ſuſtentaculo d g latere parallelogrammi d a c g, patet ſpatium quod axe b a, ſuſtentaculo h e æquiponderat ſolido cuius ſectio eſt quadratum lateris i h vel h u eſſe æquale ſolido cuius ſectio eſt triangulum p q m. Cùm igitur per methodum vndecimæ cylindraceum cuius baſis eſt h m a e altitudo x a habeat ad poſitionem plani x a c idem æquiponderans cum ſolido cuius ſectio parallela plano x a c eſt quadratum lateris f i, patet ſolido cuius ſectio eſt quadratum lateris f i axe a c ſuſtentaculo d g æquiponderare idem ſpatium quod ſolido cuius ſectio parallela plano x a b eſt quadratum lateris h i, axe a b ſuſtentaculo h e, quod erat demonſtrandum. Nam de ſolidis periphericis cum eorum periphericæ ſectiones ſint proportionales ſectionibus quadratis, rationum conſequutio idem euincit.

COROLLARIVM I.

Hîc ſi quando opus fuerit adhiberi cum proportione debent corollaria primæ, vt patet.

COROLLARIVM II.

Rectæ a c inſiſtat ad poſitionem rectæ a d figura a d n c tertia poſt primam a d g c, & ſecundam a b i c, ita vt tres dimetientes l h, h i, h n ſint proportionales; ex demonſtratis liquet quadratricem figuræ h m a e libra d a ſuſpenſa ex a perpendiculo a e, brachio a d, eſſe æqualem ſpatio quod figuræ a d n c æquiponderat libra e c ſuſpenſa ex a perpendiculo a d brachio e a. Nam ſolidis quorum ſectiones ſunt quadrata laterum f i, h i æquiponderant ex præſenti æqualia ſpatia; ex prima verò illa ſpatia æqualia ſunt cylindraceo altitudinis a x, baſium æquantium ſpatia æquiponderantia modo iam præſcripto figuris h m a e, a d n c ergo &c. quod erat demonſtrandum. Hanc porrò propoſitionem extendemus ad curuas in ſeptimæ libri quinti corollario ſecundo.

PROPOSITIO XXI.

Reuocatâ figurâ vndecimæ & decimæ tertiæ (*Fig.* 27.) circa axem a c manentem gigni conoides motu figuræ A h c u intelligatur.

Oſtendendum eſt libra u c ſuſpenſa quolibet perpendiculo y b ſiue punctum y congruat puncto a, vel puncto u, ſiue non congruat, bra-

chio æquante rectam a c, æquiponderans conoidis istius portioni quæ iacet ad rectæ y t partes h esse idem cum æquiponderante conoidis alterius dimidio geniti circa axem y b motu eiusdem figuræ inuento in illis iam laudatis propositionibus.

Istud ita apertum est ex propositione superiore, vt nihil addendum sit, ne quicquam otioso scribatur calamo, dum ad alia currimus.

PROPOSITIO XXII.

REuocetur (*Fig.* 31.) figura decimæ octauæ, & ex recta a f abscindatur f p æqualis rectæ T f vel f g: intelligatur circa axem f c gigni conoides motu figuræ c b i L, ita vt punctum L sumptum sit ad libitum.

Ostendendum est centrum grauitatis dimidij conoideos abscissi plano u l c esse notum.

Per quartam inueniatur A cylindraceum æquale suspenso; per septimam & decimam inueniatur cylindraceum B æquale spatio quod axe f c, perpendiculo plano x f c, sustentaculo S p latere parallelogrammi p f c S æquiponderat suspenso. Per superiorem inueniatur cylindraceum C æquale spatio quod axe l i, perpendiculo plano u l i sustentaculo o t latere parallelogrammi l h t o, eidem solido æquiponderat. Vt est A suspensum ad B æquiponderans, ita fiat recta p f ad l q abscissam ex l h: vt autem est A ad C ita fiat l o brachium ad rectam l g abscissam ex l c: compleatur parallelogrammum q l g r.

Dico punctum r esse centrum grauitatis solidi quod ad rectæ f c partes b iacet.

Primò centrum grauitatis eiusmodi portionis solidi est in plano c f a, cùm sectiones illius plano u l h parallelæ, sint semicirculi diuisi bifariam per ipsum planum. Præterea ex puncto r excitetur perpendicularis r s ad planum h l c, ergo ex lege æquiponderantium reciprocâ cùm vt suspensum A ad æquiponderans B, ita fit interuallum f p ad g r, centrum grauitatis suspensi erit in plano s r q parallelo ad perpendiculum planum u l c. Simili pacto cùm vt suspensum A ad æquiponderans C, ita fit interuallum o l ad l g, centrum grauitatis suspensi erit in plano s r g; ergo erit in eorum communi sectione s r: sed est etiam in plano b g f: ergo punctum r est centrum grauitatis solidi propositi; ergo istud centrum est notum; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Si tota portio solidi quam vtrinque abscindit planum u l i sumatur, patet eius centrum grauitatis esse punctum g.

PROPOSITIO XXIII.

MAnente eadem figura decimæ octauæ, circa manentem l i intelligatur circumuolui eadem figura i z c l.

Oſtendendum eſt centrum grauitatis dimidij conoideos abſciſſi plano u l i eſſe notum.

Per decimam nonam primi libri inueniatur A cylindraceum æquale ſuſpenſo;& per decimam nonam præſentis ſpatium C æquiponderans ſuſpenſo libræ axe l i perpendiculo plano u l i, ſuſtentaculo o t; per vndecimam & decimam tertiam inueniatur ſpatium B quod æquiponderet ſuſpenſo libræ planæ axe l c, perpendiculo plano u l c, ſuſtentaculo p S. Vt eſt A ad B ita fiat o l recta ad l q; & vt A ad C, ita fiat ad l g. Dico completo parallelogrammo q l g r, punctum r eſſe centrum grauitatis quæſitum. Iſtud oſtenditur vt ſuperior propoſitio.

COROLLARIVM.

Si tota portio ſolidi ſumatur, patet eius centrum grauitatis eſſe punctum q.

PROPOSITIO XXIV.

OCTO problematis ab Anonymo propoſitis ſolutionem eſſe hactenus à nobis pro cycloide paruâ datam demonſtrare.

Primò iiſdem manentibus quæritur dimenſio ſpatij z c y. Demonſtratur in duodecima primi libri & in eius corollariis.

Secundò quæritur centrum grauitatis ſpatij z c y. Demonſtratur in corollario tertiæ.

Tertiò quæritur ſolidum circa baſim z y. Demonſtratur in decima nona primi libri.

Quartò quæritur ſolidum circa axem c y. Demonſtratur in quartâ huius libri.

Quintò quæritur ſolidi totius circa baſim z y centrum grauitatis. Demonſtratur in corollario ſuperioris.

Sextò quæritur centrum grauitatis ſolidi totius circa axem c y. Demonſtratur in corollario vigeſimæ ſecundæ.

Septimò quæritur grauitatis centrum dimidij ſolidi circa baſim z y diuiſi à plano per rectam z y ducto & recto ad c y z planum. Demonſtratur in ſuperiore.

Octauò quæritur centrum grauitatis dimidij ſolidi circa c y geniti & diuiſi à plano per rectam c y ducto & recto ad planum c y z. Demonſtratur in vigeſima ſecunda propoſitione: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXV.

PRoponitur calculus octo problematum pro duplici caſu quem Anonymus in primis ad Europæ Geometras literis deſignauit.

Sit a c d (*Fig.* 33.) cycloides parua circulo genitore diametri c f, eiuſque pars ſuperior ſit b c o, inferior b o d a; rectæ g e, f i abſciſſæ ex rectis b o, a d æquent ſingulæ rectam c g: ad planum c f a ex puncto f excitata ſit perpendicularis f n æqualis rectæ f g, & completum ſit parallelogrammum

logrammum n f g m. Vt quadratum circulo circumscriptum se habet ad ipsum circulum ita ponatur recta f n ad f u: intelligatur perspectæ progressionis in fronte huius libri definitæ primus terminus esse quadratum g c, vt secundus sit circulus genitor diametri f c, & tertius quadratum f a: erit ergo recta f n ad f u vt quadruplum primi termini perspectæ progressionis definitæ initio huius libri ad secundum: vel vt primus terminus ad quadrantem secundi. Per solos terminos istius perspectæ progressionis definiemus singulorum casuum epilogismum, vt methodi ratio clarior euadat, & vt quàm proximè ad vera spatia, rectas, & puncta accedere quilibet possit, assumpto quod Archimedes in tertia propositione circuli dimensionis demonstrauit, secundum huius progressionis terminum esse triplum primi, & adhuc superare parte quapiam quæ quidem minor est septima primi, maior autem decem septuagesimis primis eiusdem termini primi. Quod si quis recentiorum numeros alios grandiores & propiùs accedentes ad veram istius progressionis rationem abhibere maluerit, ipsi integrum esto.

Primò quæritur segmentum a c d, itémque segmentum b c o. *Istud constat ex duodecima propositione primi libri.*

Segmentum a c d æquat duplum termini secundi progressionis perspectæ; segmentum b c o æquat duplum termini primi.

Secundò quæritur grauitatis centrum pro figura c z b g, itémque pro figura c b a f. *Istud obtinebitur ex corollario secundo secundæ propositionis.*

Vt est primus terminus ad dimidium secundi imminutum primo, ita fiat recta g e ad g q abscissam ex g b. Vt autem idem primus terminus ad octauam partem secundi, ita fiat recta g f ad g y abscissam ex rectâ g c. Completo parallologrammo y g q p, dico punctum p esse centrum grauitatis in figura c z b g.

Præterea vt est secundus terminus ad dimidium tertij imminutum duplo primi, ita fiat recta f i ad f r abscissam ex f a: punctum t ita secet rectam c f vt tota c f ad f t sit sicut octonarius ad ternarium. Completo parallelogrammo t f r s, dico punctum s esse centrum grauitatis in figura c b a f.

In figuris autem b c o, a c d centra grauitatis sunt y & t.

Tertiò quæritur solidum genitum circa basim b o circumuolutione figuræ b c o, itémque aliud circa basim a d circumuolutione figuræ a c d. *Istud obtinetur per decimam nonam primi libri.*

Solidum genitum circa rectam b o est æquale cylindraceo altitudinis f u, baseos æquantis duplum secundi termini; vel per leges reciprocationis altitudinis f n, baseos æquantis dimidium tertij termini. Solidum verò aliud est æquale cylindraceo altitudinis f u, baseos æquantis duode-

cim terminos ſecundos, vel reciprocè altitudinis f n, baſeos æquantis triplum tertij termini perſpectæ progreſſionis.

Quartò quæritur ſolidum genitum circumuolutione figuræ c z b g circa rectam c g manentem; & aliud præterea genitum circumductu figuræ c b a f circa rectam c f manentem. *Iſtud habetur ex quarta propoſitione.*

Solidum primò quæſitum eſt æquale cylindraceo altitudinis f u, baſeos æquantis quadruplum ſecundi termini imminutum octuplo primi: vel reciprocè altitudinis f n, baſeos æquantis tertium terminum, imminutum duplo ſecundi. Alterùm verò ſolidum eſt æquale cylindraceo altitudinis f u, baſeos æquantis quadruplum tertij, termini imminutum ſexdecuplo primi: vel reciprocè altitudinis f n, baſeos æquantis quartum terminum imminutum quadruplo ſecundi.

Quintò quæritur centrum grauitatis ſolidi circa b g geniti motu figuræ c z b g, itémque alterius geniti motu figuræ c b a f circa manentem a f. *Iſtud obtinetur ex corollariis vndecimæ & decimæ tertiæ libri præſentis.*

Vt ſecundus progreſſionis terminus ad quadrantem tertij imminutum primo, ita fiat recta g e ad g q abſciſſam ex recta g b. Dico punctum q eſſe centrum grauitatis pro primo caſu.

Vt autem ſextuplum eiuſdem ſecundi termini ad triplum tertij imminutum ſexdecuplo primi, ita fiat recta f i ad f r abſciſſam ex rectâ f a. Dico punctum r eſſe centrum grauitatis pro caſu ſecundo.

Sextò quæritur centrum grauitatis ſolidi circa c g geniti motu figuræ c z b g, itémque alterius geniti motu figuræ c b a f circa manentem c f. *Habetur ex vigeſima prima & ex corollariis vndecimæ & decimæ tertiæ.*

Vt quadruplum ſecundi termini imminutum octuplo primi ſe habet ad quadrantem tertij imminutum primo, ita fiat recta f g ad g y abſciſſam ex g c. Dico punctum y eſſe centrum grauitatis pro primo caſu.

Vt autem quadruplum tertij imminutum ſexdecuplo primi ſe habet ad triplum eiuſdem tertij imminutum ſexdecuplo primi, ita fiat recta x f ad f t abſciſſam ex f c. Dico punctum t eſſe centrum grauitatis pro ſecundo caſu.

Septimò ſolidum genitum circa rectam b g circumuolutione figuræ c z b g intelligatur diuidi bifariam per planum m g b, nec non ſolidum genitum circa rectam f a circumuolutione figuræ c b a f per planum n f a. Quæritur centrum grauitatis dimidij ſolidi in vtroque caſu. *Obtinetur per decimam nonam propoſitionem.*

Vt octaua pars tertij termini ad quatuor nouenas primi, ita fiat recta

g f ad g y abſciſſam ex g c, & manente puncto q in ſolutione quinti reperto compleatur parallelogrammum y g q p. Dico punctum p eſſe centrum grauitatis pro primo caſu.

Vt autem tertij termini dodrans ad quinque trientes ſecundi ita fiat recta f x ad f t abſciſſam ex recta f g; manente autem puncto r reperto in ſolutione quinti compleatur parallelogrammum t f r s. Dico punctum s eſſe centrum grauitatis pro ſecundo caſu.

Octauò ſolidum genitum circa rectam c g circumductu figuræ c z b g intelligatur bifariam diuidi per planum m g c, item aliud ex circumductu figuræ c b a f concipiatur bifariam ſecari per planum n f c. Quæritur centrum grauitatis dimidij ſolidi pro vtroque caſu. *Habetur ex ſeptimæ & decimæ corollariis.*

Vt dimidium tertij termini imminutum ſecundo ad idem dimidium tertij imminutum quadruplo primi, ita fiat g e recta ad g q abſciſſam ex g b; manente autem puncto y quod in ſolutione ſexti repertum eſt, compleatur parallelogrammum y g q p. Dico p eſſe centrum grauitatis quæſitum in primo caſu.

Rurſus vt dimidium quarti terminni imminutum duplo ſecundi ad beſſem quarti termini imminutum quadruplo ſecundi, ita fiat f i recta ad f r abſciſſam ex f a; manente verò puncto t quod in ſolutione ſexti ſuprà inuenimus compleatur parallelogrammum t f r s. Dico punctum s eſſe centrum grauitatis pro ſecundo caſu. Ergo &c. quod erat propoſitum.

SCHOLIVM I.

Cùm vt ſuſpenſum ad æquiponderans, ita ſit x f ad f t, & i f ad f r, & e g ad g q, & f g ad g y,; ipſa verò ſuſpenſa & æquiponderantia ſint interdum ſolida, loco ipſorum ſolidorum vſurpauimus in calculo baſes eorum ad eandem altitudinem reuocatorum; tunc enim vt ſolida, ita & baſes. Porrò vt dignoſcamus pingui quadam minerua inter computandum vtrum punctorum q, y, r, t epilogiſmus rectè incedat duæ iſtæ regulæ adhiberi poſſunt. Prima eſt, portiones a r, b q, c t, c y eſſe maiores dimidio ipſarum rectarum a f, b q, c f, c g. Altera eſt, in ſolidis eaſdem a r, b q, c t, c y eſſe maiores, quàm in planis. Si itaque in ſubducendis rationibus appareat aliquid peccari contra aliquam harum regularum, cohibendus eſt calculus, & retrotexendus quouſque origo erroris occurrat. Id autem nullo negotio apparére poteſt exercitatis cogitantibus ſecundum terminum continere ter primum & vnam fermè ſeptimam ipſius. Atque hæc omnia obſeruanda erunt in calculo quem ſub calcem libri ſequentis adſcripſimus. Supereſt vt ad ipſum quartum librum progrediamur, in quo inueniendo mirum quantum laborauit mens noſtra, nec vnquam niſi illi Deus optimus ſpeciali face præluxiſſet, rem inuentu difficillimam exploraſſet.

SCHOLIVM II.

Quoniam Autor Hiſtoriæ Cycloideos multa de me ſcripſit calumnioſa, non poſſum quin literas D. Paſcalij ad me datas hîc repræſentem, quarum ſola lectione falſitas Hiſtoriæ manifeſta fiat. Is igitur cùm Pariſios miſiſſem calculum duplicem ſolidi circa

axem geniti, de quo problema præsentis propositionis quartum agit, respondit XI. *Septemb.* 1658. *in hæc verba.* Vtinam, mi Pater, inspicere posses quantum sit illud gaudium quo postremæ tuæ literæ me affecerunt, quando in iis legi te inuenisse dimensionem solidi circa axem tam cycloideos totius, quàm dati segmenti. Credas velim neminem esse qui mihi par sit in extollendis meritis hominum: sed, fateor, ad id non adducor vnquam nisi graui de causa. Rara, profectò & eximia virtus præcipuè in iis qui scientias profitentur, est ille sincerus omnisque inuidiæ vacuus animi candor quo nunc ego glorior, & quem tuâ causâ quoties occasio se dederit manifestum omnibus faciam. Hoc enim tibi seriò affirmo tanto me gaudio nunc exultare, dum palàm omnibus prædico à te solutum esse vnum ex difficillimis Geometriæ problematis, quanto mærore antea premebar dum veritatis non dissimulandæ studio coactus fatebar priora illa quorum solutionem edidisti non nisi tantillum quid præ magnis istis inuentis esse. Dubitari non potest, Pater mi, quin istud Problema sit verè magnum; quare optarem addiscere quænam te via eò deduxerit: nam, vt vno verbo rem dicam, D. Roberuallius vir certè eruditissimus, sex annos impendit in eo inueniendo, sed methodo quæ non exhibet nisi vnum casum, nempe cycloideos totius; tu verò habes solutionem pro omni etiam segmentorum casu generalem, quod ego semper extollam, summorumque inuentorum laude dignum comprobabo. *Postea verò decimo octauo eiusdem illius mensis cùm numeros calculi nostri examinasset, scripsit iterum his verbis.* Tibi satis explicare non possum, Pater mi, quàm impatienter hîc optemus viam scire quam tibi fecisti in inueniendis solidis circa Cycloideos axem genitis. Tuus porrò illorum calculus nuper ad nos missus ne erroneus esset, iniuriâ timebam; examine enim accurato comperi eum omni prorsus errore vacare.... Sed vt ad te redeam, mi Pater, nullam quietem capiam quousque à te obtinuerim vt me doceas qua methodo perueneris ad illa solida, vel quod (vt tibi aliàs significaui) in idem redit, ad solida ex rectis, quæ arcubus circuli sint æquales, generata; cupidè enim & curiosè admodum illam addiscere expeto.... *Cæterum quod in vtraque hac epistola D. Pascalius assumit ex inuentâ solutione problematum in cycloide paruâ, citato cursu statim perueniri ad solutionem eorundem in magnâ, id nostrâ nobis experientiâ non constat, sed contrarium potiùs, vt ex toto libro sequenti patebit. Historiæ illius Autor Dettonuillæus, quem dicunt esse Pascalij imprimis necessarium, postquam nostrum istum calculum vidit & examinauit, cauillatorem eum fore asseruit, qui methodum illam Roberuallianam esse generalem negauerit. D. Pascalij erit illum admonêre, hoc sine cauillo vllo à se ita ad amicos perscriptum fuisse. Fortasse dum D. Pascalius hæc ad me scribebat, methodus erat adhuc particularis, & de illa cuiusmodi erat testatus est; interlabente verò tempore de particulari facta est generalis, prout sæpè accidit, atque de hac ita prouectâ loquutus fuerit Dettonuillæus. Porrò Geometras rectè venatoribus comparari in confesso est; sicuti enim sæpe venatoriæ artis minus periti fortunatiores sunt in inueniendâ & capienda præda, ita non raro minùs nobilis Geometra*

fœlicior nobiliore est in indaganda solutione alicuius problematis. Certè nullus est qui tantum sibi in hoc inuentionis negotio arroget, vt auxiliantis Numinis immemor vocem illam in sacris libris consignatam verè & sincerè vsurpare recuset, voluntas Dei fuit, vt citò occurreret mihi quod volebam. *Hoc quippe est ipsum quod Rex ille sapiens vidisse se pronuntiat,* nec velocium esse cursum, nec fortium bellum.... Sed tempus casumque [*cui Deus supremus cunctorum moderator præest*] in omnibus.





DE CYCLOIDE LIBER QVARTVS.

In quo octo ab Anonymo proposita de magnâ Cycloide problemata soluuntur.

PROPOSITIO PRIMA.

SIT (*Fig.* 34.) quadratum a b d f, & ex a excitata sit a o perpendicularis ad a b d f æqualis lateri a f: in planis o a b, o a f descripti sint quadrantes circulares o n b a, o z f a. Intelligatur solidum cuius quælibet sectio n m e p parallela plano o a f sit quadrans ellipseos semiaxium n p, p e; sit autem n p ordinatim applicata ad circuli o n b a semidiametrum a b, & p e compleat parallelogrammum f a p e. Eiusmodi solidum intelligatur secari quocunque plano h g c ad planum o a b parallelo, & eius cum solido sectio sit h m c g comprehensa sub linea h m c, & sub rectis g h, g c, quarum g h est ordinatim applicata ad a f semidametrum circuli o z f, & g c compleat parallelogrammum g a b c.

Ostendendum est sectionem h m c g esse quadrantem ellipseos semiaxium h g, g c.

Compleatur parallelogrammum g h s c, & intelligatur cylindrus cuius basis sit o h f a, axis a b, eius verò sectio per axem a b sit parallelogrammum a o q b; In recta g c sumatur quoduis punctum l & per l ducta sit p e parallela rectæ a f; ex p excitata sit p n parallela rectæ a o occurrens peripheriæ o n b in n; rectæ o q in r; sit r u e p sectio cylindri, quadrans videlicet circularis æqualis quadranti o h f a: ergo cùm isti quadrantes secentur plano h g c, ordinatim applicatæ g h, l u effectæ occursu illius plani sunt inter se æquales. Recta l u occurrat curuæ h m c in m. Quoniam quadrantis circularis r u e p, & quadrantis elliptici n m

e p communis est semiaxis p e sectus in l, vt est alter semiaxis r p ad alterum p n, ita est ordinatim applicata l u ad ordinatim applicatam l m: igitur vt r p vel o a ad ordinatim applicatam p n in quadrante circulari o n b a, ita est u l vel g h ad l m. Quoniam ergo quadranti circulari o n b a ita respondet figura h m c g, vt si ex a b, g c auferantur æquales a p, g l & ad a b semiaxem quadrantis circularis excitetur ordinatim applicata p n, recta verò l m parallela rectæ g h occurrat limbo h m c in m, sicut est a o ad p n, ita sit g h ad l m, ex vigesima prima primi conicorum inferetur figuram h m c g esse quadrantem ellipseos semiaxium h g, g c, quod erat demonstrandum. Istud solidum dicatur *Vtrinque ellipticum*, eiusque *basis b a f d*, *quadrans circularis genitor*, *o n b a*.

COROLLARIVM.

Iste demonstrandi modus latissimè patet, estque imprimis vtilis ad plurima è tenebris eruenda. Eo verò iam ante vsi sumus in decima sexta superioris libri.

PROPOSITIO II.

VTtrinque elliptici basis sit (*Fig*. 35.) quadratum a b e c, cuius diameter a e; sit f c dupla rectæ a c, basisq; segmenti parabolici, cuius axis a t sit æqualis rectæ a b: sumptum sit in diametro a e quodcunque punctum g, & per g ductæ sint i m, f h complentes parallelogramma a i m c, a f h b; per puncta f, i ducantur ordinatim applicatæ t n, i l ad semidiametros a c, a b quadrãtium circularium a d n c, a d l b: plani l i m sectio cum solido vtrinque elliptico sit l o m i quadrans ellipticus; sectio plani n f h cum eodem solido sit n o h alter quadrans ellipticus, vt ex superiore patet; lineæ l o m, n o h secent se in puncto o superficiei ellipticæ; iungatur recta o g quæ erit perpendicularis ad planum b a c, cùm sit communis sectio planorum n f h, l i m rectorum ad planum b a c, ac proinde erit in plano d a e. Sectio plani eiusdem d a e cum superficie elliptica sit d o e.

Ostendendum est figuram d o e a esse semisegmentum parabolicum, cuius axis a d, ordinatim applicata a e, & si recta g f producta occurrat limbo parabolæ s t c in u, rectam f u esse æqualem rectæ g o.

Centro a semidiametro a t descriptus sit quadrans circularis a t z c, cuius peripheriæ t z c recta f u occurrat in z: igitur rectæ f n, f z sunt æquales; & per tertiam tertij tetragonismicorum tres rectæ b a, f z, f u sunt proportionales. Rursus quoniam a i, a f latera quadrati a i g f sunt æqualia, erunt l i, f n æquales: ergo per demonstrata in progressu superioris vt d a recta ad l i, ita est f n ad g o, ac proinde cùm l i, f n sint æquales, tres rectæ a d vel b a, l i vel f z, & g o sunt proportionales: ergo

cùm tres etiam rectæ b a, f z, f u ostensæ sint proportionales, rectæ g o, f u sunt æquales; & figura d o e a est semisegmentum parabolicum, cum d a ad g o sit sicut a t ad f u, & rectæ a e, a c secentur proportionaliter in g & f: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Si recta b t poneretur basis segmenti parabolici cuius axis a s, perinde ostenderetur ad positionem plani d a c rectam o g fore æqualem rectæ i p parallelæ axi s a & in puncto p conuenienti cum parabolico limbo s p b.

COROLLARIVM II.

Recta a c ita diuidatur in x vt portio x c sit ad a x sicut quinarius ad ternarium, & per x agatur recta x y parallela rectæ a t: igitur ex corollario quarto primæ quarti libri tetragonismicorum figuræ a t u c centrum grauitatis est in recta x y: ergo si libra s c suspendatur ex a, perpendiculo a t, brachio s a æquiponderans eiusmodi figuræ erit tres octauæ partes ipsius figuræ: sed ipsa est bes quadrati a c; ergo æquiponderans illi figuræ est quadrans quadrati a c. Igitur per methodum corollarij quarti decimæ quartæ superioris libri cuneatum solidum genitum ad positionem plani d a b ex triangulo a e c & ex parabolica figurâ a t u c totâ, est æquale cylindraceo altitudinis d a, baseos æquantis quadrantem quadrati a c. In aliis verò casibus quando non sumetur tota figura a t u c, sed eius quælibet pars ad positionem rectæ a t, pari methodo inuenietur portio cuneati illi respondens.

PROPOSITIO III.

Ostendendum est iisdem manentibus, solidum vtrinque ellipticum esse ad cylindrum baseos a d l b altitudinis a c, vt est circulus ad quadratum suæ diametri.

Quoniam enim sectio quæcunque l o m i est ad rectangulum m i l sub semiaxibus l i, i m comprehensum vt est circulus ad quadratum suæ diametri, patet ex vndecima quarti tetragonismicorum, totum solidum cuius sectio est rectangulum l i m esse ad solidum cuius sectio est quadrans ellipticus l o m i, vt est quadratum diametri circularis ad ipsum circulum: sed solidum cuius sectio est rectangulum l i m parallelum rectæ a c perpendiculari ad planum d a b, & ex centro circuli d l b eductæ, est cylindrus habens axem a c, basim b l d a; ergo illud solidum de quo agit præsens propositio est ad cylindrum baseos a d b l altitudinis a c, vt est circulus ad quadratum suæ diametri.

PROPOSITIO IV.

Iisdem manentibus ostendendum est solidum illud cuius sectio est l o m i parallela plano d a c, diuidi bifariam per planum d a e: & quodcunque quadratum a i g f ducatur circa diametrum a e, portionem solidi insistentem quadrato a i g f diuidi bifariam à plano d a e.

Per i,

Per i, f ducantur i l, f n ordinatim applicatæ ad semidiametros a b, a c quadrantium circularium d a b l, d a c n. Quoniam a i, a f sunt æquales, sunt quoque l i, f n æquales; ergo quadrantes elliptici l i m o, n f h o sunt æquales & similes: ergo portio n f g o est æqualis portioni l i g o: ergo si portio insistens triangulo a c e intelligatur manente a circumferri donec recta ac rectæ a b congruat, & recta c e iaceat in directum rectæ b h, duo ista solida talia erunt vt ad positionem plani d a c sint condicta ratione æqualia: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO V.

Iisdem manentibus portio eiusdem solidi insistens parallelogrammo f h e c ad positionem plani d a c est ad cylindrum cuius basis sit quadrans ellipticus n o h f, altitudo f c, vt quadrantis circularis d n q c a portio n q c f ad parallalogrammum n f c.

Quoniam quodcunque planum l i m ducatur parallelum plano d a c, faciensque sectionem l o r m i quæ sit quadrans ellipseos semiaxium l i, i m, semiaxis i m secatur in g, sicuti semiaxis a c in f, vt quadrans circularis d a c q n ad sui portionem n q c f ita est quadrans ellipticus l i m r o ad portionem sui o r m i; ergo vt rectangulum n f c ad figuram n q c f in ipso contentam, ita rectangulum o g m ad figuram o r m g in ipso inclusam: igitur per vndecimam quarti tetragonismicorum, vt figura n f c q ad rectangulum n f c, ita ad positionem plani d a c est portio solidi vtrinque elliptici insistens parallelogrammo f h e c ad solidum cuius sectiones sunt parallelogramma n f c, o g m; sed solidum cuius sectiones sunt illa parallelogramma est, vt ex superioris pari casu patet, cylindrus aut quasi cylindrus (hoc enim nomen paulò latiùs sumere cogimur) baseos f n o h altitudinis f c: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quoniam ex superiore nota est portio insistens parallelogrammo a i m c, & ex præsenti nota est portio insistens parallelogrammo f g m c, patet notam esse portionem insistentem quadrato a i g f. Similiter quoniam ex superiore nota est magnitudo insistens parallelogrammo a c e b, & ex præsenti insistens parallelogrammo f h e c, nota erit insistens parallelogrammo a b h f: ergo dempta portione quæ quadrato a i g f incumbit, nota erit portio parallelogrammi b i g h, quamuis b h latus non foret in latere quadrati a e, sed ei æquidistaret.

COROLLARIVM II.

Ex demonstratis hactenus in præsenti libro patet portionem solidi vtrinque elliptici interceptam planis d a e, d a c vnà cum dimidio cuneati dicylindracei expositi in corollario secundo secundæ, complecti dimidium solidi quod ad cylindrum altitudinis a c, baseos d l b a, sit vt circulus ad quadratum ipsi circumscriptum, insuper verò complecti parallelepipedum altitudinis a c, baseos æquantis semiquadrantem quadrati

a c. Duplum igitur complectetur cylindraceum altitudinis d a cuius basis contineat quadrantem quadrati a c vel d a, & spatium quod ad quadrantem circularem a d l b sit vt circulus ad quadratum circumscriptum. Simili pacto procedendum erit in aliis casibus.

PROPOSITIO VI.

MAneat solidum vtrinque ellipticum (*Fig.* 36.) cuius basis sit quadratum a b e c, quadrans circularis genitor d l b a, alter quadrans ad positionem plani d a c sit d n c a: in plano a b e c super latere b a constructum sit aliud quadratum b a C B. Centro a descriptus sit quadrans circularis C y b a, cui ita respondeat figura C u b a, vt quæcunque i u parallela rectæ a C ducatur occurrens in y peripheriæ C y b; in u limbo C u b; in A rectæ C B, tres rectæ A i, i u, i y sint perpetua lege proportionales. Intelligatur a o b quadratrix respondens figuræ C u b a, ita vt sicut brachium a D æquans rectam a b se habet ad a i, sic se habeat i u ad i o dimetientem figuræ quadratricis. Motu figuræ C u b a circa rectam b a manentē descriptum sit periphericum solidum cuius quadrans insistens figuræ C u b a hîc tantummodo consideratur: intelligatur quoque cylindracea superficies descripta motu parallelæ ad rectam a d incedentis per limbum a o b: huius verò superficiei portio intercepta superficie peripherici & plano C a b vocetur *septum medium* quadratricis.

Ostendendum est ad positionem plani d a c periphericum & solidum vtrinque ellipticum esse condicta ratione æqualia. Item portionem peripherici insistentem inter curuas C u b, a o b portioni alterius solidi interceptæ inter plana d a e, d a c esse æqualem; & consequenter portionem peripherici residuam portioni alterius solidi residuæ. Denique si agatur q i u planum parallelum plano d a c, eiusque sectio cum peripherico sit quadrans circularis i u r q, & ex puncto o excitetur ordinatim applicata o r parallela semidiametro i q, iungaturque recta i r constituens sectorem r i u, solidum cuius sector est r i u esse condicta ratione æquale portioni alterius solidi interceptæ inter plana d a e, d a c, & simul dimidio dicylindracei cuneati geniti ex triangulo b a e, & ex parabola B z a b cuius vertex a, axis a b, ordinatim applicata b B.

Quoniam enim tres rectæ i m vel A i, i u & i y vel i l ordinatim applicata parallela semidiametro a d quadrantis circularis d l b a sunt per constructionem proportionales, rectangulum l i m erit æquale quadrato i u; ergo & quadrans ellipseos semiaxium l i, i m erit æquale quadranti circulari u r q i: ergo ad positionem plani d a c periphericum & solidum

vtrinque ellipticum sunt æqualia. Quod ad æqualitatem portionum attinet, demonstratur eodem pacto quo in superioris libri decima sexta eiusque corollariis vsi sumus pro simili causa: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex corollario secundo superioris liquet bis totum solidum cuius sectio est sector r i u esse æquale cylindraceo altitudinis a d vel a b cuius basis contineat quadrantem quadrati a c vel d a, & spatium quod ad quadrantem circularem a d l b sit vt circulus ad quadratum circumscriptum.

PROPOSITIO VII.

Maneat (*Fig.* 37.) peripherici quadrans geniti motu figuræ C u b a circa axem b a, eiusque sectio sit quadrans circularis u r q i, maneátque, vt supra, sector u r i: sit parua semicycloides superior g z b a, eiusque ordinatim applicata i z parallela lateri b B quadrati a b B C. Sit figura b m c a ita se habens ad figuram b z g a ad positionem rectæ a C, vt sicut est A i vel a C recta ad i z, ita i y ordinatim applicata ad a b semidiametrum quadrantis circularis C y b a sit ad i m dimetientem figuræ b m c a.

Ostendendum est figuram b m c a vel totam vel ex parte sumptam esse ad positionem rectæ a c æqualem rectilineo noto, positâ quadraturâ circuli: in casu verò quo tota sumitur, ipsam esse æqualem quadranti quadrati a b, & spatio quod ad quadrantem circuli semidiametro a b descripti sit vt circulus ad quadratum circumscriptum.

Istud demonstratur vt decima septima prioris libri. Nam si intelligatur cylindrus cuius axis a b, basis sit quadrans B f b circuli ad planum c a b recti centro b descripti, & iungatur diameter a B quadrati C B b a per quam ducatur planum rectum d a B secans quadrantis circularis A h e i peripheriam in h; rectæ h i & r i iacebunt in eadem recta vt ibidem ostendimus, & vt A i recta ad y i, ita erit sector A h i ad sectorem u r i, & ita bis solidum cuius sectio est sector A h i ad bis solidum sectoris u r i.

Rursus solido bis sectoris A h i æquale est ad positionem plani d a C cylindraceum altitudinis d a æquantis rectam a b, baseos g z b a, vt ex tertia primi constat. Quoniam igitur vt A i recta ad i z, ita est i y recta ad i m, ita quoque erit rectangulum altitudinis communis d a, baseos z i, ad rectangulum baseos i m; cùm autem ita etiam sit bis sector A h i hoc est rectangulum baseos z i, ad bis sectorem u r i, rectangulum baseos i m erit æquale bis sectori u r i: ergo cùm per superiorem notum sit cylindraceum altitudinis d a, ad positionem plani d a C æquale solido bis sectoris u r i, nota quoque erit basis b m c a. Ex corollario verò supe-

rioris tota b m c a erit æqualis quadranti quadrati a b, & ſimul ſpatio quod ad quadrantem circuli ſemidiametro a b deſcripti ſit vt circulus ad quadratum circumſcriptum, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Spatium quod ad circulum ſit vt ipſe circulus ad quadratum circumſcriptum eſt quadratum quod poteſt a g, vel recta æqualis quartæ parti peripheriæ eiuſdem circuli: nam ex corollario ſecundo decimæ nonæ primi libri, quadratum circumſcriptum eſt ad circulum vt b a ſemidiameter circuli ad a F rectæ a g dimidium. Cùm igitur rectangulum contentum ſub b a & ſub a F dimidio rectæ a g ſit quadrans circuli ſemidiametro a b deſcripti, & vt quadratum b a ad rectangulum b a F, ita ſit b a F ad quadratum a F patet vt quadratum circumſcriptum ad circulum, ita eſſe b a F ſiue quadrantem circuli ad quadratum a F, ſiue ad quadrantem quadrati a g: ergo vt quadratum circumſcriptum circulo eſt ad ipſum circulum, ita eſt circulus ad quadratum a g. Igitur ſpatium quod ad quadrantem circuli ſit vt quadratum circumſcriptum circulo ad circulum, eſt quadrans quadrati a g: vel decima ſexta pars quadrati quod poteſt dupla rectæ a g.

PROPOSITIO VIII.

SIt parua ſemicycloides tota c b a f (*Fig.* 38.) circulo genitore diametri c f, ſemidiametri g f procreata; ſit ſemicirculus genitor c o f, & intelligatur ad poſitionem plani t f a recti ad planum c f a generari dicylindraceum ex tota ſemicycloide & ex c o f ſemicirculo: item ex quacunque c b h d & ex c o e d.

Oſtendendum eſt in primo caſu illud ſpatium eſſe æquale cylindraceo altitudinis g f, baſeos æquantis quadrantem quadrati f a; in aliis verò caſibus æquantis rectilineum notum, datâ circuli quadraturâ.

Intelligatur ſemicycloides parua f r ſ c ſubcontrariè poſita: igitur duæ ſimul z y, y q æquant totam a f: igitur dicylindraceum genitum ex g o p c & ex figuris c z b g, c ſ q r g eſt æquale cylindraceo altitudinis f a vel c s, baſeos c p o g: ergo cum dicylindraceo genito ex figuris c p o g, c ſ q r g æquale ſit dicylindraceum genitum ex figuris b h a f g, g o e f, patet dicylindraceum genitum ex ſemicirculo c o f, & ex tota c b a f eſſe æquale cylindraceo baſeos c p o g, altitudinis f a: hoc eſt altitudinis g f baſeos æquantis quadrantem quadrati f a. Nam ſi fiant tres rectæ g f, f a, f u proportionales, cùm rectangulum g f a ſit æquale circulo diametri c f, quadrans rectanguli g f a erit æqualis quadranti circuli c f. Igitur cùm cylindracea ęqualia habeāt reciprocè baſes & altitudines proportionales, vt altitudo f g ad altitudinem f a, ita reciprocè erit baſis c g o p ſiue qua-

drans rectanguli g f a ad quadrantem rectanguli g f u, hoc est ad quadrantem quadrati f a; quod erat primò ostendendum.

Rursus inuenire oporteat dicylindraceum genitum ex figuris c z b h d, c p o c d; ponimus autem figuram c b h d esse maiorem parte superiore c z b g; nam si sit illi æqualis, vel sit ea minor problema solutum est in superiore. Ex recta g c abscindatur g y æqualis rectæ g d. Ex methodo demonstrationis pro primo casu vsurpatæ liquet ex figura z y d h, & ex y p e d idem gigni spatium quod ex figuris b z q r, y p o g, nempe cylindraceum altitudinis f a, baseos y p o g: sed ex superiore constat dicylindraceum genitum ex figuris c z y, c p y: ergo per additionem constat dicylindraceum genitum ex figuris c b h d, c p e d: quod erat secundum ex demonstrandis.

PROPOSITIO IX.

Iisdem manentibus (*Fig.* 38.) sit semicycloides magna a m n c f ita vt figura a m n c z b sit ad positionem rectæ f a condicta ratione æqualis semicirculo genitori c o f.

Ostendendum est libræ planæ axe c f, sustentaculo o u, notum esse ad positionem rectæ a f æquiponderans cycloidi magnæ vel toti vel ex parte designatæ.

Ducatur quæcunque n y parallela rectæ f a occurrens limbo cycloidis magnæ in n, cycloidis paruæ in z, & axi c f in y. Quadratum lateris n y est æquale duobus quadratis n z vel y p, z y & simul bis rectangulo n z y. Si ergo intelligatur solidum cuius basis sit a m c f, sectiones verò eius parallelæ plano t f a sint quadrata laterum n y, l d &c. patet istud solidum esse æquale solidis quadratorum z y, y p, & bis rectanguli z y p. Atqui solidum quadrati z y demonstratur ex tertij quarta; solidum verò quadrati y p habetur ex secunda quinti tetragonismicorum; solidum verò bis rectanguli z y p obtinetur ex superiore: ergo notum est solidum cuius sectio parallela plano t f a est quadratum lateris n y. Ergo ex corollario quarto octauæ libri superioris dimidium baseos cylindracei habentis altitudinem c g & æquantis solidum iam dictum est æquiponderans quod erat inueniendum.

COROLLARIVM I.

Pro casu totius semicycloideos magnæ a m c f, solidum quadrati y p est cylindraceum altitudinis g c, baseos æquantis bis bessem quadrati g c; solidum bis rectanguli z y p est per superiorem æquale dimidio quadrati f a; solidum verò quadrati z y cùm sit duplum æquiponderantis inuenti in corollario secundo secuudæ libri superioris, est cylindraceum eiusdem altitudinis, cuius basis sit quadratum a f imminutum quadrato c f: Totum igitur solidum pro illo casu est tres semisses quadrati f a, deducto besse quadrati c f: ergo æquiponderans pro isto casu est tres quadrantes quadrati f a, deducto triente quadrati f c.

COROLLARIVM II.

Pro caſu ſuperioris partis c n m g ſolidum quadrati y p eſt cylindraceum altitudinis g c baſeos æquantis beſſem quadrati g c: ſolidum bis rectanguli z y p eſt per ſeptimam eiuſque corollarium, cylindraceum eiuſdem altitudinis baſeos æquantis dimidium quadrati g c & ſimul octauam partem quadrati f a: ſolidum verò quadrati z y eſt duplum ſpatij inuenti in corollario ſecundo ſecundæ ſupra laudatæ nempe circulus c f dempto bis quadrato g c. Summa ex tribus collecta eſt circulus genitor auctus octaua parte quadrati f a, & imminutus quinque vigeſimis quartis quadrati f c: ergo æquiponderans pro iſto caſu eſt ſemicirculus genitor, auctus decima ſexta parte quadrati f a, & imminutus quinque quadrageſimis octauis quadrati f c.

COROLLARIVM III.

Quoniam ex primi decima ſexta habetur æquiponderans eidem figuræ axe z y, & ex præſenti habetur axe c f, ipſum verò ſuſpenſum eſt notum per duodecimam primi, patet ex methodo tertiæ tertij libri inueniri centrum grauitatis figuræ c n y.

PROPOSITIO X.

Iſdem manentibus oſtendendum eſt (*Fig.* 38.) notum eſſe ſolidum periphericum circa manentem f c motu cycloideos magnæ a m c f deſcriptum, ſiue totum ſumatur, ſiue quælibet eius pars ad poſitionem plani t f a.

Vt quadratum circumſcriptum circulo eſt ad ipſum circulum ita recta f t (quæ æqualis eſt rectæ f g) fiat ad f x. Dico octuplum baſeos æquiponderantis reperti in ſuperiore propoſitione eſſe baſim cylindracei altitudinis f x, quod ſit æquale ſolido propoſito, & quadruplum ſemiſolido. Iſtud patet ex methodo decimæ nonæ primi libri: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Igitur baſis cylindracei habentis altitudinem f x æquantis periphericum genitum circa rectam c g motu figuræ c n m g æquat quadruplum circuli genitoris auctum dimidio quadrati f a & imminutum quinque ſextantibus quadrati f c. Baſis verò cylindracei æquantis periphericum genitum circa rectam c f motu figuræ c b a f æquat ſextuplum quadrati f a imminutum octo trientibus quadrati f c.

PROPOSITIO XI.

Sit vt in vndecima (*Fig.* 39.) ſuperioris libri h o c g pars ſuperior cunei expanſi geniti circulo ſemidiametri g c, ſitque f q t h g figura ex ſinibus verſis illi ita reſpondens vt tres dimetientes l e, e o, t e ſint proportionales. Sit cycloidis magnæ pars ſuperior g c z b eodem

circulo genitore descripta. Sit f u B parabola cuius axis f g, ordinatim applicata g B æqualis ipsi f g: sit c A B quadrans circuli genitoris: in recta g c sumptum sit quodcunque punctum y, & per y ordinatim applicata y z occurrens limbo cycloidis magnæ in z, paruæ in o. Sit figura f a C b g ita descripta vt quæcunque z C parallela axi g c ducatur occurrens basi g b in i, curuæ f a b in C, rectæ f l in d, tres rectæ d i, i z, i C sint proportionales: per C ducatur C x parallela rectæ b g occurrens lineis f q h, f g, f u B in t, x, u.

Ostendendum est rectas t C, x u esse æquales.

Recta z y producta occurrat arcui circulari c B in A. Quoniam ex prima propositione libri primi rectæ z o, y A sunt æquales, erunt quoque y A, C t æquales. Nam cùm rectæ l e, D i sint æquales, item e o, i z, tertia proportionalis post rectas l e, e o erit æqualis rectæ C i vel t e; sed illa in recta l o intercipitur inter curuam f q h & rectam h g: ergo punctum t iacet in recta l e. Cùm igitur duo quadrata g y, y A æquent simul quadratum f g vel g A, siue rectangulum c g f; quadratum autem g y vel e o æquet rectangulum L e t, vel c g x, relinquitur vt quadratum y A vel C t æquet rectangulum contentum sub rectis g c, f x, hoc est rectangulum E f x, contentum sub f x & sub f E latere quadrati f g B E, & latere quoque recto parabolæ. Cùm igitur quadratum ordinatim applicatæ x u æquet rectangulum E f x, patet quadratum x u esse æquale quadrato C t, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XII.

Iisdem manentibus ex puncto g excitetur perpendicularis g m ad planum c g b æqualis rectæ g c.

Ostendendum est dicylindraceum genitum ad positionem plani m g b ex parabola f u B g, & ex figura f q t h g esse æquale cylindraceo altitudinis g m, baseos æquantis rectilineum notum, si nota sit quadratura circuli.

Intelligatur cylindraceum genitum ad positionem plani m g c ex ipsa figura f t h g in seipsam ducta, vt eius sectiones parallelæ plano m g c sint quadrata. Ex recta g f producta abscindatur f H æqualis rectæ g c, & compleatur parallelogrammum f H M D. Recta f g bifariam secta sit in n, & completa sint parallelogramma h g n P, P n f Q: recta h g bifariam secta sit in S, & per S ducta sit S R complens parallelogramma S q n g, q R f n. Igitur ex tertij vndecima propositione figura P q t h est semicycloides parua subcontrariè posita semicycloidi item paruæ f q n genitæ circulo centri q, diametri R S. Quoniam verò figura f q h g est illa quam in decima tertia libri secundi appellauimus *ex sinibus versis*, erit (vt in corollario primo decimæ tertiæ libri tertij ostendimus) integra

ſemicycloides parua genita diametro f g, centro n. Si igitur compleatur parallelogrammum H f Q L, & intelligatur ſuperior ſemicycloides parua L V f Q, reſpondens genitori circulo ſemidiametri Q L, cuius limbus L V f occurrat rectæ T l in V, erunt per decimam ſeptimam ſecundi libri tres rectæ T l, l V, l t proportionales, ac proinde media inter T l, l t erit l V, & poſito ad poſitionem rectæ f g primo gradu parallelogrammo L Q f H, ſecundo L V f Q, tertius erit f t h Q. Igitur ex decimâ nonâ ſuperioris libri adiuncto corollario quarto octauæ libri eiuſdem habemus notum quartum gradum poſt tertium f t h Q.

Intelligatur parabola f u B g ſtare erecta ſuper plano f g h & per eius ita ſtantis limbum f u B incedere linea parallela rectæ g h & deſcribere ſuperficiem cylindraceam; intelligatur alia ſuperficies cylindracea deſcribi motu parallelæ ad rectam m g incedentis per limbum f q t h Q. Igitur ſectio l t N F cylindracei prioris, baſeos f u B g erectæ, parallela ipſi baſi & incluſa intra cylindraceum poſterius, incedens per rectam l t quamlibet, erit ipſa f x u tranſlata; ergo vt L T prima ad l t tertiam, ita erit x u vel t N ſecunda ad quartam: ergo rectangulum ſub quarta & ſub prima T l eſt æquale rectangulo l t N: ſed ſectio l F N t eſt bes eiuſmodi parallelogrammi vt ex quadratura parabolæ conſtat: ergo cùm ſolidum cuius ſectio eſt parallelogrammum l t N ſit per vndecimam ſecundi tetragoniſmicorum ad poſitionem plani m g c condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis T l vel g m, baſeos æquantis quartum gradum notum, ſi nota ſit quadratura circuli; patet ſolidum cuius ſectio eſt L F N t eſſe æquale beſſi huius cylindracei noti. Cùm igitur notum ſit cylindraceum altitudinis g h, baſeos f u B g erectæ, ſi ex hoc cylindraceo dematur bes cylindracei cuius baſis eſt quartus gradus, reſiduum fiet cylindraceum altitudinis g m, baſeos notæ, æquale portioni dicylindracei geniti ex parabola f u B g, & ex parua cycloide f q h g, quod erat demonſtrandum.

COROLLARVM.

Huc aduocari debet corollarium ſimile illi quod propoſitioni vndecimæ ſuperioris libri adſcripſimus.

PROPOSITIO XIII.

Iſdem manentibus (*Fig. 39.*) circa baſim g h intelligatur circumduci ſemicycloidis magnæ pars ſuperior g b z c.

Oſtendendum eſt illi æquiponderans eſſe notum datâ circuli quadraturâ, ſi libra B b ſuſpendatur ex g perpendiculo plano m g c, brachio B g latere quadrati f g B E.

Quoniam tres rectæ d i, i z, C i ſunt proportionales, patet ex methodo vndecimæ ſuperioris libri cylindraceum altitudinis g m, baſeos f a b g ad poſitionem plani m g c eſſe condicta ratione æquale dicylindraceo genito ex b g c z ſuperiore parte magnæ ſemicycloideos ad poſitionem plani m g c

ni m g c in seipsam ductæ; & si vt quadratum diametri ad circulum, ita fiat g m recta ad g λ cylindraceum altitudinis g λ, baseos eiusdem, esse condicta ratione æquale conoidi descripto circa rectam g b manentem. Ex eiusdem methodo constat cylindraceum altitudinis g λ baseos æquantis æquiponderans figuræ f a b g axe f g, sustentaculo E B latere quadrati f g B E, esse æquale æquiponderanti spatio conoidis.

Superest vt ostendamus notum esse æquiponderans figuræ f a b g iisdem positis. Ducta sit quælibet x C parallela rectæ b g occurrens limbo f a b in C, & rectæ g f in x. Quadratum igitur x C componitur ex quadratis x t, t C, & bis rectangulo x t C, vt ex Elementis Euclidis liquet. Per methodum superioris libri in quartâ propositione, habemus rectangulum altitudinis g m baseos notæ, æquale quadrato x t; per parabolæ quadraturam eiusque centrum grauitatis habemus rectangulum altitudinis eiusdem, baseos quoque notæ, æquale solido cuius sectio est quadratum lateris t C vel x u: per superiorem habemus cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos pariter notæ æquale bis rectangulo x t C: ergo per vndecimam quarti tetragonismicorum notum est cylindraceum altitudinis g m, baseos æquantis rectilineum notum positâ circuli quadraturâ, æquale solido cuius sectio parallela plano m g b est quadratum lateris x C: ergo vt ex demonstratis in prima tertij libri patet, æquiponderans cylindraceo altitudinis g m, baseos f a b c, est ad positionem plani m g b condicta ratione æquale dimidio cylindracei inuenti; ergo cùm ambo cylindracea sint eiusdem altitudinis, patet figuræ f a b g vt iacet manenti æquiponderare ad positionem rectæ g b dimidium baseos cylindracei inuenti si libræ planæ axis ponatur g f, sustentaculum B E. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Applicentur huic propositioni corollaria primæ & septimæ superioris libri. Reliqui verò casus quando recta circa quam fit reuolutio ęquidistat rectæ f a, facilè expediuntur ex methodo præsentis casûs, vt patebit ex calculo tradendo in sequentibus.

COROLLARIVM II.

Si b z c g poneretur contraria ratione esse semicycloides parua superior, & illi ad partes g insisteret figura b z c o h condicta ratione æqualis circuli quadranti g c A B ad positionem rectæ g b: Similiter si f a b g esset tota semicycloides habens axem f g, & illi ad partes g insisteret figura f a b h q condicta ratione æqualis parabolæ f u B g, patet ex cylindraceis æquantibus quadrata x C, C t nota demendum fore bis cylindraceũ æquale dicylindraceo genito ex cycloide f a b g & ex parabola f u B g vel f a b h q, vt haberetur æquiponderans conoidi genito ex reuolutione figuræ h o c g circa axem g h: figura autem h o c g est in isto casu parua semicycloides superior imminuta quadrante circulari, sicuti in casu superioris est aucta eodem quadrante.

PROPOSITIO XIV.

SIt (*Fig.* 40.) tota ſemicycloides magna a z b c f, eiuſque axis f c; circa rectam f a circumuolutione partis inferioris D a z b (nam parallelogrammum f D b g pertinet ad figuram D b c f circa f D reuolutam) intelligatur gigni ſolidum periphericum.

Oſtendendum eſt illi æquipouderans eſſe notum ſi libra B b ſuſpendatur ex g perpendiculo plano m g c, brachio g B latere quadrati f g B E.

Deſcripta ſit ſemicycloides parua a o h c f habens eundem axem h c, & eandem ſemibaſim f a: completo parallelogramma f g T a, & h T a Q, erit a o h T parua ſemicycloides ſuperior ſubcontrariè poſita paruæ ſuperiori h i c g, vt ex ſecundi libri octauæ propoſitionis corollario liquet. Igitur ex tertiæ propoſitionis corollario huius libri axe f g, ſuſtentaculo E B (ita vt B g, g c ſint æquales) perpendiculo plano m g c; notum eſt æquiponderans ſolido genito ex circumuolutione figuræ a z b t circa rectam T b.

Intelligatur quadratum lateris d i parallelum plano m g c in quo recta m g ponatur perpendicularis ad planum h g c, & æqualis rectæ g c; eiuſmodi verò quadratum concipiatur diuiſum in duo quadrata z i, z d & in bis rectangulum d z i. Per ipſa quadrata & per rectangula volumus intelligi in præſenti ſolida quorum ipſa quadrata & rectangula ſunt ſectiones. Per corollarium ſuperioris axe f g & cæteris manentibus, notum eſt æquiponderans quadrato z i; rectangulo autem d i z æquiponderans notum eſt, videlicet cylindraceum altitudinis d i baſeos æquantis rectilineum notum quod figuræ planæ a z b T æquiponderat per tertiam tertij libri; ergo diuiſa altitudine d i in duas d z, z i notum eſt æquiponderans duobus rectangulis eadem baſi z i præditis, altitudinum d z, z i, hoc eſt rectangulo d z i, & quadrato z i; ergo dempto æquiponderante noto quadrati z i, relinquitur notum æquiponderans rectanguli d z i. Cùm ergo notum ſit æquiponderans totius quadrati d i cylindraceum nempe altitudinis d i, baſeos æquantis æquiponderans figuræ planæ parallelogrammæ a D b T, cúmque notum ſit æquiponderans partium, videlicet quadrati z i & bis rectanguli d z i, ſi iſta demantur ex illo, relinquetur æquiponderans quadrati d z, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Si circa alios axes parallelos rectæ f a fiat circumuolutio, demonſtratio methodo non admodum diuerſa ſuccedet, idque ſatis conſtabit ex ſequentibus calculis. Quæ verò de aliis caſibus in vndecimâ ſuperioris ſcripſimus, hîc cum proportione intelligi debent.

PROPOSITIO XV.

REuocato ſchemate propoſitionis duodecimæ (*Fig.* 39.) dicylindraceum genitum ad poſitionem plani m g b ex parabola integra f u B g & ex figurâ integrâ f q t h g eſt æquale cylindraceo altitudinis g m, baſeos æquantis trientem circuli genitoris f c imminutum quatuor nouenis partibus quadrati g c.

In caſu propoſito ſi libra f c ſuſpendatur ex f perpendiculo plano X f D recto ad planum H f Q, ita vt rectæ X f, m g æquidiſtent & ſint æquales vni tertiæ g c, ſuſtentaculo verò g h, ſolido cuius ſectio parallela plano g m c ſit quadrans circularis inſiſtens ſuper l V dimetiente figuræ f V L Q, æquiponderans per decimam nonam ſuperioris libri eſt cylindraceum altitudinis f X vel g c, cuius baſis ſit duæ nouenæ quadrati g c vel L Q: ſumi enim debet dimidium æquiponderantis ibi appoſiti vt patet, cùm ſectio parallela plano m g c in caſu illius decimæ nonæ ſit bis quadrans circularis inſiſtens ſuper l V. Igitur per ſextam eiuſdem libri ſolido cuius ſectio ſit quadratum lateris l V æquiponderant tres ſemiſſes æquiponderantis iam inuenti; ac proinde ſolido ſectionis illius quadratæ æquiponderat cylindraceum altitudinis g c vel X f, baſeos continentis trientem quadrati g c. Igitur ex corollario quarto octauæ ſuperioris libri duplum huius baſeos nempe bes quadrati g c, eſt quartus graduum, quorum primus eſt parallelogrammum dimetientis f g, ſecundus eſt figura f V L Q, tertius eſt figura f q h Q: ac proinde cylindraceum altitudinis g m vel g c baſeos æquantis beſſem quadrati g c eſt æquale condicta ratione ad poſitionem plani m g c ſolido cuius ſectio eſt parallelogrammum l t N.

Quoniam verò per methodum ſecundæ propoſitionis bes huius cylindracei eſt æquale dicylindraceo genito ex parabola f u B g & ex figura f q h Q ad poſitionem plani m g h, patet iſtud dicylindraceum eſſe æquale cylindraceo altitudinis g c vel g m, baſeos æquantis quatuor nouenas quadrati g c.

Rurſus quoniam cylindraceum altitudinis g h baſeos ęquantis quadratum f g, eſt per leges reciprocationis æquale cylindraceo altitudinis f g baſeos æquantis ſemicirculum f c, nam recta g h ad f g eſt per demonſtrata in corollario ſecundo decimæ nonæ primi libri vt ſemicirculus f c ad quadratum f g: ſed f u B g baſis eſt bes quadrati f g: ergo cylindraceum altitudinis g h baſeos f u B g eſt cylindraceū altitudinis g m baſeos æquantis beſſem ſemicirculi f c, vel trientem circuli f c. Cùm igitur ex præſcripto eiuſdem ſecundæ iſti cylindraceo demi debeat illud paulo antè inuentum eiuſdem altitudinis, baſeos æquantis quatuor nouenas quadrati g c, vt relinquatur dicylindraceum quæſitum, patet illud eſſe æquale cylindraceo altitudinis g m, baſeos æquantis trientem circuli genito-

ris f c imminutum quatuor nouenis quadrati c g, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

Reuocato schemate propositionis decimæ tertiæ (*Fig. 39.*) intelligatur semicycloideos magnæ pars superior g b z c tota volui circa rectam b g; ostendendum est librâ B b suspensa ex g perpendiculo plano m g c, brachio g B, æquiponderans istius solidi quadranti esse æquale cylindraceo altitudinis g λ, baseos æquantis quadrantem quadrati g h auctum triente circuli f c & imminutum quatuor nouenis quadrati g c.

Ex corollario secundo secundæ tertij libri habemus æquiponderans figuræ f q h g librâ grammicâ B h suspensâ ex g perpendiculo g f, brachio g G æquante rectam g n vel dimidium rectæ g B, esse æquale dimidio quadrati g h, deducto duplo quadrati n g: ergo æquiponderans eidem, brachio g B duplo prioris, est dimidium æquiponderantis illius; sed duplum æquiponderantis illius si fiat basis cylindracei altitudinis g B vel g m æquale est dicylindraceo genito ex parua semicycloide f t h g in se ducta ad positionem plani m g h: ergo solidum cuius sectio parallela plano m g h est quadratum lateris x t æquat cylindraceum altitudinis g m, baseos continentis dimidium quadrati g h, imminutum duplo quadrati n g, vel dimidio quadrati f g.

Præterea quoniam parabolæ f u B g cuius axis f g, centrum grauitatis distat ab axe f g interuallo trium octauarum rectæ g B ex corollario quarto primæ quarti tetragonismicorum, æquiponderans illi figuræ brachio æquante rectam g B, perpendiculo g f, erit tres octauæ suspensi; cùm igitur suspensum sit bes quadrati B g, æquiponderans erit quadrans quadrati g B; ergo duplum huius nempe dimidium quadrati g B est basis cylindracei altitudinis g B vel g m, quod æquat cylindraceum ex parabola f u B in seipsam ducta ad positionem plani m g B.

Rursus per superiorem bis solidum cuius sectio parallela plano m g h est rectangulum x t C vel t x u est æquale cylindraceo altitudinis g m, baseos æquantis bessem circuli f c imminutum octo nouenis quadrati c g. Igitur ex methodo eiusdem decimæ tertiæ cylindraceum altitudinis g λ baseos æquantis dimidium trium illorum spatiorum iam computatorum in bases trium cylindraceorum, est æquiponderans toti conoidi circa rectam g b geniti circumuolutione figuræ c z b g. Istud autem dimidium est quadrans quadrati g h auctus triente circuli f c, & imminutus quatuor nouenis quadrati g c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Duobus igitur quadrantibus istius solidi, siue dimidio illius æquiponderat duplum spatij iam inuenti nempe cylindraceum altitudinis g λ, baseos æquantis dimidium quadrati g h, auctum besse circuli f c, & immi-

nutum octo nouenis partibus quadrati g c. Quatuor verò quadrantibus siue toti solido, baseos æquantis quadratum g h auctum quatuor trientibus circuli f c, & imminutum sexdecim nouenis quadrati g c.

COROLLARIVM II.

Si g b z c ponatur pars superior semicycloideos paruæ, & b z ç o h circuli quadrans insistens illi ad partes g; similiter si f a b g ponatur tota semicycloides parua habens axem f g, & f a b h q parabola insistens ad partes g; solidum cuius sectio parallela plano m g h est quadratum lateris x t, erit duo simul solida quadratorum x C, C t, dempto bis solido rectanguli x C t: cylindraceum verò illis æquale altitudinis g m habebit pro basi dimidium quadrati cuius latus æquat peripheriam B A c auctum octo nouenis quadrati f g vel g c, imminutum besse circuli f c genitoris. Ergo dimidium huius baseos nempe quadrans quadrati g h, auctus quatuor nouenis quadrati f g & imminutus triente circuli f c genitoris est pro hoc casu basis cylindracei æquantis æquiponderans quæsitum & habentis altitudinem g λ.

PROPOSITIO XVII.

IIsdem manentibus vt in decima tertia (*Fig. 39.*) circa rectam f D intelligatur circumuolui figura D b z c f; ostendendum est solidi illius quadranti iisdem vt supra manentibus, æquiponderare solidum altitudinis g λ, baseos complectentis quinque quadrantes quadrati g h, auctos vndecim sextantibus circuli genitoris f c, & imminutos septem nouenis quadrati g c.

Quoniam æquiponderans basi quæ sit tertius gradus modo suprà explicato, quorum primus sit parallelogrammum H f D M, secundus figura D b z c f ad positionē rectæ f c, est basis cylindracei altitudinis g λ quod æquale sit æquiponderanti quæsito vt ex superioris praxi patet, superest vt in præsenti inueniamus illud æquiponderans tertij gradûs. Porrò vt ex methodo qua vsi sumus in corollario primo decimæ & in corollariis decimæ septimæ tertij libri constat, tertius gradus componitur ex parallelogrammo H f D M & ex bis figura g c z b, nec non ex tertio gradu f a b g inuento in superiore propositione: inueniendum igitur restat æquiponderans tribus illis figuris planis libræ grammicæ B h brachio B g, perpendiculo g f: id autem ita præstamus.

Ex superioris progressu æquiponderans figuræ f a b g est quadrans quadrati g h auctus triente circuli f c, & imminutus quatuor nouenis quadrati g c.

Rursus solidum cuius sectio sit quadratum lateris y z parallelum plano m g b est æquale solidis quorum sectiones sint quadrata laterum y o, o z vel y A, & bis rectangulum y o z vel y A vt in superioris pari casu diximus: Atqui solidum quadrati y o æquale est vt patet ex corollario secundo secundæ tertij, cylindraceo altitudinis g m, cuius basis sit circulus

genitor dempto bis quadrato g c: ſolidum bis rectanguli o z y eſt per ſeptimam & corollarium eius æquale cylindraceo paris altitudinis cuius baſis ſit bis quadrans quadrati g c auctus bis quadrante quadrati g h: ſolido quadrati o z æquale eſt cylindraceũ altitudinis eiuſdem, cuius baſis ſit bes quadrati g c. Igitur ſumma baſium eſt circulus genitor f c auctus dimidio quadrati g h, deductis quinque ſextantibus quadrati c g. Tale verò eſt bis æquiponderans figuræ g b z c quæſitum.

Æquiponderans parallelogrammo H f D M conflatur ex æquiponderante parallelogrammis H f Q L vel f g h Q, & Q D M L, vel h b D Q. Parallelogrammo H f Q L æquiponderans eſt dimidium quadrati g h, vt ex corollario primo decimæ libri tertij conſtat. Parallelogrammo ſiue quadrato Q D M L librâ f D ſuſpensâ ex Q, perpendiculo Q L brachio æquante rectam f E & ad partes f conuerſo, eſt vt patet dimidium ipſius quadrati æquantis quadratum g c; ergo ſi ſuſpenſio ex Q mutetur in ſuſpenſionem ex f, eidem parallegrammo reſpondebit æquiponderans prius auctum ſpatio quod ad ipſum ſuſpenſum vel quadratum g c ſit vt recta f Q ad f E vel vt ſemicirculus ad quadratum g c: igitur quadrato Q D M L vt iacet manenti, brachio f E, perpendiculo f H æquiponderat dimidium quadrati g c auctum dimidio circuli genitoris f c. Igitur toti parallelogrammo H f D M ęquiponderat dimidium quadrati g h, auctum dimidio circuli genitoris, & dimidio quadrati g c. Igitur ſumma conflata ex iſtis tribus ęquiponderantibus eſt quinque quadrantes quadrati g h aucti vndenis ſextantibus circuli genitoris f c, & imminuti ſeptem nouenis quadrati g c, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Si g b z c ponatur ſemicycloides parua, & b z c o h circuli quadrans tranſlatus, ſicuti in calculo ſecundo æquiponderantis proceſſimus, ita procedemus in hoc caſu: nam ſolidum cuius ſectio parallela plano m g h ſit quadratum lateris y o erit ſolidum quadrati y z auctum ſolido quadrati o z & imminutum bis ſolido rectanguli A y z: erit igitur æquale cylindraceo altitudinis g m baſeos æquantis circulum genitorem imminutum dimidio quadrati g h, & inſuper imminutum vndecim ſextantibus quadrati c g. Dimidium verò huius baſeos eſt æquiponderans figuræ g c o h, libra B h ſuſpenſa ex g, perpendiculo g c, brachio g B.

PROPOSITIO XVIII.

Reuocato ſchęmate propoſitionis decimæ quartæ (*Fig.* 40.) ex recta g T producta abſcindatur T e æqualis rectæ g c vel g B, & compleatur parallelogrammum a T e m. Intelligatur circa rectam a D volui figura a z b D & gigni ſolidum periphericum. Ad planum T b D excitetur perpendicularis A T æqualis rectæ T e, ſitque T u ad T A vt circulus ad ſuæ diametri quadratum.

Oſtendendum eſt quadranti huius ſolidi totius librâ e b ſuſpensâ

ex T perpendiculo plano A T a, brachio T e, æquiponderans esse æquale cylindraceo altitudinis T u, baseos æquantis quinque quadrantes quadrati g h auctos viginti quinque nouenis quadrati g c, & imminutos vndecim sextantibus circuli genitoris

Parallelogrammo a T h Q, libra h T suspensa ex h perpendiculo h Q, brachio h C æquante rectam b h vel g c, æquiponderat ex supra demonstratis dimidium quadrati h T vel h g. Quadrato h b D Q æquiponderat dimidium ipsius quadrati: ergo rectangulo a D b T æquiponderat dimidium quadrati g h imminutum dimidio quadrati g c. Igitur si brachium h C mutetur in T e æquiponderans parallelogrammo a D b T est deducto priore æquiponderante spatium quod ad ipsum a D b T sit vt recta g h ad g f, hoc est vt semicirculus ad semidiametri quadratũ, vel vt quadratum g h ad rectangulum h g c: sed a D b T æquat semicirculum imminutum quadrato D Q h b: est ergo quadratum g h imminutum semicirculo, & priore æquiponderante: est igitur dimidium quadrati g h auctum dimidio quadrati g c & imminutum semicirculo f c. Ergo solido cylindraceo altitudinis T A, baseos a D b T æquiponderat cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis dimidium quadrati g h auctum dimidio quadrati g c, & imminutum semicirculo f c.

Solido cylindraceo altitudinis T A vel d i, baseos a z b T æquiponderat cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis spatium quod figuræ a z b T, quæ est basis cylindracei suspensi, æquiponderat; atqui figuræ a z b T iisdem manentibus æquiponderat per corollarium superioris dimidium circuli f c genitoris, imminutum quadrante quadrati g h & insuper imminutum vndecim vnciis quadrati c g: ergo hæc est basis cylindracei æquiponderantis altitudine T A præditi.

Solido cuius sectio parallela plano A T a sit quadratum rectæ z i pertinentis ad figuram a z b T, æquiponderat per corollarium secundum decimæ sextæ quadrans quadrati quod potest recta g h, auctus quatuor nouenis quadrati g c, & imminutus triente circuli f c.

Ex methodo decimæ quartæ patet æquiponderans solido trium istorum computatorum primo esse æquale æquiponderantibus tribus quorum primum est solidum quadrati z i, secundum est solidum quadrati d z, tertium est solidum bis rectanguli d z i. Præterea patet æquiponderans solido ex iam computatis secundo esse æquale æquiponderantibus solidi quadrati z i & simul solidi rectanguli d z i: sed æquiponderans solido quadrati z i est tertium ex computatis; ergo si ex æquiponderante secundò computato auferatur æquiponderans tertiò computatum, restabit æquiponderans solido rectanguli d z i, videlicet quinque sextantes circuli genitoris f c deducto dimidio quadrati g h & quadraginta nouem trigesimis sextis quadrati c g. Duplum huius baseos est quinque trientes circuli genitoris deducto quadrato g h & quadraginta

nouem decimis octauis quadrati c g. Huic duplo addatur basis æquiponderantis solido quadrati z i supra reperta, conficientur quatuor trientes circuli genitoris deducto dodrante quadrati g h & quadraginta & vna decimis octauis partibus quadrati c g. Atque hæc est basis cylindracei altitudinis T u quod deduci debet de primo ex solidis computatis, vt restet spatium æquiponderans quadranti solidi ex circumductu figuræ a z b D circa rectam D a geniti, nempe cylindraceum altitudinis T u, baseos æquantis quinque quadrantes quadrati g h auctos viginti quinque nouenis quadrati g c, & imminutos vndecim sextantibus circuli genitoris, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

Iisdem manentibus, quadranti eiusdem solidi geniti ex circumductu figuræ a z b D circa rectam D a (*Fig.* 40.) si libra B h suspendatur ex puncto g, perpendiculo plano m g f, brachio g B æquiponderat solidum altitudinis g λ vel T u, baseos æquantis quindecim decimas sextas partes quadrati f a ; deductis vndecim sextantibus circuli genitoris, & quadrati f c viginti quinque nouenis partibus.

Ex methodo vsurpata non semel iuxta libræ principia demonstrata in nona & decima secundi tetragonismicorum liquet si vt T e vel g c recta ad a f æqualem semiperipheriæ circuli diametro f c geniti, ita quadrans suspensus peripherici geniti reuolutione figuræ a z b D circa rectam a D, fiat ad quartum spatium quod vocetur G, spatium istud G imminutum solido æquiponderante reperto in propositione proximè superiore esse æquale spatio quod eidem quadranti æquiponderat librâ B h suspensâ ex g sicut præscripsimus.

Restat vt istud periphericum faciamus notum. Id verò ex decima nona primi ita præstamus. Sit f t c g quadrans circuli genitoris : igitur figuræ b r c t s librâ f c suspensâ ex f perpendiculo f a, brachio f x æquante rectam f g æquiponderat per demonstrata in progressu decimæ octauæ primi, octaua pars circuli genitoris aucta quadroto g c. Quadranti circulari iisdem positis æquiponderat triens quadrati g c auctus ipso quadrante circulari. Rectangulo f g b D æquiponderat dimidium ipsius, hoc est dimidium rectanguli f g h æquantis semicirculum f c ; & rectanguli D b h Q siue quadrati g c ; ergo rectangulo f g b D æquiponderat quadrans circuli f c auctus dimidio quadrati g c. Igitur toti D b r c f æquiponderat spatium æquans quinque octauas partes circuli f c & vndecim sextantes quadrati g c.

Cùm igitur toti a b r c f per decimam octauam primi colligantur æquiponderare quinque quadrantes circuli f c, si isti æquiponderanti dematur æquiponderans figuræ D b r c f, relinquetur æquiponderans figuræ a z b D, nempe quinque semiquadrantes circuli f c, deductis vndecim sextantibus quadrati g c. Duplum istius est quinque quadrantes circuli f c,

culi f c, deductis vndecim trientibus quadrati c g. Cylindraceum igitur cuius altitudo sit g λ, basis quinque quadrantes circuli f c, deductis vndecim trientibus quadrati c g, est æquale quadranti peripherici propositi.

Si vt f g ad a f ita fiant quinque quadrantes circuli f c deductis vndecim trientibus quadrati c g, ad aliud H; constat ex corollario primo decimæ istud H esse quinque quadrantes quadrati f a deductis vndecim trientibus circuli f c. Sunt ergo spatia G & H vnum & idem: ergo æquiponderans quadranti peripherici circa rectam D a manentem geniti motu figuræ a z b D est cylindraceum altitudinis g λ vel T u baseos æquantis quindecim decimas sextas partes quadrati f a deductis vndecim sextantibus circuli f c, & quadrati g c viginti quinque nouenis, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Si æquiponderans quadranti solidi circa axem f D geniti motu figuræ D b r c f inuenti in decimâ septimâ addatur æquiponderanti in præsenti propositione computato, fiet æquiponderans quæsitum quadranti peripherici circa f a motu totius semicycloideos magnæ, cylindraceum videlicet altitudinis g λ, baseos continentis quinque quadrantes quadrati f a, deductis triginta duabus nouenis quadrati g c. Duplum verò illius æquiponderabit dimidio solidi eiusmodi peripherici plano per f a recto ad planum a f c diuisi; & quadruplum toti solido.

COROLLARIVM II.

Quoniam totum solidum suspensum, est per decimam nonam primi libri æquale cylindraceo altitudinis g λ baseos æquantis denos circulos genitores, æquiponderans verò corollarij proximè superioris est cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos continentis quinque quadrata f a deductis centum viginti octo nouenis quadrati g c, patet solidum suspensum ad solidum æquiponderans ipsi, esse vt bases: igitur vt deni circuli genitores ad quinque quadrata f a imminuta centum viginti octo nouenis quadrati g c, ita est brachium g B ad interuallum quo distat à plano m g c planum per centrum suspensi parallelum eidem plano m g c.

COROLLARIVM III.

Ex vigesima superioris libri apertè constat notum esse æquiponderans solido peripherico circa axem f c genito libræ planæ perpendiculo m g h, vel ei parallelo alio quolibet: cùm non discrepet ab isto reperto in propositione præsenti & in decima sexta superiore.

COROLLARIVM IV.

Porrò ex methodo quam adhibuimus in tractando calculo duorum casuum propositorum, patet etiam via similis quam teneri oportet in aliis.

PROPOSITIO XX.

SIt cycloides magna a c d (*Fig*. 41.) cuius basis a d, circulus genitor a e f o centri g, axis c f: circa quamcunque z y L ordinatim vtrinque applicatam ad axem c f circumuoluatur figura z c L, siue punctum y congruat alterutri punctorum g, f, siue ab iis differat. Huius solidi dimidium abscissum plano q y c ad planum c y z recto consideramus in præsenti.

Ostendendum est notam esse basim cylindracei altitudinis y q vel g c, æquiponderantis dimidio illius solidi librâ f c suspensa ex y perpendiculo plano q y z, brachio æquante rectam c g.

Quoniam ex decima octaua libri superioris figuræ z c p vel c s L secunda quadratrix nota est iisdem positis; secunda verò quadratrix figuræ c p y vel c s y est nota ex methodo corollarij quarti decimæ quartæ propositionis tertij libri: ergo totius figuræ c z y vel c L y nota est secunda quadratrix: igitur ex methodo decimæ nonæ duplum huius erit basis cylindracei altitudinis q y æquiponderantis solidi peripherici dimidio proposito, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

In primo casu, quando videlicet punctum y congruit centro g, per decimam septimam superioris libri quadratrix secunda figuræ c z p est duæ nouenæ quadrati g c: sed figuræ p c y ex corollario quarto decimę quartæ superioris libri respondet quadratrix ęquans quadrantem figurę c e g, hoc est decimam sextam partem circuli genitoris; ergo decima sexta pars circuli genitoris aucta duobus nouenis quadrati c g est secunda quadratrix figuræ c z y: ergo per methodum decimæ nonæ tertij libri cylindraceum altitudinis c g baseos æquantis duplum illius spatij, videlicet octauam partem circuli genitoris auctam quatuor nouenis quadrati g c æquiponderat dimidio solidi quod ad rectæ c y partes z iacet.

COROLLARIVM II.

In secundo casu, quando videlicet punctum y congruit puncto f, per corollarium primum decimæ octauæ superioris libri figuræ c z p quadratrix secunda est quinque sextantes circuli genitoris; sed semicirculi f e c quadratrix secunda æquat quinque octauas circuli genitoris ex methodo corollarij quarti iam laudati in superiore corollario: ergo secunda quadratrix toti a z c f respondens brachio f T æquante rectam f g, perpendiculo f a, est triginta quinque semunciæ circuli genitoris. Igitur ex methodo superioris corollarij duplum huius nempe triginta quinque vnciæ circuli genitoris erit basis æquiponderantis cylindracei altitudinis y q vel g c quod dimidio solidi æquiponderat.

COROLLARIVM III.

Vt quadratum circulo circumscriptum se habet ad circulum, hoc est

vt quadruplũ primi termini progressionis perspectę definitæ in corollario primo decimæ propositionis libri superioris ad secundum, vel vt primus ad quadrantem secundi, ita recta y q æqualis rectæ g c, fiat ad rectam y h. Quoniam cylindraceum A altitudinis y h baseos æquantis dimidium circuli genitoris auctum quatuor trientibus quadrati g c est æquale dimidio solidi descripti in primo casu, nempe quando punctum y congruit centro g; si cylindraceum A conuertatur in cylindraceum B æquale ipsi, altitudinis y q, patet vt y q ad y h ita reciprocè esse basim solidi A ad basim solidi B: ergo basis solidi B est octaua pars quadrati f a aucta triente circuli genitoris, vel est octaua pars tertij termini aucta triente secundi: nam basis solidi A est dimidium circuli genitoris auctum quatuor trientibus quadrati g c, vel est dimidum secundi termini auctum quatuor trientibus primi. Suspensum igitur B primi casûs & ipsi æquiponderans repertum in corollario primo se habent vt bases, cùm eadem altitudine y q vel g c sint prædita : ac proinde in primo casu vt octaua pars quadrati f a aucta triente circuli se habet ad octauam partem circuli genitoris auctam quatuor nouenis quadrati g c, ita est suspensum ad æquiponderans. Vel vt octaua pars tertij termini perspectę progressionis aucta triente secundi se habet ad octauam secundi auctam quatuor nouenis primi, ita est suspensum ad æquiponderans.

COROLLARIVM IV.

Similiter cùm in secundo casu suspensum sit cylindraceum A altitudinis y h, baseos ęquantis decem circulos genitores, si mutetur in cylindraceum B altitudinis y q vel g c, istius basis erit quinque quadrantes quadrati f a vel tertij termini. Vt igitur basis solidi B ad basim solidi A repertam in corollario secundo, ita est in isto casu suspensum ad ęquiponderans; est ergo suspensum ad ęquiponderans vt quinque quadrantes quadrati f a ad triginta quinque vncias circuli genitoris: vel vt quinque quadrantes tertij termini ad triginta quinque vncias secundi; vel vt tertius ad septem trientes secundi.

PROPOSITIO XXI.

PAruæ semicycloideos pars superior (*Fig.* 42.) sit b z c g, eius axis g c, basis g b; ex c f producta abscindatur g l æqualis rectæ b g & iungatur recta b l; ad planum b g c excitetur perpendicularis g d æqualis rectæ g c, & centro g intelligatur describi quadrans circularis g d e c: per limbum d e c moueatur recta parallela basi g b describens superficiem cylindraceam; per limbum b z c agatur parallela rectæ g d describens aliam superficiem cylindraceam, vt istis superficiebus cylindraceis & plano b g c t z comprehendatur dicylindraceum ad positionem plani d g b genitum ex quadrante circulari g c e d, & ex figura b z c g. Recta b g bifariam secetur in o, & per

o ducatur o p parallela rectæ g c & æqualis dimidio rectæ g c, intelligatur b q p g eſſe tota ſuperior cycloides parua genita circulo ſemidiametri o p; centri o. Intelligatur cylindraceum altitudinis g d baſeos æquantis duas ſimul figuras nempe triangulum b l g, & figuram b q p g.

Oſtendendum eſt ad poſitionem plani d g c dicylindraceum genitum ex quadrante circulari d g c & ex figura b z c g eſſe condicta ratione æquale dimidio cylindracei duarum ſimul baſium b l g, b q p g, altitudinis g d: & in eodem ad planum d g c, plano parallelo eſſe grauitatis centrum ſingulorum iſtorum ſolidorum inter ſe æqualium.

Per b ducatur b m parallela & æqualis rectæ g c, & figura m n g b ſubcontrariè deſcribatur figura b z c g. In recta b g ſumptum ſit quodcunque punctum h & per illud ducta ſit h s complens parallelogrammum d g h s; completo parallelogrammo c g b r quod erit ſectio cylindri baſeos g d e c, & parallelogrammo c g h u, ſi in plano ſ h u deſcribatur quadrans circularis ſ h u t, erit is ſectio cylindri & plani ſ h u: recta h u occurrat limbo b z c in z, & per z ducatur ordinatim applicata z t parallela ſemidiametro h s; recta u h producta occurrat in q, i, n lineis b q p g, b l, m n g; iungaturque recta h t. Igitur dicylindracei geniti ex quadrante circulari g d e c & ex figura b z g c ad poſitionem plani d g b, ſectio communis cum plano ſ h u eſt figura ſ h z t comprehenſa ſub arcu ſ t & ſub rectis ſ h, h z, z t; ſiue eſt ſector ſ h t, vnà cum triangulo h z t, quod eſt dimidium rectanguli h z t V. Præterea rectangulum h z t V continetur ſub z t ſinu arcus t u, & ſub t V ſinu arcûs complementi t s: ſed recta h n eſt per tertiam ſecundi libri æqualis ſinui complementi arcûs ſ t: ergo rectæ n h, z t ſunt æquales: ergo rectangulum n h z eſt æquale rectangulo h z t: ergo dimidium rectanguli n h z eſt æquale triangulo h z t. Cùm igitur per ſeptimam libri eiuſdem ſecundi rectangulo n h z æquale ſit rectangulum altitudinis g d baſeos q h, patet dimidium rectanguli altitudinis g d, baſeos q h eſſe æquale triangulo h z t.

Rurſus ducta e a ordinatim applicata & parallela ſemidiametro g d, quoniam ex generatione cycloideos paruæ b z c g, arcui c e vel u t eſt æqualis recta z a vel g h, tota autem g b eſt æqualis arcui c e d vel u t s, reſidua h b erit æqualis reſiduo arcui ſ t: ergo per demonſtrata in progreſſu tertiæ primi libri rectangulum contentum ſub g d & ſub recta b h vel h i eſt duplum ſectoris g e d vel h t s: igitur cùm dimidum rectanguli g d, h i & dimidium rectanguli g d, h q ſint æqualia ſectori h ſ t & triangulo h z t ſingula ſingulis, patet dimidium rectanguli altitudinis g d, baſeos compoſitæ ex duabus q h, i h eſſe æquale figuræ h ſ t z quæ eſt ſectio plani ſ h u ad libitum ſumpti cum dicylindraceo genito ex quadrante circulari & ex figura b z c g: ergo per vndecimã quarti tetragoniſmicorũ iſtud

dicylindraceum eſt ad poſitionem plani d g c condicta ratione æquale dimidio cylindracei altitudinis g d, baſeos compoſitæ ex triangulo b l g, & ex paruæ cycloidis ſuperiore parte b q g : atque adeo planum parallelum plano d g c incedens per grauitatis centrum dicylindracei, incedit quoque per centrum grauitatis cylindracei, & duplum eius quod illi æquiponderat, æquiponderat pariter & iſti, libræ perpendiculo plano poſito d g c vel quouis parallelo ad illud, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXII.

Iſdem manentibus (*Fig.* 42.) oſtendendum eſt ſi ex b g abſcindatur g y æqualis rectæ g c, librâ grammicâ y b ſuſpensâ ex g perpendiculo d g c notum eſſe data circuli quadratura, æquiponderans cuilibet dicylindracei geniti vt ſuprà ex figuris b z c g, d g c e portioni ſumptæ ad poſitionem plani d g c. Quando autem ſumitur totum dicylindraceum, æquiponderantis duplum eſſe cylindraceum altitudinis g d vel g c, baſeos æquantis octauam partem circuli genitoris diametri f c, auctam ſpatio quod ad ſextantem quadrati b g ſit vt dimidium quadrati circulo circumſcripti ad ipſum circulum.

Iſtud patet ex eo quod cylindraceum altitudinis g d baſeos æquantis dimidium æquponderantis duabus ſimul figuris planis b l g, b q g ad poſitionem rectæ g c ſumptis, eſt per ſuperiorem, iſtud æquiponderans quæſitum : atqui portioni trianguli l g b notum eſt æquiponderans, cùm notum ſit eiuſmodi portionis centrum grauitatis, ipſáque portio ſit nota dato tetragoniſmo circuli ; figuræ b q g æquiponderans quoque notum eſt ex tertia tertij : ergo notum eſt æquiponderans portioni dicylindracei propoſitæ quod erat generaliter oſtendendum.

In caſu verò totius dicylindracei propoſiti res ita ad numeros exigitur. Ex b g recta abſcindatur g A æqualis ipſi b g : ergo brachio g A perpendiculo g l æquiponderans triangulo l b g eſt triens ipſius trianguli, vt ex ſexta quadraturæ parabolæ Archimedeæ liquet : ergo cùm triangulum b g l ſit dimidium quadrati b g iſtud æquiponderans eſt ſextans quadrati b g. Rurſus quoniam per octauam ſecundi tetragoniſmicorum ſi brachium g A mutetur in g y, vt eſt g A ad g y ita viciſſim eſt æquiponderans brachij g y ad aliud brachij g A ; vt autem g y ad g A ita eſt (vt patet ex methodo corollarij duodecimæ libri tertij) quadrans quadrati circumſcripti circulo ad ſemicirculum ipſum, vel ita eſt dimidium quadrati circumſcripti ad circulum ; ergo brachio g y, æquiponderans triangulo b l g eſt ſpatium quod ad ſextantem quadrati b g ſit vt circulus ad dimidium circumſcripti quadrati.

Rurſus quoniam figuræ totius b p g centrum grauitatis eſt in axe o p æquiponderans illi, brachio g A erit dimidium totius figuræ b q g, hoc eſt ſpatium æquale quadrato p o vt ex duodecima primi & ex nona ſecundi

constat: sed quadratum p o est quarta pars quadrati g c; ergo æquiponderans istud est quarta pars quadrati g c. Igitur si brachium g A mutetur in g y æquiponderans respondens brachio g y erit octaua pars circuli semidiametro g c descripti, ac proinde duplum æquiponderantis quæsitum erit octaua pars circuli genitoris diametri f c, aucta spatio quod ad sextantem quadrati b g sit vt dimidium quadrati circumscripti ad ipsum circulum. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam progressionis primæ perspectæ primus terminus ponitur quadratum g c, secundus verò circulus f c duplus rectanguli c g b, recta c g ad g b erit vt primus terminus ad dimidium secundi, vel vt tertius ad dimidium quarti: sed vt tertius ad dimidiũ quarti ita est semuncia tertij ad quadragesimã octauã partem quarti termini; ergo cum sextans quadrati b g sit semuncia tertij termini, spatium quod ad sextantem quadrati b g sit vt dimidium quadrati circulo circumscripti ad ipsum circulum, erit quadragesima octaua pars quarti termini progressionis cuius primus terminus est quadratum semidiametri circuli, secundus est ipse circulus.

PROPOSITIO XXIII.

SIt (*Fig.* 43.) tota semicycloides parua a b c f, cuius axis f c, basis f a; maneat vt in superiore quadrans circularis d g c, completúsque sit semicirculus f d c.

Ostendendũ est libra grãmica y b suspensa vt suprà, æquiponderãs dicylindraceo genito ad positionem plani d g b ex quadrante circulari f e d g & ex figura b z a f g, esse condicta ratione æquale cylindraceum altitudinis g d, baseos notæ posito tetragonismo circuli. Quando verò totum dicylindraceum sumitur, æquiponderans illi esse æquale cylindraceo altitudinis eiusdem, baseos æquantis dimidium quarti termini progressionis primæ perspectæ iam explicatæ deducta decima sexta parte quadrati f a, & simul septem quadragesimis octauis partibus circuli genitoris diametro f c descripti.

Compleatur parallegrammum f a q g, & ex recta b q abscindatur q r æqualis rectæ a q vel g f; compleatur quoque parallelogrammum d g q o. Igitur libra r b suspensa ex q perpendiculo o q a (cùm a z b q sit eadem atque b f c g sed subcontrariè posita, vt ex octaua secundi libri constat) notum erit ex superiore æquiponderans dicylindraceo genito ex quadrante circulari f e d g & ex figura a z b q: sed notum est etiam æquiponderans dicylindraceo genito ex toto parallelogrammo a q g f & ex quadrante circulari f e d g; ergo per subductionem notum est æquiponderans dicylindraceo genito ex quadrante circulari f e d g, & ex figura a z b g f ad positionem plani d g b. Rursus cùm per octauam nota sit dicylindracei totius pars quæ insistit basi a z b q ad positionem rectæ g q sum-

ptæ. si ex dicylindraceo noto cuius basis sit parallelogrammum f a q g vel quælibet eius pars sub parallela rectæ g b, auferatur pars illa, relinquetur nota altera pars baseos a z b g f: ergo cùm pars ista sit nota, & illius æquiponderans brachio q r, notum quoque erit illius æquiponderans brachio g y, vt ex nona & decima secundi tetragonismicorum liquet: ergo generaliter ostendimus quod erat demonstrandum.

In casu verò proposito æquiponderans parti baseos a z b q totius, est per superiorem cylindraceum altitudinis q o vel g d baseos æquantis decimam sextam partem circuli genitoris f c auctam nonagesima sexta parte quarti termini perspecti. Ipsa verò portio baseos a z b q est per septimam æqualis cylindraceo eiusdem altitudinis, baseos æquantis quadrantem quadrati g c, & decimam sextam partem quadrati f a vel tertij termini perspecti. Igitur propter mutationem perpendiculi a q in perpendiculum f g, & brachij q r in g y, prima pars baseos suspensi mutabitur in quadrantem circuli genitoris; altera verò pars mutabitur in decimam sextam partem quarti termini progressionis perspectæ. Ergo æquiponderans portioni baseos a z b q brachio g y est cylindraceum altitudinis g d baseos æquantis quadrantem circuli genitoris & simul decimam sextam partem quarti termini perspectæ progressionis, deductâ decima sexta parte circuli genitoris, & deductâ nonagesima sexta parte quarti termini perspecti. Igitur ratione omnium subductâ, basis cylindracei brachio g y æquiponderantis portioni insistenti super a z b q est quinque nonagesimæ sextæ quarti termini auctæ tribus decimis sextis circuli genitoris.

Rursus cylindraceo altitudinis f a, baseos f e d g, ex methodo tradita in vigesima prima propositione æquiponderat cylindraceum altitudinis d g baseos æquantis octauam partem quarti termini perspecti. Nam si brachium æquet rectam f a æquiponderans erit dimidium ipsius cylindracei, hoc est, erit cylindraceum cuius altitudo f m dimidium rectæ f a, basis quadrans circulaais f e d g, hoc est, quadrans secundi termini; si ergo brachium longitudinis f a mutetur in brachium longitudinis g y, æquiponderantis illius basis quadrans secundi termini mutabitur in quadrantem tertij; ergo brachio g y posito, æquiponderans est cylindraceum A altitudinis f m vel m a, baseos quadrantis tertij termini. Quoniam verò vt dimidium rectæ f g vel g y ad dimidium rectæ f a, ita est quadrans tertij termini ad quadrantem quarti, cylindraceum B cuius altitudo sit dimidium rectæ f g, basis quadrans quarti termini perspecti erit æquale cylindraceo A propter leges reciprocationis: sed propter easdem leges cylindraceo B est æquale cylindraceum D altitudinis g f baseos æquantis octauam partem quarti termini perspecti: ergo cylindraceo baseos f e d g altitudinis f a, posito brachio g y, perpendiculo plano d g f, æquiponderat cylindraceum D altitudinis g d vel f g, baseos æquantis octauam partem quarti termini perspecti prout fuit propositum.

Quoniam verò si ex æquiponderante totius cylindracei baseos f e d g

dematur æquiponderans partis insistentis super q a z b restat æquiponderans alteri parti, patet æquiponderans parti quæsitum esse septem nonagesimas sextas quarti termini progressionis perspectæ deductis tribus decimis sextis circuli genitoris, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam æquiponderans in superiore propositione computatum, est cylindraceum altitudinis g d, baseos æquantis decimam sextam partem circuli genitoris auctam nonagesima sexta parte quarti termini perspecti: toti dicylindraceo baseos a b c f confusis in vnum æquiponderantibus demonstratis in ista & in superiore, æquiponderat cylindraceum altitudinis g d baseos æquantis vnciam quarti termini perspecti imminutam octaua parte circuli genitoris

PROPOSITIO XXIV.

Isdem manentibus (*Fig*. 43.) intelligatur figura f h u l c quæ sit tertia ad positionem rectæ g b post secundam a z c f & primam parallelogrammum cuius latus æquat rectam g y; earum verò hæc sit proprietas vt quæcunque n u parallela rectæ f a ducatur occurrens lineis a z b c, h u l c in z, u, tres rectæ, g y, n z, n u sint proportionales. Sit præterea figura f p c illa quam in superiore inuenimus esse basim cylindracei altitudinis g y, æquiponderantis condicta ratione ad positionem plani d g b dicylindraceo genito ex semicirculo f d c & ex figura a b c f.

Ostendendum est dicylindraceum genitum ex semicirculo f d c & ex figura h u l c f ad positionem plani d g b esse condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis g d baseos figuræ f p c bis sumptæ.

Quoniam enim completo parallelogrammo f x y g & c g y B si intelligatur libræ planæ axis f c sustentaculum x B, & ad positionem rectæ g b aptetur sustentaculo x B dimidium tertij gradûs h u c f, istud dimidium ita aptatum æquiponderat condicta ratione figuræ a z c f vt iacet manenti, ex vigesima octaua quarti tetragonismicorum; (nam vt brachium n D ad dimidium rectæ n z, ita ipsa n z ad dimidium rectæ n u aptatum puncto D) igitur posita eadem altitudine n e parallelogrammo z n e æquiponderat parallelogrammum altitudinis n e baseos æquantis dimidium rectæ n u; ac proinde dicylindraceo genito ex semicirculo f e c & ex cycloide parua a z c f æquiponderat axe f c perpendiculo plano d g c dicylindraceum genitum ex dimidio figuræ h u c f aptato ad sustentaculum x B, & ex eodem semicirculo f e c. Quoniam verò eidem iisdem positis æquiponderat cylindraceum altitudinis g d, baseos f p c pariter aptatæ sustentaculo x B, patet dicylindraceum aptatum, esse æquale cylindraceo aptato: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLL.

COROLLARIVM.

Calculus pro casu duplici computato in superiori propositione patet pro præsenti, cui duplum prioris competit.

PROPOSITIO XXV.

SIt (*Fig.* 44.) quæuis figura b f c a ad positionem rectæ c a insistens super recta b a constituente cum a c augulum rectum b a c: super b a constructum sit quodcunque rectangulum b a u h. Intelligatur figura a b f c per lineam b e d diuisa in duas b e d a, b f c d e, quarum b e d a dicatur prima pars, & secunda b f c d e. Ad positionem rectæ a u ponatur primus gradus parallelogrammum b a u h, secundus figura b e d a, tertius figura b l m a, ita vt tres eorum quælibet dimetientes g o, g e, g l parallelæ ad rectam a u, sint proportionales: ponatur rursus idem primus gradus, secundus figura b c d e, tertius figura b i r a, ita vt tres eorum dimetientes g o, e f, g i sint proportionales: intelligatur denique figura h u r p q ita se habens ad primam & secundam partem, vt sicuti est o g dimetiens primi gradus ad g e dimetientem partis primæ, ita sit f e dimetiens secundæ ad o s dimidium rectæ o p dimetientis figuræ h u r q. Figuram cuius dimetiens f g voco mixtam videlicet ex prima parte & ex secunda: figuram cuius dimetiens g l vocabo tertium gradum primæ partis; figuram dimetientis g i, tertium secundæ: figuram dimetientis o s vocabo *ignotam*, eo quòd ad præsentem demonstrationem non sit necessarium vt cognita sit. Tertium gradum mixtæ, illum dicam qui posito primo b a u h, respondet secundo b f c a.

Ostendendum est tertium gradum mixtum componi ex tertio gradu primæ & secundæ partium, & ex ignota.

Quoniam enim quadratum f g æquale est duobus quadratis f e, e g & bis rectangulo f e g, quadrato autem f e est æquale rectangulum o g i, quadrato e g rectangulum o g l, bis rectangulo f e g rectangulum g o p, patet rectangulum altitudinis g o baseos compositæ ex rectis g i, g l, o p esse æquale quadrato g f; ergo tres rectæ g o, g f & composita ex tribus g i, g l, o p sunt proportionales, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XXVI.

IIsdem manentibus (*Fig.* 44.) ad positionem rectæ d a dicylindraceum genitum ex ignota & ex prima parte est æquale dicylindraceo ex secunda parte & ex tertio gradu primæ: dicylindraceum verò genitum ex ignota & ex secunda est æquale dicylindraceo genito ex prima parte & ex tertio secundæ.

Quoniam vt parallelogrammi b a u h dimetiens g o ad g e dimetientem primæ partis, ita est f e dimetiens secundæ ad o s dimetientem ignotæ; si vt o g ad g e, ita fiat o s ad quartam notatam elemento F; dimetiens e f secundæ partis erit ad quartam F in duplicata ratione rectarum g o, g e: sed recta g o ad g l est in eadem duplicata ratione rectarum g o, g e, cùm tres rectæ g o, g e, g l sint proportionales: ergo vt g o dimemetiens parallelogrammi ad g l dimetientem tertij gradûs primæ partis, ita e f dimetiens secundæ partis ad F: ergo dicylindraceum sub mediis videlicet sub tertio primæ partis & sub secunda parte est æquale cylindraceo sub extremis contento, nempe sub parallelogrammo & sub figura dimetientis F. Præterea cùm tres g o, g e, g l sint proportionales tribus e f, o s, F & ternarij vtriusque ratio sit continua, erit vt g o dimetiens parallelogrammi ad g e dimetientem primæ partis, ita o s dimetiens ignotæ ad F: ergo dicylindraceum sub mediis videlicet sub prima parte & sub ignota est æquale cylindraceo contento sub extremis, nempe sub parallelogrammo & sub figura dimetientis F. Atqui eidem cylindraceo ostendimus suprà æquale esse dicylindraceum contentum sub tertio gradu primæ partis & sub secunda parte: ergo istud dicylindraceum sub tertio gradu primæ partis & sub secunda parte contentum est æquale dicylindraceo contento sub prima parte & sub ignota, quod erat primò propositum.

Rursus quoniam vt parallelogrammi b a u h dimetiens g o ad f e dimetientem secundæ partis, ita est g e dimetiens primæ ad o s dimetientem ignotæ, si vt g o ad f e dimetientem secundæ partis ita fiat o s ad quartam notatam elemento G, dimetiens g e secundæ partis erit ad quartam G in duplicata ratione rectarum g o, f e: sed recta g o ad g i est in eadem duplicata ratione, cùm tres rectæ g o, f e, g i sint proportionales: ergo vt g o dimetiens parallelogrammi ad g i dimetientem tertij gradûs secundæ partis, ita g e dimetiens primæ partis ad G. Præterea cùm g o, f e, g i sint proportionales & in eadem ratione sint quoque tres g e, o s, G; erit vt g o dimetiens parallelogrãmi ad f e dimetientẽ secundę partis, ita o s dimetiens ignotæ ad G: ergo dicylindraceum sub mediis videlicet sub secunda parte & sub ignota est æquale cylindraceo sub extremis, nempe sub parallelogrammo & sub figura dimetientis G. Atqui eidem cylindraceo ostendimus paulò antè æquale esse dicylindraceum contentum sub tertio gradu secundæ partis & sub prima parte: ergo istud dicylindraceum sub tertio gradu secundæ partis & sub prima comprehensum est æquale dicylindraceo contento sub secunda parte & sub ignota, quod erat secundo loco propositum.

COROLLARIVM.

Quoniam tertius gradus mixtus componitur ex tertio gradu primæ & secundæ partis & bis ex ignota, patet dicylindraceum sub tertio mixto gradu & sub secundo mixto b f c e esse æquale octo dicylindraceis geni-

tis ex tertio gradu primæ ducto in primam; ex eodem tertio ducto in secundam: item ex tertio gradu secundæ ducto in primam, & ex eodem tertio ducto in secundam; item ex ignota ducta bis in primam, & ex eadem ignota ducta bis in secundam. Cùm igitur per præsentem dicylindraceum ex ignota ducta bis in primam fit dicylindraceum bis ex tertio gradu primæ & ex secunda genitum; dicylindraceum verò ex ignota ducta bis in secundam fit dicylindraceum bis ex tertio gradu secundæ & ex prima genitum, patet octo illa dicylindracea esse dicylindraceum sub prima & sub tertio primæ gradu, dicylindraceum item sub prima & ter sub tertio secundæ; præterea dicylindraceum sub secunda & sub tertio ipsius gradu, & dicylindraceum sub secunda & ter sub tertio gradu primæ. Igitur dicylindraceum sub tertio mixto gradu & sub secundo contentum, est æquale dicylindraceo sub prima & sub eius tertio gradu, dicylindraceo quoque sub prima & ter sub tertio gradu secundæ; dicylindraceo præterea sub secunda & sub tertio ipsius secundæ gradu, dicylindraceo denique sub secunda & ter sub tertio primæ gradu. Vnde patet ignotam euanuisse, nec eam hîc requiri.

PROPOSITIO XXVII.

Reuocetur schema decimæ quartæ (*Fig.* 40.) & in eo figura a b r c f consideretur ad positionem rectæ f a tanquam composita ex duabus partibus quarum prima sit semicirculus f B c vel figura a b r c h, secunda pars sit semicycloides parua a h c f. Intelligatur primus gradus ad positionem rectæ g b esse parallelogrammum E f c lateris f E æquantis rectam g B vel g c: intelligatur parabolicum segmentum f b c cuius basis f c: intelligatur figura p q c f quæ sit tertius gradus secundæ partis a z c f. Intelligatur tertius gradus mixtæ a b c f genitus vt in vigesima quinta præscriptum fuit; concipiatur quoque gigni ignota figura ibidem definita.

Ostendendum est tertium gradum mixtæ ad positionem rectæ g b componi ex parabolico segmento f B c, ex figura p q c f, & ex bis ignota.

Quoniam enim f B c est segmentum parabolicum cuius basis f c æquat diametrum semicirculi f B c, ex tertia tetragonismicorum liquet tertium gradum semicirculi esse parabolicum illud segmentum: igitur ex vigesima quinta patet quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex corollario superioris sequitur dicylindraceum genitum ex mixta & ex tertio ipsius gradu ad positionem plani m g b esse æquale octo spatiis expositis in illo eodem corollario.

PROPOSITIO XXVIII.

QVadrata g a d c, a g f b (*Fig.* 45.) constituant rectangulum b f c d, in quo descriptum sit parabolicum segmentum b g d cuius basis b d, axis a g, tangens f c: ad planum b f c d excitata sit perpendicularis c n æqualis lateri c d: super recta f c ad positionem rectæ g a insistat quæuis figura f m l c. Intelligatur ad positionem plani n c d ex parabola b g h d & ex figura f m c gigni dicylindraceum; librâ grammicâ f c ex g suspensâ perpendiculo g m, brachio f g gignatur quadratrix prima g r c & secunda g q c respondentes primariæ figuræ g m l c, ita vt sicut f g brachium ad g i quamcunque portionem rectæ g c, sic sit i l dimetiens figuræ suspensæ parallela perpendiculo g m, ad i r dimetientem primæ quadratricis, ipsáque i r ad i q dimetientem secundæ: brachio verò g c gignantur duæ similiter quadratrices g u f, g t f ita vt sicut brachium g c ad g s, sic sit s x ad s u, & s u ad s t.

Ostendendum est ad positionem plani n c d dicylindraceum genitum ex parabola b p g h d & ex figura f m l c esse condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis c n baseos f t g q c l m x.

Iunctis rectis g d, g b, constat ex methodo vigesimæ quintæ & sextæ propositionis quarti libri tetragonismicorum dicylindraceum genitum ex figura g m l c & ex ceratoide parabolica g h d c, itemque aliud genitum ex figura g m x f & ex ceratoide parabolica g p b f esse condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis c n, baseos g q c, g t f. Patet quoque cylindraceum altitudinis c n, genitum ex parallelogrammo b f c d & ex figura f x m l c diuidi in duo genita & partibus parallelogrammi nempe ex parabola b p g h d, & ex complemento ad parallelogrammum: ergo dicylindraceum genitum ex parabola & ex figura f m c ad positionem plani n c d est condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis c n, baseos f t g q c l m x, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Si f m c ponatur circulus, ex quarto corollario decimæ quartæ tertij libri patet notum esse rectilineum æquale figuræ g q c, datâ circuli quadraturâ; ipsámque totam g q c esse quadrantem figuræ g m c, duásque simul g q c, g t f esse octauam partem circuli geniti diametro f c: ergo in hoc casu tota f t g q c l m x, est semicirculus f m c imminutus quarta parte ipsius; est ergo tres quadrantes semicirculi, vel tres octauæ totius circuli. Dimidium verò illius figuræ est tres decimæ sextæ partes eiusdem circuli.

PROPOSITIO XXIX.

IIsdem manentibus (*Fig.* 46.) figura g m l c sit paruæ cycloideos pars superior, & f g m x z sit eiusdem pars inferior.

Ostendendum est tam figuram g q c l m, quam z t g m x esse rectilineo noto æqualem posita quadratura circuli: & totam g q c l m esse æqualem septem nouenis quadrati g c: totam verò z t g m x esse æquale bessi circuli genitoris f c deductis septem nouenis quadrati g c.

Quoniam g m l c est superior pars semicycloideos paruæ, secunda illius quadratrix g q c brachio f g perpendiculo g m erit nota per decimam septimam superioris libri, positâ quadraturâ circuli. Tota verò g q c per eandem propositionem erit duæ nouenæ quadrati g c: sed tota g c l m ex duodecima primi est æqualis quadrato g c: igitur tota g q c l m est septem nouenæ quadrati g c.

Rursus completo parallelogrammo f g n z, quoniam figura m x z n est subcontrariè posita figuræ g c l m ex octauæ secundi corollario, librâ f g suspensâ ex g perpendiculo g m, brachio g c posito etiam ad partes oppositas brachij prioris f g, figuræ m x z n secunda quadratrix erit nota per decimam septimam tertij: sed parallelogrammi g f B n secunda quadratrix est etiam nota per duodecimam tertij tetragonismicorum; ergo per subductionem nota erit quadratrix secunda f g t ad positionem rectæ g m sumpta. Ergo si de quadratrice secunda parallelogrammi g f B n, siue B congruat puncto z siue non, dematur illa secunda, residua fiet secunda quadratrix f t g figuræ f x m g: parallelogrammum verò f g n B est ad f g n z siue ad circulum genitorem, vt recta f g ad g f.

Igitur quando tota z t g m quæritur, secunda quadratrix totius parallelogrammi g f z n est triens circuli genitoris, secunda verò figuræ m x z n est duæ nouenæ partes quadrati g c: ergo secunda f g t z est triens circuli genitoris deductis duabus nouenis quadrati g c. Cùm igitur figura f z x m g sit circulus genitor deducto quadrato g c, erit g t z m duo trientes circuli genitoris deductis septem nouenis quadrati g c: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hinc patet per additionem duas simul z t g m, g q c l m esse æquales bessi circuli genitoris, ideoque dicylindraceum ex parabola tota b g d & ex tota semicycloide parua f c m z esse æquale cylindraceo altitudinis æquantis rectam g c, baseos complectentis bessem circuli genitoris. Dicylindraceum verò ex a g d & ex g m l c cylindraceo altitudinis eiusdem baseos æquantis septem nouenas quadrati g c.

PROPOSITIO XXX.

REducta figura propositionis vigesimæ tertiæ (*Fig.* 43.) ostendendum est dicylindraceum sub secunda parte figuræ mixtæ,

hoc est sub figura f a b c, & sub eius tertio gradu h l c f ad positionem plani d g b genitum esse ad eandem positionem æquale cylindraceo altitudinis g d vel g c, baseos notæ; dato circuli tetragonismo.

Intelligatur solidi geniti circumuolutione figuræ f a z c f circa rectam f c quadrans qui insistit figuræ a z c f: isti quadranti libræ planæ axe f c sustentaculo x B perpendiculo plano d g c æquiponderans est notum per septimam & per decimam tertij libri: ergo per sextam eiusdem libri spatium sesquialterum istius æquiponderantis æquiponderat solido cuius sectiones parallelæ plano d g b sint quadrata lateris n z, g b &c. Igitur per corollarium quartum octauæ propositionis libri eiusdem si spatium eiusmodi sesquialterum conuertatur in cylindraceum cuius altitudo sit recta g d, duplum baseos illius erit quartus gradus, posito ad positionem rectæ g b primo f x B c, secundo f a b c, tertio f h l c. Igitur cùm cylindraceum sub primo gradu & sub quarto sit per vndecimam quarti tetragonismicorum æquale dicylindraceo sub secundo & tertio, patet quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Ex corollario primo septimæ propositionis libri superioris habemus æquiponderans parti illi quadrantis propositi quæ insistit super superiore parte b f c g esse cylindraceum altitudinis g d vel g c, baseos æquantis quadratum g b vel quadrantem quadrati f a imminutum duplo quadrati g c: cylindraceum istius sesquialterum retenta eadem altitudine habet pro basi tres octauas quadrati f a imminutas triplo quadrati g c: quartus igitur gradus est tres quadrantes quadrati f a deductis tribus quadratis g c. In isto igitur casu dicylindraceum genitum ex secundo & tertio gradu est æquale cylindraceo altitudinis g d, baseos continentis tres quadrantes quadrati f a imminutos tribus qnadratis g c.

COROLLARIVM II.

Ex corollario primo decimæ propositionis libri eiusdem habemus æquiponderans quadrantis propositi insistentis super tota basi a z c f esse cylindraceum altitudinis g d vel g c, baseos æquantis trientem quarti termini progressionis perspectæ imminutum duobus circulis genitoribus. Cylindraceum istius sesquialterum retentâ eadem altitudine habet pro basi dimidium quarti termini progressionis perspectæ imminutum tribus circulis genitoribus. In isto igitur casu dicylindraceum genitum ex secundo & tertio gradu est æquale cylindraceo altitudinis g d, baseos complectentis quartum terminum progressionis perspectæ imminutum sex circulis genitoribus.

PROPOSITIO XXXI.

Reuocato schemate (*Fig.* 40.) propositionis vigesimæ septimæ, ostendendum est dicylindraceum genitum ex figura a b c f, quæ

est magna semicycloides, & ex tertio ipsius gradu p q c f ad positionem plani m g b esse condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis m g, baseos æquantis rectilineum notum, datâ quadraturâ circuli.

Ex corollario vigesimæ quintæ liquet eiusmodi dicylindraceum esse æquale octo spatiis nempe dicylindraceo E genito ex prima parte a b c h & ex tertio ipsius gradu: dicylindraceo insuper F genito ex secunda parte a o h c f & ex eius tertio gradu: præterea ter dicylindraceo G genito ex prima & ex tertio gradu secundæ: denique ter dicylindraceo H genito ex secunda & ex tertio gradu primæ. Atqui E est cylindraceum altitudinis g m vel g c, baseos æquantis rectilineum notum per corollarium vigesimæ octauæ huius libri: F quoque est æquale cylindraceo eiusdem altitudinis, baseos notæ per trigesimam huius: G pariter est æquale cylindraceo eiusdem illius altitudinis, baseos notæ per vigesimam quartam: H denique est æquale cylindraceo eiusdem altitudinis, baseos notæ per vigesimam nonam præsentis libri: ergo totum dicylindraceum ex illis collectum est æquale cylindraceo altitudinis g m, baseos æquantis illorum cylindraceorum iam demonstratorum bases: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Ex corollariis vigesimæ quartæ, vigesimæ octauæ, trigesimæ, & vigesimæ nonæ constat pro casu superioris partis b r c g istud dicylindraceum esse æquale cylindraceo altitudinis g m, baseos æquantis decimam sextam partem quarti termini progressionis perspectæ auctam tribus quadrantibus tertij siue quadrati f a, nouem decimis sextis secundi siue circuli genitoris f c, & imminutam besse primi siue quadrati g c. Nam basis cylindracei æqualis spatio E dat tres decimas sextas circuli genitoris: basis cylindracei F dat tres quadrantes quadrati f a imminutos tribus quadratis g c: basis cylindracei G ter sumpta dat decimam sextam partem quarti termini auctam tribus octauis circuli genitoris: basis cylindracei H ter sumpta exhibet septem trientes quadrati g c. Summa ex illis basibus conflata est illa quam protulimus initio corollarij.

COROLLARIVM II.

Ex iisdem illis constat pro casu totius semicycloideos magnæ a b c f istud dicylindraceum esse æquale cylindraceo altitudinis g m, baseos æquantis tres semisses quarti termini imminutos triginta quinque octauis circuli genitoris siue secundi termini. Nam basis cylindracei E dat tres octauas circuli genitoris: basis cylindracei F dat quartum terminum imminutum sex circulis genitoribus: basis cylindracei G ter sumpta dat dimidium quarti termini imminutum tribus quadrantibus circuli genitoris: basis cylindracei H ter sumpta dat duos circulos genitores, quarum basium summa consonat proposito calculo.

COROLLARIVM III.

Quoniam primus gradus ad positionem rectæ g h est parallelogrammum E f c, secundus semicycloides magna a b c f, tertius p q c f, patet quartum esse ęqualem basi collectę ex basibus illorum octo cylindraceorum altitudinis g m: nam vt E f dimetiens primi gradus ad y z dimetientem secundi, ita est y z ad y q dimetientem tertij, & ita erit y q ad dimetientem quarti, sed ita etiam est eadem y q ad basim rectanguli altitudinis E f vel g m quod æquale sit rectangulo q y z: ergo cùm cylindracei iam inuenti sectio parallela plano m g b sit rectangulum æquale rectangulo q y z, patet basim illius esse quartum gradum.

PROPOSITIO XXXII.

Isdem manentibus vt in decima quarta (*Fig.* 47.) circa rectam f c intelligatur circumuolui semicycloides magna a b c f, & consideretur dimidium illius solidi quod ad partes b abscinditur plano m g c.

Ostendendum est libra B b suspensa ex g perpendiculo plano m g c, brachio B g æquante rectam g c, eiusmodi dimidio vel integro, vel cuilibet eius parti ad positionem plani m g b designatæ æquiponderare cylindraceum altitudinis g m, baseos notæ, datâ circuli quadraturâ, nempe æquantis bessem quarti gradûs in superioris propositionis corollario vltimo collecti.

Quoniam ex corollario superiore habemus quartum gradum, dimidium illius est basis illius cylindracei altitudinis eiusdem g m, quod æquiponderat solido cuius sectio parallela plano m g b est quadratum lateris y z, g b &c. per corollarium quartum octauæ superioris libri: sed cylindraceum altitudinis eiusdem cuius basis sit bes baseos illius est per sextam eiusdem libri æquiponderans quadranti solidi descripti circa rectam f c: ergo cylindraceum altitudinis eiusdem, baseos æquantis trientem quarti gradûs æquiponderat quadranti solidi illius peripherici: ergo dimidio proposito illius solidi peripherici æquiponderat cylindraceum altitudinis g m, baseos æquantis bessem quarti gradûs suprà inuenti, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Æquiponderans igitur portioni ad partes C abscissæ per planum m g b in quo iacet centrum g, est cylindraceum altitudinis m g, baseos æquantis semunciam quarti termini, dimidium tertij, tres octauas secundi deductis quatuor nouenis primi.

Æquiponderans verò toti est cylindraceum altitudinis m g, baseos æquantis quartum terminum perspectæ progressionis imminutum triginta quinque vnciis circuli genitoris, vel secundi termini. Istud patet ex corollariis duobus primo & secundo superioris propositionis.

PROP.

PROPOSITIO XXXIII.

Isdem manentibus (*Fig.* 47.) portio solidi peripherici circa rectam f c descripti abscindatur per planum m g c & per n y z quoduis ipsi m g b parallelum, nisi cum ipso congruat.

Ostendendum est centrum grauitatis eiusmodi portionis esse notum data quadratura circuli.

Portionis designatæ sectio cum plano c f a sit figura z c y. Per superiorem inueniatur solidum C æquiponderans portioni designatæ, brachio B g perpendiculo plano n y c; Ex corollario tertio decimæ nonæ præsentis libri inueniatur solidum D æquiponderans portioni designatæ librâ c f suspensâ ex g perpendiculo plano n y z, brachio æquante rectam g B. Per decimam propositionem inueniatur solidum E æquale portioni suspensæ. Vt est E ad C ita fiat brachium g B ad rectam y r abscissam ex y c: vt est E ad D ita fiat idem g B ad y q abscissam ex y z, compleatur parallelogrammum q y r p. Dico punctum p esse centrum grauitatis portionis propositæ.

Istud demonstratur vt in vigesima secundâ & vigesima tertia superioris libri; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hoc ipso quod notum est punctum r, patet notum esse centrum grauitatis totius portionis abscissæ per planum n y z vtrinque productum, sicuti in vigesimæ secundæ & vigesimæ tertiæ pari casu monuimus.

PROPOSITIO XXXIV.

Isdem manentibus (*Fig.* 47.) circa rectam z y parallelam basi f a vel ipsi congruentem descriptum sit solidum motu figuræ c z y; eius dimidium plano n y z abscindatur ad partes c.

Ostendendum est centrum grauitatis eiusmodi solidi esse cognitum.

Per decimam quartam huius libri inueniatur solidum D æquiponderans solido descripto brachio æquante rectam g c, perpendiculo plano n y z. Ex decima nona inueniatur solidum C quod libræ brachio g B perpendiculo n y c ęquiponderet solido descripto. Per decimá nonam primi inueniatur solidum E æquale suspenso. Vt est E ad C ita fiat recta g B ad y r abscissam ex rectâ y c; & vt idem E ad D, ita fiat eadem g B ad y q abscissam ex recta y z. Completo parallelogrammo q y r p, dico punctum p esse centrum grauitatis quæsitum.

Istud demonstratur vt superior propositio: ergo &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Patet punctum o esse centrum grauitatis totius solidi peripherici, prout in pari casu propositionis superioris.

PROPOSITIO XXXV.

OCto problematis ab Anonymo propositis solutionem esse hactenus à nobis datam demonstrare.

Primò (*Fig.* 47.) quæritur dimensio spatij z c y. Demonstratur in duodecima primi & in eius corollariis.

Secundò quæritur centrum grauitatis spatij z c y. Inuenitur in corollario tertio nonæ libri præsentis.

Tertiò quæritur solidum circa basim z y. Inuenitur in decima nona primi.

Quartò quæritur solidum circa axem c y. Inuenitur in decima præsentis libri.

Quintò quæritur solidi totius circa basim z y centrum grauitatis. Demonstratur in corollario superioris.

Sextò quæritur centrum grauitatis solidi totius circa axem c y geniti. Demonstratur in corollario trigesimæ tertiæ.

Septimò dimidij solidi circa basim z y diuisi à plano per rectam z y ducto & recto ad c y z planum, quæritur centrum grauitatis. Datur in superiore.

Octauò quæritur centrum grauitatis dimidij solidi circa c y geniti & diuisi plano a y c. Reperitur in trigesima tertia. Ergo &c. quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XXXVI.

PRoponitur calculus octo problematum pro duplici casu quem Anonymus in primis ad Europæ Geometras literis designauit.

Sit (*Fig.* 48.) a c d cycloides magna respondens circulo genitori diametri c f, eiusque pars superior sit b c o, inferior b o d a, reliqua hîc construantur & ponantur sicuti in vigesima quinta tertij pro simili causâ factum fuit.

Primò quæritur segmentum a c d, itémque segmentum b c o. *Istud constat ex duodecima propositione primi libri.*

Segmentum a c d est triplum secundi termini progressionis perspectæ quam determinauimus initio vltimæ propositionis libri tertij. Segmentum b c o est æquale duplo primi termini & simul dimidio secundi.

Secundò quæritur grauitatis centrum pro figura c z b g, itémque pro figura c b a f. *Istud perficitur per corollarium tertium nonæ propositionis.*

Vt primus terminus auctus quadrante secundi se habet ad decimam sextam partem tertij auctam bis quadrante secundi & imminutam quinque vnciis primi, ita fiat recta g e ad g q abscissam ex g b : vt autem idem primus terminus auctus quadrante secundi ad octauam partem secundi auctam triente primi, ita fiat recta g f ad g y abscissam ex g c. Comple-

to parallelogrammo y g q p dico punctum p esse centrum grauitatis in figura c z b g.

Præterea vt sunt tres semisses secundi termini ad tres quadrantes tertij imminutos quatuor trientibus primi, ita fiat recta f i ad f r: punctum verò t ita secet rectam c f vt tota c f ad f t sit sicut duodenarius ad quinarium. Completo parallelogrammo t f r s, dico punctum s esse centrum grauitatis in figura c b a f.

In figuris autem b c o, a c d centra grauitatis sunt y & t.

Tertiò quæritur solidum genitum circa basim b o circumductu figuræ b c o, itémque aliud circa basim a d circumacta figura a c d. *Istud obtinebitur per decimam nonam primi libri.*

Solidum genitum circa rectam b o est æquale cylindraceo altitudinis f u, baseos æquantis duplum secundi termini auctum sexdecim trientibus primi; vel reciprocè altitudinis f n, baseos æquantis dimidium tertij termini auctum quatuor trientibus secundi. Solidum verò aliud est æquale cylindraceo altitudinis f u, baseos æquantis viginti terminos secundos; vel vicissim altitudinis f n, baseos æquantis quinque terminos tertios.

Quartò quæritur solidum genitum circumductu figuræ c z b g circa rectam c g manentem, & aliud præterea quod generetur ex circũacta figura c b a f circa rectam c f manentem. *Istud habetur ex corollario decimæ.*

Basis cylindracei altitudinis f u æquat in primo casu dimidium tertij termini auctum quadruplo secundi, & imminutum decem trientibus primi; vel reciprocè altitudinis f n cylindraceum habet pro basi octauam partem quarti termini auctam tertio & minutam decem vnciis secundi. In secundo casu basis cylindracei altitudinis f u est sextuplum tertij termini imminutum triginta duobus trientibus primi; vel basis cylindracei altitudinis f n est tres semisses quarti deductis octo trientibus secundi.

Quintò quæritur centrum grauitatis solidi circa b g geniti motu figuræ c z b g, itémque alterius geniti motu figuræ c b a f circa manentem a f. *Istud obtinetur ex corollario primo decimæ sextæ, & ex corollario secundo decimæ nonæ.*

Vt secundus terminus auctus octo trientibus primi ad quadrantem tertij auctum quatuor trienbus secundi & imminutum sexdecim nouenis primi, ita fiat recta g e ad g q abscissam ex g b. Dico punctum q esse centrum grauitatis pro primo casu. Vt autem eiusdem secundi termini decuplum ad quintuplum tertij imminutum centum viginti & octo nouenis primi, ita fiat recta f i ad f r abscissam ex recta f a. Dico punctum r esse centrum grauitatis pro secundo casu.

Sextò quæritur centrum grauitatis solidi circa c g geniti motu figu-

ræ c z b g, itémque alterius geniti motu figuræ c b a f circa manentem c f. *Istud habetur ex corollario tertio decimæ nonæ.*

Vt dimidium tertij termini auctum quadruplo secundi & imminutum decem trientibus primi se habet ad quadrantem tertij auctum quatuor trientibus secundi & imminutum sexdecim nouenis primi, ita fiat recta f g ad g y abscissam ex g c. Dico y esse centrum quæsitum pro primo casu. Vt autem sextuplum tertij imminutum triginta duobus trientibus primi se habet ad quintuplum tertij imminutum centum viginti octo nouenis primi, ita fiat recta f x ad f t abscissam ex f g rectâ. Dico punctum t esse centrum grauitatis pro secundo casu.

Septimò solidum genitum circa rectam b g circumacta figura c z b g intelligatur bifariam secari plano m g b, nec non solidum genitum circa rectam f a circumductu figuræ c b a f, plano n f a. Quæritur centrum grauitatis dimidij solidi in vtroque casu. *Istud patet ex corollariis tertio & quarto vigesimæ.*

Vt octaua pars tertij termini aucta triente secundi se habet ad octauam partem eiusdem secundi, auctam quatuor nouenis primi, ita fiat recta g f ad g y abscissam ex g c. Manente puncto q reperto in solutione quinti compleatur parallelogrammum y g q p; dico punctum p esse centrum grauitatis pro primo casu.

Vt autem quinque quadrantes tertij ad triginta quinque vncias secundi ita fiat recta f x ad f t abscissam ex f g. Manente puncto r reperto in solutione quinti compleatur parallelogrammum t f r s; dico punctum s esse centrum grauitatis pro secundo casu.

Octauò solidum genitum circa rectam c g circumducta figura c z b g intelligatur bifariam secari plano m g c, item solidum genitum circumducta figura c b a f circa manentem c f, secetur bifariam plano n f c. Quæritur centrum grauitatis dimidij solidi in vtroque casu. *Istud habetur ex corollario trigesimæ secundæ.*

Vt decima sexta pars quarti termini aucta dimidio tertij & imminuta quinque vnciis secundi se habet ad semunciam quarti termini auctam dimidio tertij tribúsque octauis secundi, & imminutam quatuor nouenis primi, ita fiat g e ad g q abscissam ex g b. Manente puncto y quod in solutione sexti repertum fuit compleatur parallelogrammum y g q p; dico p esse centrum grauitatis quæsitum in primo casu.

Vt autem dodrans quarti termini imminutus quatuor trientibus secundi se habet ad quartum eundem terminum diminutum triginta quinque vnciis secundi, ita fiat f i recta ad f r abscissam ex f a. Manente puncto t quod in solutione sexti suprà reperimus, compleatur parallelogrammum t f r s; dico punctum s esse ceutrum grauitatis pro secundo casu. Ergo &c. quod erat propositum.

COROLLARIVM.

In calculo ſeptimi & octaui problematis tam pro paruâ quàm pro magnâ cycloide, liquet baſim cylindracei æquantis ſuſpenſum ſolidum eam eſſe aſſumptam quæ reſpondet altitudini f n, eò quòd cylindracea æquiponderantia prodierint eiuſdem altitudinis. Patet etiam calculum horum duorum poſtremorum complecti reliquorum calculos, ac proinde nihil remouiſſe laboris qui calculatoris tædio in ſpeciem parſurus hos duos tantùm exegerit. Patet denique fructum totius operis ſuauiſſimum eſſe iſtum calculum, quem ita rotundè per progreſſionis perſpectæ terminos, noſtræ ex libra petitæ demonſtrationes exhibent, vt haud ſciam an rotundiùs id alia via præſtetur. Cæterùm ſub finem tot calculorum admonendus es, Erudite Lector, quod in præfatione quarti tetragoniſmicorum, & in ſcholio primo tertiæ propoſitionis libri quinti iam pridem ſcripſimus, lapſum in epilogiſmis tractandis eſſe perfacilem & vehementer timendum calculatori etiam exercitatiſſimo. Hoc verò diligenter attendendum tibi eſſe ſi quis fortaſſe error in noſtris numeris detegeretur, vtrum vitium in eorum tractatione ſubſiſtat, an etiam ad ipſam grammicam demonſtrationem perueniat; ſi enim iſta rectè procedat, ſtant cætera, inde quippe emendari poterunt numeri, quorum vitium tantùm excuſationis habere cenſuerunt Legum Conditores, vt nunquam in rem iudicatam tranſire voluerint, ſi quid perperam computatum probari poſſit.

SCHOLIVM I.

Præſentem omnium caſuum calculum edidimus nona die Ianuarij anni labentis 1659. ſtatim atque prodiit Dettonuillanus ſed qui vni tantùm eorum reſponderet his verbis ex ſermone Gallico in Latinum verſis. Mihi igitur ſatis non erit dare tibi problematum calculos, quorum vnus eſt iſte attinens ad caſum à me propoſitum [Centrum grauitatis ſemiſolidi geniti circumductu ſemicycloideos circa baſim, ab ipſa baſi diſtat interuallo rectæ quæ ad diametrum circuli genitoris ſe habet vt ſeptuplum diametri ad ſextuplum circumferentiæ. Ab axe verò diſtat interuallo rectæ æquantis quadrantem circumferentiæ eiuſdem, deductis ſexdecim quintis partibus rectæ quæ inter centrum circuli genitoris, & grauitatis centrum ſemicirculi eiuſdem interiacet.] Sed inſuper tibi detegam meam pro centris grauitatis methodum generalem, quæ quò vniuerſalior eſt, tantò tibi gratior accidet. *ſub finem noſtri calculi tunc editi adiecimus quæ ſequuntur.*



Calculus centri grauitatis semisolidi circa dimidium baseos geniti reducitur ad terminos Dettonuillanos, quos Veredarius Publicus hac ipsa hebdomada v. Eid. Ian. ineuntis anni 1659. primùm detulit in hanc vrbem.

DISTANTIA CENTRI A BASI.

EX definitione tradita initio libri tertij primus terminus *perspectæ* progressionis ad secundum est sicut diameter circuli ad ipsius peripheriam. Per secundam partem calculi respondentis septimo problemati proposito, semidiameter circuli genitoris ad distantiam quæ est inter basim & centrum illud grauitatis est vt quinque quadrantes tertij termini ad triginta quinque vncias secundi; vel vt quinque quadrantes secundi ad triginta quinque vncias primi: ergo tota diameter circuli genitoris ad illud interuallum est vt quinque semisses secundi termini ad triginta quinque vncias primi; vel vt triginta vnciæ secundi ad triginta quinque vncias primi: vel vt secundus terminus progressionis tricies sumptus ad primum sumptum tricies & quinquies. Cùm igitur si secundus terminus ponatur peripheria circuli, primus sit eiusdem circuli diameter: distantia centri grauitatis à basi erit ad diametrum circuli genitoris vt diameter circuli tricies & quinquies sumpta ad peripheriam circuli eiusdem tricies sumptam, vel in minimis numeris, vt septuplum diametri circuli ad sextuplum peripheriæ circuli eiusdem: quod ad amussim quadrat calculo Dettonuillano.

DISTANTIA CENTRI EIVSDEM AB AXE.

Per secundam partem calculi respondentis quinto problemati proposito, vt est secundi termini decuplum ad tertij quintuplum imminutum centum viginti octo nouenis primi, ita est semidiameter circuli genitoris ad distantiam centri illius ab axe. Si tertius terminus ponatur semiperipheria circuli genitoris, secundus erit semidiameter, primus verò designetur elemento A: interuallum autem inter centrum circuli genitoris, & grauitatis centrum semicirculi eiusdem notetur elemẽto B. Cùm ex 18. tertij tetragonismicorum vt circulus ad 4. trientes quadrati quod potest eius semidiameter, ita sit ipsa semidiameter ad B: circulus autem ad quadratum semidiametri suæ sit vt semiperipheria circuli ad eiusdem semidiametrum: erit igitur vt semiperipheria genitoris circuli ad quatuor trientes semidiametri, ita semidiameter ipsa ad quatuor trientes termini A; sed ita etiam est ad B: ergo B est quatuor trientes termini primi A: ergo centum viginti octo nouenæ primi termini A sunt trecentæ octoginta quatuor trigesimæ sextæ, vel triginta duo trientes interualli B. Vt igitur decem semidiametri circuli genitoris ad quinque semiperipherias,

vel ad decem quadrantes peripheriæ imminutos centum viginti octo nouenis primi termini A, vel triginta duobus trientibus interualli B, ita vna ſemidiameter circuli genitoris ad vnum peripheriæ circularis quadrantem imminutum triginta duabus trigeſimis, vel ſexdecim decimis quintis interualli B, qui eſt ipſiſſimus calculus Dettonuillanus.

Iſta porrò tam mirabilis conſonantia fecit vt minùs iam metuentes vitium calculi, illum à ſua demonſtratione diuulſum tandem demus in lucem, contra quàm apud nos conſtitutum habuimus. Quoties enim calculus adhæret ſuæ demonſtrationis methodo, lubrica illius ratio, ſi fortè ab ipſa aberrare deprehenditur, non magis imputatur Autori demonſtrationis, quàm ipſa Typographi errata.

AD LECTOREM.

CVm exemplar librorum de Cycloide quatuor iam ab initio Octobris miſerim ad R. P. Moret in Collegio Societatis noſtræ Claramontano degentem, poteris, Lector benigne, apud illum inſpicere vtrum ego vlli fucum faciam aut fecerim hactenus, dum palam profiteor ſolutionem integram problematum ſub initium Iulij ad Europæ Geometras miſſorum eſſe à me inuentam, verámque credi ſaluo tamen examine maturiore aliorum, vel etiam meo. Auſim verò iterum affirmare, quod in præfatione eorum librorum iam ſemel dixi, me demonſtrationum veritatis longè ſecuriorem eſſe quàm calculi, cuius lapſus venia dignus exiſtimatur, quando per incogitantiam accidit, vt in præfatione quarti libri Tetragoniſmicorum iam olim monui. Cæterùm ex iſtis omnibus liquet euaneſcere omnia quæ contra me à nonnullis paulò feruidiùs iactantur in circulis doctiorum Geometrarum, & per Galliam editis vernaculè libellis ſparguntur. Quod dicunt me in priuatis literis mihi gloriabundè arrogaſſe circuli quadraturam ex nullo dato pendentem, falluntur ipſi, & alios incauti fallunt: relegant literas; inuenient enim ſtylo admodum titubante id à me ſcriptum eſſe; ſicuti & nunc quoque ſcribitur, quamuis non aliam eius timoris cauſam norim præter generaliſſimam omnium ſuperiorum ſæculorum hallucinationem, quæ apud me maximi ponderis eſt. Vale, mi Lector, & ſi demonſtrationes ex Archimedea libra petitæ, pertinentes non ad iſtos ſolùm caſus ſexdecim, ſed ad quotcunque alios, te quicquam iuuant, benè ſpera de noſtrorum horum librorum editione, ſimúlque de altero Opuſculo circa *motum acceleratum* ſcripto, vbi exoluo, quæ nuper pollicitus fui. Toloſæ 9. Ianu. 1659.

SCHOLIVM II.

Monendus es nunc, Lector benigne, Veredarium tunc poſt octidui iter non detuliſſe niſi quatuor primas pagellas libri Dettonuillani qui Pariſiis cudebatur: ad nos enim tranſmiſſæ ſtatim ſunt atque è prælo prodierunt, vt in nobis expectatio reliquarum mox cudendarum concitaretur. Ipſe Dettonuillæus initio Appendicis adiectæ die Ianuarij vigeſima ad continuationem Hiſtoriæ ſuæ iſtud confirmat, dum narrat, Kalendis

Ianuariis se ad nos misisse initiũ suæ solutionis, vt ibi inspiceremus calculum casûs à se propositi, & inde agnosceremus nostrum circa eundem casum calculi errorem. *Accepimus quidem perlubenter* illud initium *octo post diebus, nempe nono eiusdem mensis, eodémque die calculum in eo expressum contulimus cum nostro illo quem iam ante quintum Nouembris diem anni superioris* 1658. *per nos ipsi castigaueramus, reperimúsque non sine gaudio mirificam vtriusque concordiam, sicuti illam confestim euulgauimus, euulgatámque agnoscit Dettonuillaus in sua illa Appendice. Quis verò non miretur quod subjicit,* quãuis sexdecim casuũ calculus ille à nobis tunc editus, verus deprehenderetur, illius tamen inuentionem referendam fore ad lucem quam [*eodem videlicet temporis momento*] deriuassemus ex transmissis quatuor illis pagellis, *quarum duas priores implet epistola D. de Carcaui quæ tota est in extollendo etiam supra antiquos Geometras primarios Dettonuillæo; tertiam occupat exordium responsionis Dettonuillanæ, & nudus, vt illum proposui in superiore scholio, propositi casûs calculus; quarta denique rem à principiis libræ altè repetens suspensum tenet Lectorem, iubétque reliqua quæ ad sequentes paginas pertinent expectari. Edidimus nos statim quindecim insuper aliorum casuum calculum, quorum duo qui centra grauitatis semisolidi circa axem dant, sunt omnium difficilimi; ille verò qui tradit centrum grauitatis semisolidi circa parallelam basi ductam per medium axem, non minus difficilis est atque primus ille & vnicus ad hunc vsque diem à Dettonuillæo datus, quamuis ad reliquos dandos fidem suam ibidem obligarit. Ista tamen omnia nos vno oculi ictu vidimus scilicet in primo illo Dettonuillæi calculo, non secus (si Geometriæ peritis placet) atque inspectis olim primis quatuor Conicorum Appollonij libris, residuos quatuor qui iniuriâ temporis desunt, omnes perspeximus. Quòd igitur venienti vnico calculo Parisino actutum obuiam iuerit calculorum Tolosanorum vniuersa turma, id (quamuis aliud probationis genus non suppeteret) manifestè ostendit iam antè stetisse illos in procinctu, & expeditos fuisse vt turmatim prodirent, cum primùm iuberentur. Sed numquid pari saltem iure potuisset aliquis ex eius amicis monère tunc Anonymum ne de danda solutione reliquorum casuum solicitus post hac foret, cùm nostra omnium solutio iam postaret vulgata, & ab ea manasse dici posset, si quid postea eodem de argumento ederetur? Haud verò scio an ista de causa reliquorum casuum parem illi primo calculum, quem luculenter pollicitus fuerat, dare ex tunc noluerit. Hæc quamuis adeo perspicuè probent nostræ causæ æquitatem, voluerunt tamen nostri Amici, ne quid dubij etiam peruicaßimo cuique superesset, vt vniuersum istud de Cycloide opus legitima Iudicis auctoritate, chirographicáque eiusdem tessera tunc obsignari de more curaremus, quod & obtinuerunt decima quinta die Ianuarij præsentis anni* 1659. *Vnde monendus fuit Typographus vt tot circumductas manuscripto nostro lineas, &* D. DE VIGVERIE, *Secundarij Prætoris in Senescalliana huius vrbis Curia toties repetitum chirographarium symbolum mirari desineret, nec illa typis repræsentare curaret. Monendus quoque fuit cum ad calculum istum venit (venit autem decima quinta Septembris anni* 1659. *qua hos versus manuscripto inseruimus) ne in typos referret suos periodum vnam manu amplißimi & doctißimi supremæ huius Curiæ Tolosanæ Senatoris adiectam quinto Nouembris* 1658. *& eiusdem chirographo obsignatam, qua testatur se hunc calculum à me sibi*

oblatum,

oblatum, muniisse sui chirographi notâ tesserariâ. Tantæ scilicet molis fuit literarij furti accusationem propellere: Amicis tamen obtemperandum tunc fuit.

SCHOLIVM III.

Omitti hoc loco non debent duæ Anonymi epistolæ ad Geometras Europæ Latinè scriptæ; ex illis enim nonnulla clarè intelligentur, quæ historiæ istius interest vt non ignorentur; ea verò quæ sint, monebimus post exscriptas literas.

PRIMÆ LITERÆ ANONYMI.

CVm ab aliquot mensibus quædam circa Cycloidē eiusque centra grauitatis meditaremur, in propositiones satis arduas ac difficiles, vt nobis visum est, incidimus, quarum solutionem à præstantissimis toto orbe Geometris supplices postulamus, proposito ipsis præmio, non mercedis gratiâ, quod absit, sed in obsequij nostri, aut potius meriti eorum qui hæc inuenerint, publicum argumentum.

Dato puncto quolibet z (*Fig.* 1.) in quacunque Cycloide a b c d, ex quo ducta sit z y basi a d parallela, quæ axem c f secet in puncto y. Quærimus dimensionem spatij c z y, eiusdémque centrum grauitatis: Solida genita ex circumuolutione dicti spatij c z y, tam circa z y, quam circa c y: & horum solidorum centra grauitatis. Quod si eadem solida plano per axem ducto secentur, & sic fiant vtrinque duo solida, duo scilicet ex solido circa basim z y, & duo ex solido circa axem c y genito: cuiusque horum solidorum quærimus etiam centra grauitatis.

Quia verò quæsitorum demonstratio forsan adeo prolixa euadet, vt vix intra præstitutum tempus exequi satis commodè possit, genio & otio doctissimorum Geometrarum consulentes, ab his tantùm postulamus, vt demonstrent vel more Antiquorum, vel certè per doctrinam Indiuisibilium (hanc enim demonstrandi viam amplectimur) omnia quæ quæsita sunt, data esse. Ita vt facilè ex demonstratis, quælibet puncta quæsita ex datis hypothesibus, inueniri possint.

Et vt apertiùs mentem meam explicem, nec subsit aliquid ambiguum, exemplo rem illustro. Proponatur (*Fig.* 39.) verbi gratiâ parabola g f B cuius axis g f, basis g B, tangens f E; parallela axi B E, inueniendum centrum grauitatis trilinei E B u f. Satisfactum esse problemati censerem, si demonstretur, datum esse centrum grauitatis parabolæ g f B, nec non & centrum grauitatis rectanguli B E f g, & proportionem huius rectanguli cum parabolâ B u f g, ideóque & datum esse centrum grauitatis quæsitum trilinei B E f u. Nam etsi præcisè punctum in quo reperitur centrum grauitatis non exhibeatur, demonstratum tamen est datum esse, cum ea ex quibus inuenitur data sint; résque eò deducta erit, vt nihil aliud supersit præter calculum, in quo nec vis ingenij, nec peritia artificis requiruntur; ideóque non is à nobis calculus exigitur, cur enim in iis immoraremur? Sed tantummodo petimus demonstrari, res quæ proponuntur datas esse.

Verùm doctiſſimi Geometræ prorſus neceſſarium iudicabunt, & ab his poſtulamus duarum propoſitionum vel duorum caſuum integram conſtructionem, ſeu integrum calculum. Primus caſus eſt cum punctum z conſtituitur in a; ſecundus cum idem punctum z datur in b, in quod tranſit parallela g b ducta à puncto g centro circuli genitoris Cycloidis.

Quod ſi aliquis error calculi in his duobus caſibus ſubrepſerit, eum libenter condonamus, & veniam quam ipſi peteremus facilè promerebuntur.

Quiſquis ſuperiùs propoſita, intra primam diem menſis Octobris anni 1658. ſoluerit & demonſtrauerit magnus erit nobis Apollo. Et primus quidem conſequetur valorem quadraginta duplorum aureorum hiſpanicorum, quos ipſi Hiſpani *doblones* & Galli *piſtolles* vocant: vel certè ſi mauult ipſos duplos aureos. Secundus verò viginti eiuſmodi duplos aureos. Si vnus tantum ſoluerit, ſexaginta ſolus habebit. Et quia ſeriò rem agimus dictos ſexaginta duplos aureos Illuſtriſſimo D. de Carcaui Regio Conſiliario Pariſiis commoranti apud celſiſſimum dominum Ducem de Liencourt deponi curauimus, qui eos exſoluet ſtatim ac demonſtrationes quæ ad ipſum mittentur, veræ ac Geometricæ, à viris ab ipſo ad id deputatis iudicabuntur. Et cùm Illuſtriſſimum Conſiliarum, iam à multis annis virum probum & Matheſeós amantiſſimum agnouerimus, audacter pollicemur, rem ſincerè & abſque fallaciâ exequendam.

Quod ſi his circiter tribus elapſis menſibus nullus inueniatur qui quæſita noſtra ſoluerit, non denegabimus quæ ipſi inuenimus; nec aliis inuidebimus vnde maiora iam inuentis nanciſcantur; ex quibus forſan apud Poſteros gratiam inibimus. *Sequitur deſcriptio Torricelliana cycloidis, vt à nobis deſcripta fuit initio primi libri, ſaltem quantum ad rem attinet.*

ALTERÆ EIVSDEM ANONYMI LITERÆ.

CVm circa ea quæ de Cycloide propoſuimus duo orta eſſe dubia nobis Illuſtriſſimus D. D. de Carcaui ſignificauerit, his ſtatim occurrendum eſſe duximus, & ita occurrimus.

Prius inde oritur, quod in proponendis noſtris de Cycloide problematis hac voce vſi fuerimus, in *quacunque Cycloide*, cùm tamen vnius tantùm ſpeciei Cycloidis definitionem attulerimus. Verùm nihil aliud intelleximus præter ſolam illam ſimplicem naturalem ac primariam Cycloidem, cuius ex Torricellio deſcriptionem dedimus; cùm enim quæ de illa reſoluuntur facilè ſit ad omnes alias ſpecies protrahere, qui noſtra problemata de hac ſola ſoluerit, nobis omninò ſatisfecerit.

Poſterius in eo conſiſtit quod à nobis non ſit præciſè poſitum an ſupponamus datam eſſe rationem baſis Cycloidis a f, cum ſua altitudine, ſeu cum diametro circuli genitoris f c. Sed ipſam datam eſſe rationem pro conceſſo vſurpandum arbitrabamur, & vt omnino æquum eſt, datam eſſe ſupponimus.

Nihil ergo iàm ſupereſt obſcuritatis. Vnum tamen reſtare videtur vt doctiſſimos Geometras ad propoſitiones noſtras commodius & libentius inueſtigandas inuitemus: ſcilicet ea omnia remouere quæ à perſpicacitate ingenij, quam ſolam magni facimus, & explorare ac coronare inſtituimus, ſunt aliena, qualia ſunt tam calculus integer multorum caſuum quem poſtulabamus, quàm abſoluta ſolutionum conſcriptio, cùm ea non à viribus ingenij, ſed ab aliis circumſtantiis pendeant. Hoc itaque tantummodo iam inſtituimus, vt ſola problematum difficultas remaneat ſuperanda. Nempe.

Qui publico inſtrumento intra præſtitutum tempus, Illuſtriſſimo domino de Carcauy ſignificauerit, eorum quæ quæſita ſunt demonſtrationem penes ſe habere: & aut ipſammet demonſtrationem quantumuis compendioſam ad ipſum miſerit; aut ſi chartæ mandare nondum per otium licuerit, ſaltem ad confirmandam ſuæ aſſertionis veritatem, caſûs quem mox deſignabimus calculum dederit, ſéque paratum eſſe profeſſus fuerit omnia omnino demonſtrare ad ipſius D. de Carcaui nutum, hunc nobis ſatisfeciſſe declaramus, & conſentimus, primum qui hæc fecerit primo, ſecundum ſecundo præmio donandum, ſi ſua ſolutio ab ipſo D. de Carcaui viriſque ad id ſecum adhibitis, cum ipſi viſum fuerit, exhibita, Geometrica ac vera iudicetur, ſaluo ſemper erroris calculo.

Caſus autem cuius ſolius ſufficit calculus ille eſt. Si ſemicyclois a c f circa baſim a f conuertatur, & ſolidum inde genitum ſecetur plano per ipſam a f (quæ iam huius ſolidi axis eſt) ducto, quod quidem ſolidum diuidet in duo ſemiſolida paria. Alterutrius horum ſemiſolidorum centrum grauitatis aſſignari poſtulamus. *Hactenus Anonymi literæ.*

Dies quo binæ iſtæ literæ datæ fuerint nullus annotatus extat; in confeſſo tamen eſt primas miſſas fuiſſe ſub initium Iunij; quod patet ex trium circiter menſium ſpatio ad inueniendam, & in manus Domini de Carcaui ante Kalendas Octobris tradendam ſolutionem, conceſſo ſub finem illarum. Alteræ autem literæ redditæ nobis fuerunt exeunte Iulio, & iam priuſquam redderentur mandaueramus Typographo primum horum librorum, illéque ſuam in eo operam abſoluerat; quapropter mirùm eſſe non debet quod cùm Anonymus centra grauitatis abſolutè polliceri videretur in primis literis, nos librum illum ediderimus, vt ad id quod penes ſe habere non obſcurè innuebat, adiungeremus vnde quadraturam circuli abſolueret.

Præterea ex primis illis literis apertè conſtat ſingula problemata fuiſſe tractanda in duobus illis caſibus, quorum calculum ineunte hoc anno 1659. edidimus; quod aduertimus, ne quis putet hos caſus à nobis eſſe aſſumptos prout animus, & computandi fœlicior exitus tulit. In iiſdem literis Doctiſſimos Geometras iudicaturos aſſerit neceſſariū fuiſſe vt exigeretur multiplex ille calculus, quem tamen in ſecundis exigere deſtitit vt labori inquirentis Geometræ parceret, præcipuè cum ad inquirendum

pauculæ hebdomadæ concederentur. Cur autem ita iudicaturos fore Geometras dixerit, cùm causam reticuerit, illam putauit esse obuiam iis præsertim qui in Geometricis diu multúmque versati sunt. Prima huius necessitatis causa hæc mihi quidem videtur esse quod per illum calculum eduntur sexdecim propositiones in re admodum ardua, quibus rotundè & more Archimedeo respondetur, vt ipsarum propositionum contemplatio mirum quantum rapiat Lectorem eruditum, illique stimulos addat ad lustrandum viam, qua eò peruentum fuit. Secunda, quia vnius Autoris calculus ita rotundus facilè potest comparari cum alterius calculo, & ita statim iudicari de eorum concordia vel discordia. Certè nos si Dettonuillæus dedisset calculos illos saltem de centris semisolidi superioris circa basim, & duorum semisolidorum circa axem, perlubenter contulissemus calculos vtriusque abaci, & vel de concordia gauisi fuissemus, vel emendassemus in alterutro discordiæ causam. Tertia, quia calculi illius methodus plurimum lucis affert ad intelligendas ipsas demonstrationes, quibus nititur; illæ verò etiam Archimedeæ, ita aliquando non imperitis imperuiæ sunt, vt lux ista quæ ex praxi soluti problematis oritur, maximè sit omnibus expetenda. Quarta, quia optandum est vt omnes qui inuentioni Geometricæ vacant, exerceant se in isto calculandi genere; ita enim sæpe deprehendunt ipsi sua παροράματα, quibus ij tantùm obnoxij non sunt, qui nihil ardui quærunt. Ipse Archimedes initio librorum de spiralibus moram dilatæ editionis purgat illo errandi timore, cui occurrendum fuerit suo & amicorum examine diuturno. *Ne mireris* (alloquitur suum Dositheum) *si longi temporis interuallo has demonstrationes edimus; hoc enim ea de causa factum est, quod prius cum iis communicare statueramus, qui in artium studiis & disciplinis versati sunt: & in his inuestigandis omnem suam operam posuerunt.* Cæterùm calculus ille ad agnoscendum errorem latitantem miris modis conferre norunt omnes quibus ille familiaris est; diu enim versatur præoculis soluti problematis forma, vt ita numeris accommodetur; quæ autem tamdiu circumspicitur, vix eum teget, si quem habuerit næuum. Adde sæpius numerorum ipsorum repugnantiâ statim indicari latere ibi hostē mentis, nempe errorem. Quinta deniq; quia dum ita propius inspicitur methodus illa qua soluitur aliquod problema, vel ipsa perpolitur, vel fit generalior, vel viam etiam pandit ad alia inuenienda aliquando longiùs posita, sed quodammodo cognata. Porrò calculi nomine quid intelligam, meliùs explicare non possum quàm exhibendo duas propositiones postremas duorum proximè antecedentium librorum, vbi problematum calculum tracto. Adhibentur quidem numeri, sed ita vt res ipsa verè attingatur; nam aliquando numeri aduocantur, vt in dimensione circuli Archimedea, non vt res quæsita teneatur, sed vt quàm proximè: at verò noster iste calculus is est, qui non accedit tantùm ad id quod inquirit, sed expolitam commodámque tenendi & propiùs inspiciendi ansam offert.

Ad hæc, quod Anonymus veniam ipſe vltrò offert errori calculi, quando is non proficiſcitur ex labe demonſtrationis, non modò perurbanum ſe probat, ſed perdoctum in hac arte; neque enim vllus eſt, præter ἀγεωμετρήτους, qui non flocci faciat ſimilia peccata. Nos itaque, ſi quid huius generis latet in tam multiplici & intricato numerorum labyrinto, ignoſci nobis enixè petimus: neque venditamus iſta vt ab omni eiuſmodi vitio pura, ſed vt accuratè olim examinata, & etiam non ſemel caſtigata antè diem quintum Nouembris anni ſuperioris 1658. Ab eo verò tempore aliis intenti curis toties computatos caſus reliquimus vt iacent editi; nec enim quicquam immutauimus præter apertum in problematis ſexti ſecundo calculo, Typographi erratum, de quo pòſt agimus in propoſitione duodecima ſexti libri.

Denique idem Anonymus ſapienter admodum cauet pauculos illos nummulos non offerri à ſe inſtar eſcæ pecuniariæ, qua Geometræ trahantur ad laborem mercenariorum inſtar. Ego quidem ſtatim atque legi huius pecuniolæ ſpem fieri inuentori, ſcripſi ad D. de Carcaui qui pro Anonymo totum iſtud negotium gerebat, à meæ vitæ inſtituto alieniſſimum eſſe auri vel argenti comparandi causâ aliquid aggredi; vacaturum itaque me perquiſitioni problematum, hac tamen præmij pecuniarij conditione procul reiectâ. Quapropter ſi ante initium octobris ſcripſi ad eundem D. de Carcaui à me repertam eſſe ſolutionem omnium problematum, ſed nondum omninò in ſchedas traductam, miſíque calculum caſûs propoſiti ſed (vt ſæpius fit in iis quæ, antequam exſcribantur, in ſola mente contemplamur, ſi multiplicia, longa, & implexa inter ſe ſint) vitioſum, vt ſtatim agnoui, monuique per literas Dominum de Carcauy; id eò tantùm feci, vt conſtaret Anonymo quantum detuliſſem ipſius exhortatoriis literis, & nonnullam ei injicerem ſpem inuentæ ſolutionis problematum, quam effliictm expetere ſe à Geometris ſignificauerat in ſuis primis literis. Quod autem quidam dixêre Anonymum propoſuiſſe quædam iſtorum problematum vt facilia, quædam verò vt difficilia, refellitur primo iſtarum literarum aſpectu, vbi ſine vllo diſcrimine *ſolutionem propoſitarum quæſtionum à præſtantiſſimis toto orbe Geometris ſupplex poſtulat*, eaſque *ſatis arduas ac difficiles ſibi viſas eſſe* pronuntiat. Profectò iniurius fuiſſet *præſtantiſſimis* illis viris, ſi illos habuiſſet vt huius artis Nouitios, quibus facilia proponi ſolent; eorúmque otio non niſi abuti velle viſus fuiſſet.

SCHOLIVM IV.

Anonymus in Hiſtoriâ Cycloideos Gallicâ decimo die menſis Octobris 1658. *ita ſcribit.* Calculi noſtri viris clariſſimis & doctiſſimis priuatim communicati editionem nondum mandare Typographo è re fore exiſtimaui, vt ſi quis, dum à Domino de Carcaui, & aliis iudicibus examen legitimè inſtituetur, reperiatur ſoluiſſe illa problemata, publicè enuntiem eum inueniſſe ſolutionem illorum, antequam meam euulgarem: ſin autem nullus reperiatur; quod nemo inuenerit, id emittere in lucem publicam non verebor,

adjiciámque prioribus insuper problemata sequentia, quæ de natura cycloideos restabant, & quorum aliqua non minùs mihi difficilia videntur 1. Puncto z (*Fig.* 1.) dato vtcunque in perimetro Cycloideos, inuenire non solùm dimensionem curuæ z c, terminatæ puncto z & vertice c (quod à Domino Vvren iam dissolutum extat) sed præterea centrum grauitatis portionis istius ex perimetro abscissæ. 2. Inuenire dimensionẽ superficiei descriptę à portione illa rotata tam circa basim, (quod quidem facile est) quàm circa axem: siue illa delatio sit integræ reuolutionis, aut dimidiatæ, aut quadrantalis, aut alterius cuiuslibet designationis. 3. Inuenire grauitatis centrùm istius superficiei &c. quod est omnium difficillimum, & propriè vnicum quod propono. In quibus omnibus problematis pono quadraturam circuli vt datam, sicubi eam dari fuerit necessarium. En quæ supererant inquirenda de natura huius perimetri curuæ, & quorum solutionem secretò apud me reseruaturus sum vsque ad diem postremum mensis Decembris labentis anni 1658. Vt si quis interea temporis repererit veram eorum solutionem, non careat honore suæ inuentioni debito.

Hæc Anonymus Gallicâ linguâ in cartaceo quaternione ex Typographico prælo ad nos tunc statim misso. Quod de dilatæ primorum problematum editionis causa hîc narrat, facessiuit nobis aliquando negotium, cùm per ipsos Anonymi familiarissimos sciremus iudices examinis *illius causâ cogendos non fore; sed hîc assensum cohibemus omnem, ne vel ipsi Anonymo fidem denegemus, vel ipsius familiarium testatissimis literis. Ista verò posteriora problemata erunt potissimum libri consequentis argumentum, vbi ostendemus ex nostra methodo obtineri solutionem posteriorum istorum problematum, etiam illius in quo ille ponit difficultatis maximum; calculumque, quem ille etsi (vt mihi quidem videtur) perdifficilem, omisit dare, exhibebimus eodem prorsus pacto, quo in propositione tertij & quarti libri vltima. Ex eo autem quod calculum illum prætermisit, factum est vt ego de tota ipsius methodo iudicare pro ingenioli mei viribus nequiuerim, quod nisi fallor, potuissem comparando vtrumque inter se. Neque existimes, Erudite Lector, istum calculum esse de numero vulgarium & à* viribus ingenij, *vt dixit Anonymus*, non pendentium, *qui Tyroni cuilibet demandari queunt; intricatissimus quippe est, & totum Geometram, atque sæpe ipsius demonstrationis Parentem desiderat.*





DE CYCLOIDE
LIBER QVINTVS.

In quo præcipuè demonſtratur methodus generalis pro cuiuſlibet lineæ curuæ in rectam æqualem commutatione per ſpiraceas Archimedeis ſpiralibus reſpondentes, & pro eiuſdem curuæ centro grauitatis: Item pro dimenſione ſuperficiei periphericæ deſcriptæ motu eiuſdem curuæ, & pro grauitatis centro illiuſmet ſuperficiei: Deſcendendo verò ad Cycloideos perimetrum curuam, ſoluuntur problemata ſecundò propoſita, eorúmque calculus traditur.

PRÆFATIO.



Ethodum generalem dum in fronte libri huius præfixam legis, noli exiſtimare, Lector erudite, in prioribus libris illam deeſſe; perinde enim quadantenus adeſt, vt Tu ipſe ad rem attendens iam, vt puto, perſpexiſti. Sæpe generalis aliquid præſtandi methodus fruſtrà exigitur, ſi in vno caſu particulari eius executio præſtetur. Quis enim generalem conficiendæ ex quercu arcæ methodum poſtulet à Fabro lignario, poſteáquam ab illo didicit qua arte ex abiete compingi debeat? *vniuerſale enim à ſingularibus præcindere* innatum eſſe menti humanæ Logicorum Scholæ inculcant. Porrò methodus aliquid exequendi, quadrandæ exempli cauſa figuræ cuiuſlibet, poteſt duobus modis dici generalis; primò quidem vt nullo alio dato, per ſolius methodi præ-

cepta, quadratura abſolutè prodeat: alter verò modus ſubaudit has voculas, *nonnullis datis*, quæ quidem in ſingulis figuris aliunde quàm ex ipſa methodo obtineri debent. Illo primo modo generalem methodum tradere quadrandæ cuiuſlibet figuræ diuinum eſſe agnoſco potius quàm humanum; poſteriore autem modo id non ſuperat vires ingenij humani. Hæ itaque de Cycloide methodi generales non abſoluunt, nec ad exitum vltimum generaliter perducunt problema; etenim ſi à me quæras vt per methodum generalem meam problemata omnia ſoluta in parua Cycloide, ſoluam pariter in figura cuius ordinatim ad axem applicatæ ſint æquales arcui genitricis ellipſeos, reſpondebo non ita eſſe illam generalem quin aliqua de hac figurâ quæ ex ellipſi prodit, dari priùs debeant; quæ prorſus me latent, nec ab vllo, quem legerim, ſcriptore mihi monſtrantur: imprimis verò modus quadrandi ipſam figuram ſuperiorem, prout vt in ſecundi libri nona pro cycloide fecimus, & iam antea in primo libro feceramus. Adeo quadratura huius partis quæ primo problematum aſpectu occurrit, eſt difficilis, quantumuis nonnemo eam facilem videri in cycloide voluerit, poſtea quam à nobis prodiit in lucem: ſed quid non eſt facile aditu cùm ſemel ad eam via patet explanata? Hæc præfari debui ne ſpecioſo nomine *methodi generalis* vllus decipiatur, aut vanæ aliquid laudis me venari putet. Methodi igitur omnes noſtræ non ſunt primo modo generales; ſed neque ſemper monendus eſt Lector eas eſſe ſecundo illo modo generales. Porrò quæ ſunt generales iſto quodam modo, abſolutè generaliores ſæpe euadunt inuentione cuiuſdã quod in illo priore modo non aderat. Duplex huius rei exemplum quaſi domeſticum mihi nunc occurrit. Demonſtrauit Archimedes trianguli rectilinei quadratricem eſſe æqualem ſpatio illi quod triangulo eidem æquiponderat, indéque elicuit eximia & incomparabili laude quadraturam parabolæ antea irrepertam: nos verò illud ad omnes quadratrices quarumcunque figurarum extendimus in ſeptima propoſitione ſecundi libri tetragoniſmicorum, ratione cuius non inutilis vt ſperamus, acceſſio fiet iſti methodo quadrandi figuras per libram, quam in eum finem adhibere poſt Archimedem deſierant Geometræ quos quidem nouimus, ſed nos illum vſum reſtaurare & ampliorem facere conati ſumus. Alterum exemplum eſto methodus qua ſe ipſum ſuperans Archimedes demonſtrauit per ſpirales lineas, peripheriam circuli eſſe æqualem certæ cuidam rectæ; nos autem hoc in libro generaliſſimam reddimus eam methodum,

pro

pro quibuſcunque lineis curuis. Vtrobique vt extenſio illa fieret, inuenienda fuerunt nonnulla; nam ſi nulla opus fuiſſet noua demonſtratione, id non fuiſſet propoſitionem extendere propriè; ſed monſtrare quouſque ipſa per ſe pertingeret; inuenienda autem fuerunt, vt quæ neceſſaria erant ad concludendum generaliter & non tantùm particulatim, conſtituerentur in aliquo, quod eſſet omnibus commune, & minimè proprium triangulo vel circuli peripheriæ.

Cæterùm de ſpiracea iſta agens mihi præſcriptis iam à meipſo cancellis me cohibebo; ſpiralis & parabolæ miram concordiam quam primus excogitauit & acutè demonſtrauit P. Gregorius à ſancto Vincentio ſub finem libri ſexti, huc transferre non eſt animus, cum apud illum luculenter demonſtrata extet hoc titulo *ſpiralis & parabolæ ſymbolizatio.* Nihil etiam dicam de methodo quam ſubtiliter iniit D. Iſmaël Bullialdus in aureo de lineis ſpiralibus libello, vbi Archimedis demonſtrationes aliis nouis ſtabilit, vt nonnullorum ſcrupulos euellat, qui autoritate Vietæ ducti non ita fidebant hac in re Archimedeis rationibus. Scribam igitur quæ ad rem præſentem illis adjici poſſe iudicaui, & hæc quidem non iniucunda fore ſpero Lectori, præcipuè cùm vt rectè annotauit idem Bullialdus *linearum ſpiralium contemplatio tam ſublimis ac ardua antiquis Geometris viſa ſit, vt Archimedes, qui earum affectiones & proprietates ingenio propè diuino, ac ſubtilitate incomparabili primus demonſtrauit, in ſui admirationem cùm æquales, tum poſteros conuerterit; laudum titulos nullo obliuionis ſitu inducendos meruerit; earúmque inuentori Cononi gloriam palmámque præripuerit.* Accuſatio illa Archimedis expurgata nunc à Viro illo doctiſſimo reuocat mihi in mentem aliam accuſationem factam à Scaligero aduerſus eiuſdem Archimedis æquationem circuli cum rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro eiuſdem circuli, & ſub recta æquante dimidium eiuſdem peripheriæ. Eandem enim æquationem inuenit Gregorius à S. Vincentio per aliam viam l. 3. prop. 89. vt conſtet quàm periculoſum ſit quem tota retro antiquitas alicuius ſcientiæ Ducem ſecuta & venerata fuerit, eum ſpecioſo quantumuis nomine impugnare. Vnde Meibonius qui in Euclideis etiam Elementis errata demonſtranda non ita pridem ſuſcepit, quod aliud penſi inopinati pretium ſperare debeat, non video. Longiùs abierim ſi illos his adiunxero qui omnia nunc mouent *ad impugnandum Ariſtoteliſmum, adhortandúmque homines ad aliquam veriſimiliorem, ſanioremque Philoſophiam*; ita enim obloquuntur contra eam quam (vt ipſi norunt)

generales Academiæ propugnant hodie vt ſuam, vbi fidei Diuinæ contraria non fuerit.

PROPOSITIO PRIMA.

EX duabus in præſenti ſchemate deſignatis figuris prima a b c eſto triangulum (*Fig.* 49.) comprehenſum ſub rectis a b, b c, a c; eſto parabola a m e b quam tangat recta a c, & cuius axis æquidiſtet lateri b c : latus b c diuiſum ſit in quotcunque partes æquales, b i, i g, g h, h c, & ex puncto a eductæ ſint rectæ a i, a g, a h occurrentes limbo a e b in m, e, n; per quæ puncta educantur q m, d e, l n æquidiſtantes lateri b c, & occurrentes rectis a c, a h, a g, a i in t, o, ſ, r, p, n. Conſiderentur figuræ quadrilateræ l n i b, r e n p, o m ſ e, & trilatera a m t; quæ ſingulæ per limbum parabolæ diuiduntur in duas partes quarum vna eſt interior figuræ a m e b d, altera exterior. Eſto præterea figura ſecunda a b g c cuius latus a b æquet, maioris perſpicuitatis cauſa, rectam a b primæ figuræ rectilineæ; linea autem b g, ſit quælibet curua æqualis rectæ b c; à puncto c ducta ſit recta c a, & curua b g c intelligatur diuiſa in totidem partes b i, i g, g h, h c in quot diuiſa fuit recta b c; iſtæ autem partes b i, i g, g h, h c tales ſint vt ductis rectis i a, g a, h a, æqualia ſint ſpatia b a i, i a g, g a h, h a c. Recta a b intelligatur diuiſa in partes a q, q d, d l, l b æquales partibus a q, q d, d l, l b. Per l, d, q intelligantur deſcriptæ curuæ l n p, d r e s, q m t ſimiles ſimiliterque poſitæ curuis b i g, b i g h, b h c. Intelligatur curua a u m e n b incedens per illa omnia puncta, in quotcunque partes diuiſæ concipiantur lineæ. Hæc linea vocetur *ſpiracea* quando b g c non eſt peripheria circuli, eo pacto quo *cylindraceum* dixi frequentiùs in Elementis ſolidum priſmatoides cuius baſis non eſt circulus. Patet figuris primæ figuræ l n i b, r e p n, o m ſ e, a m t reſpondere totidem iiſdem literis deſignatas, & figuras iſtas diuidi quoque per limbum a e b in duas portiones vnam internam, aliam externam.

Oſtendendum eſt principia Archimedis pro ſpirali adhibita, probare figuram a e n b d comprehenſam ſub recta a b necnon ſub curuâ a e b ſpiraceâ, eſſe trientem totius b a c g, idque verum quoque eſſe in triangulo a b c reſpectu ſegmenti parabolici a u e b.

In prima figura parabolam a m b eſſe trientem figuræ a b c demonſtrauit Archimedes per libræ principia in libri de quadratura parabolæ, & nos in ſeptima ſecundi illam propoſitionem extendimus ad alias figuras in quibus linea a f c eſt quælibet curua, vt in præfatione monuimus.

Quando curua b g c est peripheria circuli integra, ostendit in vigesima quarta de spiralibus figuram a m e b esse trientem figuræ a b g c, vtitur autem ad id ostendendum principio demonstrato in decima. *Quadrata omnia linearum æqualium maximæ, quadratorum quidem linearum se se æqualiter excedentium minora esse quam tripla; quoniam assumptis quibusdam tripla sunt: reliquorum autem dempto maximæ quadrato maiora, quàm tripla; quoniam assumpta minora sunt quàm tripla quadrati maximæ. Et propterea si similes figuræ describantur ab omnibus; & ab iis, quæ se se æqualiter excedunt; & ab iis, quæ sunt æquales maximæ: quæ ab iis describuntur, quæ sunt æquales maximæ, earum quidem, quæ ab iis, quæ se æqualiter excedunt, minores erunt quàm triplæ; reliquarum verò, dempta ea, quæ à maxima describitur, maiores, quàm triplæ: similes namque figuræ eandem inter se se, quam quadrata proportionem habent.* Cæterùm Archimedes in illa propositione vigesima quarta assumit arcum b g c esse æqualem toti peripheriæ circulari, ideóque ex eo gigni spiralem primæ reuolutionis: sed siue sit integra peripheria siue quam volueris habeat proportionem ad illam integram, eadem est vis demonstrationis.

Vnum facessere posset negotium, quòd quando linea b g c non est circularis, figuræ a l n, a n p non sint similes; sed id nihil obstat quo minus demonstratio suum robur obtineat; quia sufficit ad eius effectum vt figuræ a l n, a n p sint æquales, & vt figuræ a i g, a n p, a r e &c. sint similes; id autem accidit quæcunque sit curua b g c: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Demonstrationis progressus cùm ostendat theorema esse verum quæcunque sit curua b g c; patet curuam b g c posse esse spiralem, vel spiraceam, sectionem conicam quamcunque, & vno verbo lineam quamcunque siue angulosa sit, siue sit συνέχειαν ἔχουσα; etiam si illi anguli sint rectilinei, vel curuilinei, vel quomodocunque mixti. Item siue curuæ conuexa sint ad partes a, siue sint ad oppositas.

COROLLARIVM II.

Quando curua b g c est arcus circuli, & comparatur cum figura in qua b c sit recta linea, analogiam earum omnimodam primus deprehendit & demonstrauit Gregorius à S. Vincentio supra laudatus; ea verò analogia vel *symbolizatio* reperitur quæcunque linea sit b g c, in vtráque figura. Quia verò quando b c est recta linea, proportiones omnes facillimè determinantur ex quadraturâ parabolæ & aliis circa hanc sectionem conicam inuentis; vt in cæteris similia determinentur, peti debent ex primâ figura in qua limbus a m e b est parabolicus.

COROLLARIVM III.

In figura prima vbi, limbus a m b est parabola, si compleatur parallelogrammum a b c x, & iungatur diameter b x, ipsa b x tangit parabolam a e b, sicuti & a c, vt ex trigesima tertia primi conicorum facilè colligitur: & ita recta a x intercepta inter tangentem b x, & inter a b æqualis

eſt rectæ b c. Similis proprietas demonſtrata eſt ab Archimede quando in ſecundâ figurâ linea b g c eſt arcus circuli. Sed aduertendum eſt lineam b c in prima figura vicem gerere duarum quæ in ſecunda diſtinguntur, nempe b g c & b M, quarum b g c eſt curua, b M verò eſt recta tangens curuam b g c in b. At in primo ſchemate cùm linea b g c ſit recta non poteſt tangi à recta b M, ſed debent neceſſariò ſibi mutuò congruere, dum ad tactum conueniunt. Nos autem poſtea demonſtrabimus in vniuerſum ſi curuam b g c tangat recta b M, & per a ducatur a x æquidiſtans tangenti b M; rectam quæ in b tangat ſpiraceam a e b, occurrere ita rectæ a x in puncto x, vt ipſa a x ſit æqualis curuæ b g c. Quæ quidem proprietas in ſpirali demonſtrata ab Archimede ſummæ admirationi fuit omnibus Geometris quotquot vnquam extitere huius theorematis contemplatores. Quod autem noſter Gregorius à S. Vincentio dubitabundus innuit, Archimedem deriuaſſe hanc ſpiralis proprietatem à parabolica figura in qua linea b c eſt recta, id probabile non eſt, cùm Archimedes initio libri de ſpiralibus ad Doſitheum candidè ſcribat iſta de ſpiralibus theoremata fuiſſe à Conone inuenta nullis eorum additis demonſtrationibus, quas proinde Archimedes perquiſierit, & tandem inuenerit, ipſique Cononi apud Poſteros omnem fermè gloriam horum theorematum præripuerit. Si itaque vllus foret accuſandus, is eſſet Conon primus ſpiralis lineæ & eius proprietatum inuentor.

COROLLARIVM IV.

Iſta communicatio proprietatum non ſiſtit in planis, ſed ad ſolida etiam pertingit: quapropter ſicuti ſi ex puncto a excitetur perpendicularis a D ad a b c primæ figuræ planum, parallelepipedum altitudinis a D, baſeos a b g c eſt triplum cylindracei eiuſdem altitudinis baſeos a e b d, ita quæcunque ſit linea b c in ſecundâ figurâ, cylindraceum eiuſdem altitudinis a D, baſeos a b g c, eſt triplum cylindracei baſeos a e b d. Quod ad alia ſolida transferri patebit ex ſequenti propoſitione.

PROPOSITIO II.

Intelligatur iiſdem manentibus (*Fig.* 49.) ex puncto D educi recta linea quæ immoto puncto D deſcribat ſuperficiem incedendo per lineam b g c, ac proinde deſcribens ſuperficiem quæ ſi linea b g c ſit peripheria circuli, erit *conica*, ſi alia curua erit *homæoconica*, ita enim appellauimus eam in corollario ſecundo duodecimæ quarti libri tetragoniſmicorum; ſi autem linea b c ſit recta, erit *cunealis* ſuperficies, ſolidum enim abſciſſum duobus planis ſe ſe ſecanribus ex cylindraceo aliquo, vocauimus in vigeſima prima eiuſdem quarti libri *cuneatum*. Intelligatur præterea per limbum a e b incedere linea parallela rectæ a D & deſcribere ſuperficiem *cylindraceam* cuius baſis ſit figura a e b q.

Oſtendendum eſt ſolidum quod eſt commune iſti cylindraceo baſeos a e b q altitudinis a D, & homœoconico baſeos a b g c, verticis D, vi analogiæ coni euoluti & expanſi eſſe ſextantem cylindracei altitudinis a D, baſeos a b g c.

Iſtud ita oſtenditur in prima figura, vbi linea b c eſt recta. Ex recta a b abſcindatur b E ipſi a b æqualis, ſitque a b diuiſa bifariam in d: erit ergo d e diameter ſegmenti parabolici a e b, & eius grauitatis centrum erit in recta d e: ergo ſi libra a E ſuſpendatur ex b perpendiculo b c, brachio b E, æquiponderans ſegmento a e b d erit æquale dimidio ipſius, cùm vt b E brachium ad b d longitudinem, ita ſit ſuſpenſum a e b d ad æquiponderans. Sed ſuſpenſum eſt triens figuræ a c g b: ergo dimidium illius, nempe æquiponderans, eſt ſextans figuræ a c g b. Præterea ex vigeſima prima quarti tetragoniſmicorum patet cuneatum ſolidum abſciſſum ex cylindraceo baſeos a e b d eſſe æquale cylindraceo altitudinis a D, baſeos æquantis quadratarium ſpatium, ſiue æquiponderans iam inuentum: ergo in prima figura ſolidum illud commune homœoconicodeſcripto per rectam ex D manente incedentem per c g b, & cylindraceo baſeos a e b d eſt æquale cylindraceo altitudinis a D, baſeos æquantis ſextantem figuræ a b g c. Igitur per analogiam id quoque verum eſt quæcunque ſit linea b g c; quod erat demonſtrandum. Hanc porrò analogiam in hoc eſſe veram ſi quis ſibi demonſtrari poſtulet, ſuo quidem iure vtetur; neque enim in Geometricis quicquam niſi per vim & à coacto conceditur.

COROLLARIVM.

Quando linea b g c eſt peripheria integra circuli ſemidiametro a b deſcripta, & punctum c congruit puncto b, patet lineam a e b eſſe ſpiralem, & ſuperficiem deſcriptam motu rectæ ex vertice D per limbum b g c eſſe conicam: igitur in iſto caſu ſolidum commune cylindraceo baſeos a e b q, & cono, eſt ſexta pars cylindri altitudinis a D, cuius baſis ſit circulus peripheriæ b g c; & ſi recta a D ponatur æqualis rectæ a b eſt octaua pars ſphæræ cuius circulus maximus ſit idem qui baſis coni, ſemidiametro a b deſcriptus. Nam hemiſphærium incumbens illi circulo eſt bes cylindri altitudinis a D habentis pro baſi eundem circulum, vt ex Archimedeis demonſtratis patet; ergo eiuſmodi cylindrus continet tres ſemiſſes eiuſmodi hemiſphærij, & tres quadrantes totius ſphæræ: ergo cùm ſextans trium quadrantium vel ſex octauarum, ſit octaua pars, liquet ſolidum commune cylindraceo cuius baſis ſit ſpiralis primæ reuolutionis, altitudo a D æqualis ſemidiametro a b, & cono verticis D, habenti pro baſi circulum ſemidiametri a b, eſſe octauam partem ſphæræ cuius circulus maximus ſemidiametro a b deſcribatur. Iſtud problema nobis poſtea quam edidimus viginti illas propoſitiones quæ primum huius Operis librum conſtituunt, propoſuit ſoluendum D. Paſcalius veluti ſuum; ipſumque idem pro ſuo poſt aliquot menſes in lucem dedit Dettonuil-

læus in epistolâ ad D. de Sluze; quod facit vt discrimen inter Dettonuillæum & Paschalium ecquod sit non satis videam. Porrò si altitudo a D æquet semidiametrum a b, & A E, E D sint æquales, Dettonuillæus asserit solidum istud, quod cono & cylindraceo commune est, *esse ad cylindrum baseos eiusdem cum cono, & altitudinis a E, vt omnia simul quadrata b l ducta in l a sunt ad cubum cuius latus sit quadratum a E; id est, sicut margaritum tertij ordinis ad rectangulum comprehensum sub axe & sub ordinatim applicata ad medium, quam rationem D. de Sluze dedit non in margarito solùm tertij ordinis, sed etiam in aliis reliquorum ordinum quibus constanter competit ratio numeri ad numerum.* Ego cuiusmodi sint ista margarita doleo me nescire, necdum potuisse nancisci librum qui id me doceret; fateórque non potuisse me videre an meus huius solidi calculus concordet cum eo, quem ex theoremate illo suo elicere omisit Dettonuillæus.

PROPOSITIO III.

ESto a centrum circuli (*Fig.* 50.) semidiametro a b descripti, eiusque peripheria sit b e b, quam tangat in b recta b h, eique æquidistet recta a D; esto primæ reuolutionis spiralis b d a; per b ducta sit recta b s secans spiralem in d supra radium a b ad partes e, & occurrens rectæ a D in s.

Ostendendum est rectam a s esse minorem peripheria circuli b e b integra.

Per d & a ducatur recta a d occurrens peripheriæ circuli in e, & per e, d ducantur ordinatim applicatæ e o, d c ad radium a b: ex recta a b abscindatur a t æqualis rectæ a d. Cùm a d subtendens angulum rectum a c d sit maior quàm a c subtendens acutum a d c, erit a t maior quàm a c; per t ducatur t u parallela lateri a s trianguli a s b, & occurrens lateri s b in u. Quoniam punctum t cadit inter c & b, erit trianguli b c d latus b c, maius latere b t trianguli b t u; ergo cùm similia sint ipsa triangula, latus c d erit maius latere t u, ac proinde completi parallelogrammi c t u x, latus c x erit minus latere c d. Quoniam igitur rectæ a e, a b sunt æquales, itemque ex constructione a d, a t, erunt quoque æquales d e, b t. Igitur cùm in triangulo s a b lateri a s æquidistet t u, vt est s a ad a b, ita u t latus trianguli u t b similis triangulo s a b, erit ad t b, & alternando vt a s ad u t vel ad x c, ita a b ad t b, vel a e ad d e. Sed vt a e ad d e ita ex generatione spiralis est peripheria circuli ad arcum e b; ergo vt peripheria circuli ad arcum e b, ita recta a s ad c x, & alternando vt peripheria tota circuli ad rectam a s, ita arcus e b ad rectam x c. Sed arcus e b est maior rectâ x c vt mox ostendetur: ergo peripheria circuli est maior rectâ a s. Superest vt ostendamus arcum e b esse maiorem recta x c. Si iungatur recta e b, arcus e r b erit maior ipsâ rectâ e b; in triangulo autem rectangulo e o b, recta e b subtendens angulum rectum est maior latere e o, er-

go & multò maior recta d c (cùm vt a e ad a d ita sit in triangulo e a o, latus e o ad d c) ergo arcus e r b est maior quàm recta d c, & multò maior quàm recta x c. Igitur recta a s est minor peripheria circuli, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Iste modus demonstrandi non postulat vt spiralis respondeat toti peripheriæ circuli; sed satis est vt totus arcus cui spiralis respondet sectus sit in e ita vt totus ille arcus sit ad sui portionem e b, sicut est recta a e, ad e d.

COROLLARIVM II.

Præterea idem demonstrandi modus non postulat arcum b r e esse circularem, sed tantùm curuam b r e esse maiorem recta c x, id autem semper erit verum quoties arcus e r b erit maior recta e b (quod ita esse, vt euidens assumunt Geometræ cum Archimede) & quoties insuper recta e b erit maior quam e o, id verò ita est quotiescunque angulus e o b est rectus, vel recto maior.

PROPOSITIO IV.

Isdem manentibus (*Fig.* 51.) recta s b secet spiralem b i infra rectam a b in puncto i.

Ostendendum est rectam a s esse maiorem peripheriâ circuli integra.

Rectæ a i æqualis abscindatur a t, & per i ducatur i l perpendicularis ad rectam a b: ex recta a b abscindatur a t æqualis rectæ a i, & ducatur t u æquidistans rectæ b h; erit ergo a t maior quam a l, cùm a i subtendens angulum rectum a l i sit maior quam a l. Præterea recta a i occurrat arcui b e circulari in e; quoniam vt illa peripheria circularis cui respondet spiralis ad punctum b per primam reuolutionem à suo initio producta, se habet ad compositam ex eadem peripheria & ex arcu b e secundæ reuolutionis, ita ex spiralis secundæ reuolutionis generatione est a i recta ad radium a e; ergo diuidendo vt se habet arcus circuli primæ reuolutionis ad arcum b e secundæ, ita est radius a e ad e i, ita vt inter a & i iaceat punctum e. Præterea quoniam quotiescunque arcus spiralis primæ reuolutionis secatur per rectam ex b eductam, recta a s est minor quàm arcus circuli pro prima reuolutione assumptus, patet istas secantes non auferre ex recta a D rectas a s quæ ita excrescant prout magis & magis accedunt ad rectam b h tangentem, vt superent omnem datam rectam, cùm neque æquent vnquam arcum assumptum circuli: ergo tangens spiralem secabit rectam a D. Hoc autem posito apertum est curuam b i non cadere inter rectam b h & curuam b e: angulus igitur i b l est acutus, ideoque punctum l cadit inter b & t: ergo cùm recta b h sit, vt mox ostendemus, maior arcu b e, recta autem t u latus trianguli b u t, sit maior latere l i trianguli b i l illi similis, sed habentis latus b l minus latere

b t, vt ostendimus; erit t u maior arcu b e. Quoniam verò æquales sunt a b, a e & a t, a i, erit vt a b vel a e ad b t vel ad e i, ita peripheria circularis primæ reuolutioni respondens ad arcum b e, sed ita etiam ob similitudinem triangulorum s a b, b t u est a s recta ad t u vel ad l x: ergo vt peripheria circularis primæ reuolutionis ad arcum b e secundæ reuolutionis, ita est a s recta ad l x, & alternando vt peripheria circularis ad a s rectam, ita arcus b e ad l x maiorem ipso arcu b e: ergo recta a s est maior peripheria circulari primæ reuolutionis, si quidem verum est quod restat probandum, rectam l i esse maiorem arcu b e.

Per e ducatur tangens e q occurrens tangenti b h in q, & iungatur recta b e, duæ ergo b q, q e ex principio Archimedeo posito initio librorum de Sphæra & cylindro sunt simul maiores arcu b r e. Iungatur recta a q, quæ bifariam ex elementis Euclideis secabit arcum e r b, ac proinde & angulum e a b: ergo per secundam sexti Euclidis, vt h a recta ad a b, ita h q ad q b; sed h a latus trianguli h a b subtendens angulum rectum, est maior quam a b; ergo h q est maior quàm q b, ac proinde & quam e q ipsi b q æqualis: ergo cùm duæ e q, q b sint simul maiores arcu e r b, erit h b maior eodem arcu, ergo l i est maior eodem arcu, quod assumpseramus; igitur recta a s est maior peripheria circulari primæ reuolutionis, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Arcum circuli primæ reuolutionis intelligit Archimedes totam peripheriam circuli; potest tamen vt amplior euadat demonstratio, ita intelligi vt primæ reuolutionis arcus circularis sit ille qui percurritur totus radij motu eo tempore quo radius percurritur totus à puncto describente spiralem lineam: secundæ verò reuolutionis arcus circularis erit ille idem replicatus in consequentia, qui percurratur eodem tempore à radio intera dum punctum describens spiralem percurrit rectam æqualem radio iacentem in directum ipsius radij. Ita verò de tertia, quarta & reliquis reuolutionibus intelligi sic oportet, vt recta quæ percurritur augeatur in singulis reuolutionibus, radij vnius magnitudine. Istud verò ad spiraceas debebit applicari proportione quadam initio indicatâ.

COROLLARIVM II.

Corollarium primum superioris propositionis hìc vt patet locum habet suum. Præterea demonstrandi ratio sicuti in superiore non postulat arcum b r e esse circularem, ita neque hìc, sed tantum curuam b r c esse minorem rectâ l x; & rectam t u vel l x æquidistare tangenti b h.

PROPOSITIO V.

Esto (*Fig.* 52.) a centrum ellipseos cuius a b sit semiaxis minor, per b ducta sit b h tangens ellipsim, & ductus sit quicunque radius a e, occutrens tangenti in h.

Ostendendum est arcum b r e esse minorem recta b h.

Quoniam

Quoniam a b eſt ſemiaxis minor, radius a e erit maior quam a b; iungatur recta e b, quæ bifariam ſecetur in z & ducatur radius a z r occurrens tangenti b h in q; ergo ſi iungatur e q tanget ellipſim, vt ex trigeſima ſeptima primi conicorum apertè infertur. Per e ducantur e t, e y parallelæ rectis a b, a z & occurrentes rectæ b h in t & y. Igitur cùm in parallelas a b, e t incidat recta a h, angulo h a b æqualis erit angulus h e t; eademque de cauſa cùm in parallelas e y, a z incidat eadem a h, anguli h e y, h a z erunt æquales: ſed angulus h a z eſt minor angulo h a b; ergo angulus h e y eſt minor angulo h e t: ergo punctum y cadit inter t, & h: ergo recta q h eſt maior recta q y; cúmque e y, z q æquidiſtent in triangulo e b y, ſicut b e ſecatur bifariam in z, ita b y in q: ergo recta q h eſt maior quàm b q.

Rurſus quoniam e z, z b ſunt æquales, & radius a e eſt maior radio a b; in triangulo a z e angulus a z e erit maior angulo a z b trianguli a z b: ergo angulus b z q æqualis angulo a z e ad verticem z poſito eſt maior angulo e z q qui æqualis eſt angulo a z b ad verticem eundem poſito; ergo cùm latera trianguli b z q ſint æqualia lateribus trianguli e z q ſingula ſingulis, & angulus b z q ſit maior angulo e z q, patet rectam b q eſſe maiorem recta e q: ergo b h eſt maior duabus ſimul b q, q e, ac proinde & arcu e r b, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Hinc patet quicunque arcus ſit e r b, ſi recta a e ſit non minor quàm a b, rectam b h eſſe maiorem duabus ſimul e q, b q tangentibus; & ſi ex z biſectione rectæ e b excitetur perpendicularis z a occurrens rectæ b a in a ad curuæ e r b caua (quod accidet quoties angulus a b e fuerit acutus) rectas a e, a b eſſe æquales. Et ſi inter a & b ſumatur quodcunque punctum u, & ducantur rectæ u z, u e, rectam u e eſſe maiorem recta u b. Cùm enim a z ſit perpendicularis ad e b, anguli e z a, a z b erunt æquales: ergo angulus u z e eſt maior angulo u z b; ergo recta u e eſt maior rectâ u b, cùm triangula u z e, u z b habeant idem latus u z, & latera z e, z b æqualia.

COROLLARIVM II.

Si e r b ſit quilibet arcus ſectionis conicæ vel cuiuſcunque alterius curuæ quæ tota ſit caua ad partes z, & b h tangens ſit perpendicularis ad rectam b a, item ſi recta b r per b ducatur ſubtendens arcum b r portionem quamlibet arcus b r e; angulus h b r erit minor angulo h b e, ac proinde perpendicularis ad rectâ b r eam bifariam ſecans occurret rectę a b vltra punctum a, ſecabit enim rectam a z ad curuæ e r b partes a: igitur quæcunque ex puncto a educatur linea ad quodlibet arcûs e r b punctum illa erit maior quam a b: igitur arcus e r b habebit proprietatem quæ requiritur ad hoc vt recta b h ſit maior arcu e r b. Quod ſi angulus h b a non ſit rectus ſed acutus, ſemper ſtabit dicta proprietas.

PROPOSITIO VI.

ESto vt in tertia (*Fig.* 50.) arcus circularis e r b, & ſpiralis d b i; Ex puncto b educta ſit b V tangens ſpiralem in b, & occurrens rectæ a s in V.

Oſtendendum eſt rectam a V eſſe æqualem arcui circulari qui reſpondet reuolutioni primæ in puncto b terminatæ.

Reuolutionem intelligo non ſolam ἀποκατάστασιν, ſed etiam vt dixi in corollario quartæ, motionem radij & puncti per radium incedentis ab vno eius extremo quouſque punctum perueniat ad aliud extremum, atque hæc eſt prima reuolutio; ſecunda erit ſi radio iſti addas in directum alterum radium, qui pari ratione à puncto generatore ſpiralis lineæ moueatur, interea dum pari quoque latione linea conſequenter percurrit parem priori arcum; & ita tertia, quarta, & aliæ reuolutiones intelligi debent, vt propoſitio euadat generalis.

Eſto itaque reuolutionis primæ terminus & meta b, initium a; radius autem cuius motu deſcribitur ſpiralis eſt ipſe a b, quando primæ reuolutioni reſpondet tota peripheria circularis; erit verò alius quilibet a f, ſi primæ reuolutionis arcus ſumatur f e r b, ita vt quo tempore punctum generans ſpiralem incipit moueri à puncto a ad f per radium a f, ipſe radius manente a circumferatur per arcum f e b, ſeruata vtrinque motionis æquabilitate, vt præſcripta ab Archimede ratio generationis poſtulat.

Hoc ita declarato vis demonſtrationis ab abſurdo petitæ hæc eſt, ſi arcus circuli non eſt æqualis rectæ a V vel eſt minor, vel maior. Sit primò, ſi fieri poteſt, minor, illique ſit æqualis recta a s; ergo ſi ducatur recta b s ſecabit ſpiralem in aliquo puncto d ad partes ſuperiores radij a b, vt infrà oſtendetur: igitur per tertiam propoſitionem, cùm recta b s ſecet ſpiralem in d ſupra radium a b; erit a s recta minor arcu circulari qui reſpondet reuolutioni, quod eſt abſurdum cum eidem arcui ponatur æqualis.

Sit ſecundò ſi fieri poteſt recta a V maior in arcu primæ reuolutionis, ſitque a q illi æqualis; iungatur recta b q quæ ſecabit ſpiralem infra a b puncto i, vt mox oſtendemus; ergo cùm recta i b q ſpiralem productam ſecet infra rectam a b, recta a q erit per quartam maior arcu circulari primæ reuolutionis; quod eſt abſurdum cum ei æqualis poſita iam ſit: non ergo a u recta eſt maior, neque minor arcu circulari primæ reuolutionis, ſed eſt illi æqualis, modo conſtet rectam q b ſecare ſpiralem in i.

Id verò oſtenditur ex tangentis proprietate demonſtrata ab Euclide libro 3. propoſitione 16. *alteram rectam non cadere in locum inter peripheriam & tangentem comprehenſum*; quam quidem proprietatem communem eſſe rectis quæ ſectiones conicas tangunt demonſtrat Apollonius libri primi Conicorum propoſitione trigeſima ſecunda. Quoniam igitur recta b h tangit arcum e r b in b, quæcunque alia b q ſecans angulum a b h ducatur,

secabit arcum in y: ergo si iungatur radius a y, secans spiralem in z, punctum z erit inter a & y, quia vt totus primæ reuolutionis arcus ad sui partem y r b, ita ex generatione spiralis est radius a y ad sui partem y z.

Habent igitur hanc proprietatem spiralis & circuli peripheria, vt si ex puncto b educatur quælibet recta b y secans peripheriam in y, & iungatur radius a y, in ipso radio a y sit z punctum spiralis, & vt recta b z secet ita spiralem, vt inter a & y pro prima reuolutione iaceat punctum z, in secunda verò inter a & z iaceat y. Quòd si inter rectas a b, b h ex puncto b duci posset aliqua recta quæ non secaret arcum b r e, illa non haberet vllam sibi respondentem ex b pariter eductam quæ secaret spiralem; & sicuti inter tangentem b h & arcum circuli b e possent duci innumeræ rectæ ex puncto tactûs quæ non secarent peripheriam circuli, ita inter spiralis lineæ tangentem b V & arcum ipsum spiralem possent ex b agi innumeræ quoque rectæ quæ non secarent arcum spiralem. Ergo tunc malè sumeretur recta q b secare arcum spiralem, cùm sine numero possent duci inter tangentem & spiralem quæ non secarent ipsam in alio puncto, sed illi tantum occurrerent in b. Itaque hæc est natura spiralis vt tangens eius b V imitetur tangentem b h arcûs genitoris in hoc, vt sicut in locum qui interiacet inter arcum genitorem b r e & tangentem b h potest vel non potest cadere recta, ita in locum qui est inter spiralem illi respondentem b d z & tangeutem b V possit vel non possit duci recta ex puncto tactus b. Cùm igitur in locum qui iacet inter circularem arcum & tangentem non possit cadere recta, neque poterit cadere in locum qui iacet inter spiralem b d z & tangentem b V: ergo recta quæcunque ex b educta præter tangentem b u, secat spiralem arcui circuli respondentem, prout quoque secat arcum ipsius circuli; rectè ergo assumpsimus rectas b q, b s ex puncto tactûs b eductas, & diuersas à tangente b V secare arcum spiralis ex arcu circulari genitæ: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quæ de secunda reuolutione & aliis demonstrat Archimedes, satis perspicua sunt si demonstratio præsentis propositionis clarè intelligatur; quapropter ea omittimus ampliore elucidatione exponere.

COROLLARIVM II.

Ex demonstratis hactenus liquet demõstrationis robur persistere etiam in spiraceis dummodo arcûs genitoris e r b tangens habeat proprietatem illam vt in locum interceptum tangente & arcu nulla recta cadat ex puncto tactûs educta; ac proinde vt hoc ipsum conueniat tangenti spiraceæ. Secundò corollarium secundum tertiæ exigit vt angulus e o b vel d c b non sit minor recto, ad hoc vt iunctâ e b, angulus a b e sit acutus: eadẽ verò propositio tertia requirit vt recta a d sit maior rectâ a c, quod necessariò euenit si angulus a c d non sit minor recto; ergo cùm nec a c d nec d c b debeant esse minores recto, secunda ista conditio eo reducitur vt angulus

a c d ſit rectus. Tertio vt arcus b r e ſit cauus ad partes initij a. Quartò vt recta ex initio a ad arcum genitorem vtcunque educta ſit non minor rectâ a b, id enim exigitur in corollario primo quintæ. Quoties ergo arcûs genitoris quatuor erunt proprietates iam dictæ, prima quidem vt in locum inter tangentem b h & arcum genitorem b r e nulla ex b ducta recta cadat; ſecunda vt angulus a b h ſit rectus, tertia vt arcus e r b ſit cauus ad partes initij a: quarta vt quælibet recta ex a initio ducta ad arcum non ſit minor recta a b, toties demonſtratio præſentis propoſitionis idem demonſtrabit de ſpiracea, quod hîc demonſtratum fuit de ſpirali. Vnde patet quàm ampla euadat præſens propoſitio. Hanc ſpiraceam voco continuam.

COROLLARIVM III.

Quoniam in prima propoſitione ponimus ad effectum illius demonſtrationis curuam b r e genitricem ſpiraceæ eſſe cuiuſcunque modi, ad effectum verò præſentis requirimus quatuor iam dictas proprietates in curuâ illâ genitrice, patet iſtud theorema non patêre tam latè quam illud. Sunt enim plurimæ curuæ quibus illæ proprietates non competunt, cuiuſmodi ſunt illæ quæ anguloſæ ſunt, id eſt compoſitæ ex multis lineis angulos conſtituentibus; namque ſi ex angulo educas rectas quæ hinc & inde tangant arcus conuenientes in angulum, illæ rectæ non iacebunt neceſſariò in directum; angulum verò a b h poſſe non eſſe rectum patet ex eo quod in ſpiraceæ generatione poſſit initium eius poni in quolibet puncto, ac proinde extra perpendicularem excitatam ex puncto b ad tangentem b h. Nos igitur in ſequentibus non ſumemus punctum a, ſiue initium ſpiraceæ niſi in perpendiculari ad tangentem b h, arcum verò b r e oſtendemus συνέχειαν ἔχειν, id eſt continuo tractu & ſine angulis vno ductu deſcribi; & ad partes initij a eſſe cauum: id verò oſtendemus in arcu circulari, elliptico, hyperbolico, parabolico & etiam ſpiraceo continuo; vt inde habeamus arcubus iſtis reſpondere rectam æqualem interceptam inter perpendicularem excitatam ex initio ſpiraceæ ad radium ab ipſo initio a ad finem b ſpiralis primæ reuolutionis, & inter ipſius ſpiraceæ tangentem ex fine b eductam. Circularem verò arcum adnumerauimus quia illi non ſolum reſpondet ſpiralis initium habens in centro, ſed etiam ſpiracea initium habens in quolibet puncto ſumpto in radio qui à centro ad finem b ſpiraceæ primæ reuolutionis educitur. Porrò cum figuram angulis nullis aſperam diximus, animus non fuit excludere ab huius vocis ſignificatu peripheriam circuli, quamuis enim à quibuſdam (vt in prolegomenis tetragoniſmicorum librorum notauimus) maximè anguloſa figura dicatur, id tamen mente magis quàm reipſa verum eſt, nam licet circuli ambitus ſit reuera ille in quem definunt figuræ inſcriptæ vel circumſcriptæ πολυγωνότηται: definunt tamen, nec circulo πολυγωνότητα communicant.

PROPOSITIO VII.

IN ſchemate quintæ propoſitionis (*Fig.* 52.) arcus e r b eſto circularis, quem in b tangat recta b h, ex puncto b educta ſit b u perpendicularis ad rectam b h; & ex puncto z bifariam ſecante rectam e b excitata ſit perpendicularis z s ad ipſam e b, occurrens rectæ a b in a.

Oſtendendum eſt ſi inter a & b ſumatur quodcunque punctum u, & iunctâ rectâ u e ponatur ipſum u initium ſpiraceæ u d b reſpondentis arcui e r b iuxta methodum primæ propoſitionis, quam in b tangat recta b f, occurrens in f rectæ u g ad b a rectam perpendiculariter excitatæ ex u puncto, rectam u f eſſe æqualem arcui circulari b r e.

Quoniam recta z a eſt perpendicularis ad e b ſubtendentem arcum e r b, patet ex elementis Euclidis rectam r a tranſire per centrum, ex iiſdem verò patet rectam b a tranſire pariter per centrum, ergo a eſt centrum circuli, & arcus e z b eſt cauus ad partes puncti a, & rectæ a e, a b ſunt æquales. Præterea tangens b h habet proprietatem requiſitam in corollario ſuperioris vt in eiuſdem propoſitionis progreſſu monſtratum eſt. Ex corollario autem ſecundo quintæ patet omnem rectam ex u eductam ad arcum e z b eſſe maiorem recta u b. Igitur per ſuperioris propoſitionis corollarium ſecundum recta u f eſt æqualis arcui e r b, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Initium ſpiraceæ poſuimus in puncto inter a & b iacente, excluſimúſque ipſum a, quia ſi initium ponatur in a, gignetur ſpiralis linea reſpondens toti arcui deſignato e r b. Quando autem arcus e r b non erit circularis, poterit aſſumi punctum a vel etiam quodlibet aliud inter a & b iacens, dummodo quatuor in corollario ſextæ requiſita reperiantur in curuâ e r b.

PROPOSITIO VIII.

IN ſchemate eodem, arcus e r b eſto ellipticus vel hyperbolicus vel parabolicus, quem in b tangat recta b h; ex puncto b educta ſit b u perpendicularis ad b h: ex z biſectione rectæ b e excitata ſit z s perpendicularis ad ipſam b e, occurrens rectæ a b in a.

Oſtendendum eſt ſi in recta a b ſumatur quodcunque punctum u extra b poſitum, & iunctâ rectâ u e ponatur ipſum u initium ſpiraceæ u d b reſpondentis arcui e r b iuxta leges generationis ipſius datas in prima propoſitione, ipſámque ſpiraceam tangat in b recta b f occurrens in f rectæ u g ad rectam h b parallelæ, rectam u f eſſe æqualem arcui elliptico vel hyperbolico, vel parabolico b r e.

Quoniam angulus h b a eſt rectus, & recta b e iacet inter rectas a b, b h, patet angulum a b e eſſe acutum, ac proinde punctum a iacere ad arcûs e r b partes cauas, rectáſque a e, a b eſſe æquales. Præterea tangens b h habet proprietatem requiſitam in corollario vltimo ſextæ, vt in eiuſdem propoſitionis progreſſu oſtendimus. Ex corollario autem ſecundo quintæ patet omnem rectam ex u (etiam cum congruit puncto a) eductam eſſe non minorem recta u b. Igitur per corollarium ſecundum eiuſdem ſextæ recta u f eſt æqualis arcui e r b, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IX.

IN eodem ſchemate arcus e r b eſto ſpiralis vel ſpiraceus continuus, quem in b tangat recta b h; ex puncto b educta ſit b u perpendicularis ad b h: ex z biſectione rectæ b e excitata ſit z s perpendicularis ad ipſam b e, occurrens rectæ a b in a.

Oſtendendum eſt ſi in recta a b ſumatur quodcunque punctum u extra b poſitum, & iunctá rectá u e ponatur ipſum u initium ſpiraceæ u d b reſpondentis arcui e r b iuxta leges datas initio primæ, ipſámque ſpiraceam modo genitam tangat in b recta b f occurrens in f rectæ u g ad rectam b h parallelæ, rectam u f eſſe æqualem arcui e r b lineæ ſpiralis vel ſpiraceæ continuæ.

Iſtud iiſdem verbis oſtenditur quibus ſuperior; hoc tantùm aſſumitur ex monſtratis ſub finem ſextæ, ſi ex arcu b r e qui habeat tangentem prædıtam proprietate requiſita in corollario ſecundo eiuſdem ſextæ, gignatur ſpiralis vel ſpiracea, iſtam ſpiralem vel ſpiraceam habere eiuſdem proprietatis tangentem in puncto b. Nam arcum b r e eſſe cauum ad partes rectæ b z ponimus, cùm ponamus eſſe continuum & ſine angulis, idque etiam habeat ſpiralis & ſpiracea continua ex arcu vnde generata primùm fuit: ergo cùm ſegmentum e r b, & triangulum iſoſceles e a b habeant eandem baſim b e, & ad illius partes oppoſitas iaceant, patet punctum a eſſe ad cauas partes arcûs e r b: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Quamuis quatuor iſta tantùm curuarum genera ad rectas reduxerimus nulla tamen alia excipi curua debet: nam anguloſæ & non continuæ, componuntur ex non anguloſis; ergo anguloſarum dimenſio nota eſt ſi ſumatur per partes. Cæterùm tangens ſpiralem & ſpiraceam monſtrata eſt in decurſu ſextæ habere illam proprietatem ſine qua nulla prorſus foret demonſtratio Archimedis, quam in propoſitione decima octaua adhibet, & quam nos eodem quidem ſenſu ſed diuerſis verbis attulimus in illa ſexta propoſitione. Quòd ſi quis exigeret eius rei demonſtrationem paulò ampliorem, ei ſatisfieri poſſet, ſed non ſine aliquot propoſitionibus quas breuitatis cauſa prætermittimus: qua etiam de cauſâ ſimilem

aliam proprietatem ex generante arcu propagatam in generatam spiralem vel spiraceam quam sub finem præsentis propositionis attulimus, accuratiùs demonstrare neglexímus.

COROLLARIVM II.

Dettonuillæus epistola scripta ad Anonymum & edita in eodem volumine vnà cum tribus aliis, primâ ad D. de Carcauy, alterâ ad D. de Hugguens, tertia ad D. de Sulze, ostendit mira ingenij subtilitate, Archimedeo veterúmque omnium stylo, *si sit parabola cuius axis æquet dimidium peripheriæ circularis, ordinatim verò applicata æquet radium circuli eiusdem, arcum parabolæ istius inclusum inter axem & ordinatim applicatam esse æqualem primæ reuolutionis spirali descriptæ in eodem circulo*, intelligendo primam reuolutionem, vt eam explicuit Archimedes iuxta annotata à nobis in primo corollario quartæ propositionis. Nos verò æquo Lectori æstimandum relinquimus quanta ex hactenus demonstratis accessio fiat huic Dettonuillæi inuento; quando quidem & arcui parabolico, & spirali assignamus suam rectam æqualem, ea prorsus methodo qua Archimedes peripheriæ circuli æqualem rectam designauit in decima quarta propositione spiralium; nec tantùm arcubus parabolicis vel spiralibus, sed hyperbolicis etiam atque ellipticis, & quibuscunque aliis curuis, quod ante nos nullus præstitit quantum quidem ex libris quos viderimus editis affirmare licet. Idem Dettonuillæus initio illius epistolæ ait *suam demonstrationem esse integram, exactéque absolutam; eóque magis placere posse Anonymo, quòd vnica in hoc genere sit, cùm nulla adhuc producta in lucem extet, quæ Antiquorum methodo duas diuersi generis lineas conferat.* Istud ego non satis intelligo; nam Archimedes circuli perimetrum cum recta linea quæ diuersæ planè naturæ est, iam olim contulit in libello de spiralibus, vti modo diximus.

COROLLARIVM III.

In schemate primæ propositionis explicandum vnum restat quod scripsit Gregorius à S. Vincentio sub finem propositionis secundæ libelli de symbolizatione *iure merito spiralem, dici euolutam siue expansam parabolam.* Si enim in figura primæ propositionis prima intelligas circulum euolui in rectas, ita vt integra peripheria b c b æquet rectam b c, & integra peripheria q t q æquet rectam q t, atque ita de aliis, patet circulum semidiametro a b descriptum euolui & expandi in triangulum a b c; similique de causa spiralem figuram a m b d euolui expandique in parabolicum segmentum a e b d. Econtrariò pariter dicere possis triangulum rectilineum a b c cuius latus b c æquet peripheriam circuli semidiametro a b descripti circumuolui & contrahi in circulum, segmentumque a e b d parabolicum in figuram a e b d conuolui. Ne tamen inde inferas vel lineam a m e b parabolicam esse æqualem lineæ a m e b spirali; vel circulum expansum esse æqualem conuoluto: non enim asseritur ista circuli vtriusque æqualitas, sed rationum similitudo atque analogia in plurimis. Præterea aliud monere debemus vt hallucinationis omnis ansa præcidatur, eundem Grego-

rium à S. Vincentio in calce propopositionis vigesimæ tertiæ mentionem facere cuiusdam spiralis ellipticæ quam ostendit esse trientem ellipseos, sicuti spiralis circularis est triens circuli : illa tamen spiralis linea alterius longè diuersæ est generationis ab ea quam in prima huius libelli tradidimus ; licet enim Gregoriana & nostra figura spiracea respondentes eidem ellipsi in hoc conueniant quod singulæ sint triens ellipseos, discrepant tamen plurimum, nam recta, quæ in termino tangit lineam spiraceam, nostram, ex perpendiculari excitatâ à spiraceæ initio ad rectam connectentem puncta initij & termini, abscindit portionem æqualem peripheriæ siue perimetro ellipseos, at verò tangens spiralem ellipticam lineam Gregorianam, non abscindit nisi rectam æqualem dimidio peripheriæ circuli, cuius diameter æquet axem longiorem ellipseos. Diuersissimæ igitur sunt istæ lineæ, verúmque adeo est, neminem Autorum qui quidem à nobis perlecti sunt, inuenisse rectam æqualem perimetro ellipseos, vel cuiuis parti eiusdem perimetri.

COROLLARIVM IV.

Dum P. Athanasius Kircherius Musurgiæ suæ mirificæ tom. 2. pag. 282 quem edidit Romæ anno 1650. tradit methodum describendæ spiralis lineæ ex peripheriæ circuli portionibus certa quadam arte dispositis, manifestum est eum non agere de spirali Archimedea, sed de quadam conuoluta linea quæ reflectendæ voci aptissima sit. Etenim si Archimedea spiralis componeretur ex illis peripheriæ portionibus, nota esset methodus inueniendi tangentem spiralis, vi cuius quadratura absoluta circuli prodiret, vt ex hactenus demonstratis liquet. At verò p. 303. & 304. vbi habetur istud ipsum quod Dettonuillæus proposuit theorema *de æqualitate perimetrorum parabolæ & spiralis*; apertum est eum designare Archimedeam: sed optaui iam pridem vt illius demonstrationem apposuisset integram ; nam quod scribit, *illam dependere ex diuersis motibus, queis vtraque similiter & æqualiter describitur* non satis est ad cogendum Geometram, nec ad hoc vt quæ desunt demonstrationi, inde colligantur facilè. Ad hos etiam motus sed obiter recurrit P. Mersennus in libro Hydraulicorum, vt testatur Dettonuillæus ipse, qui *hac per motus illos demonstrandi ratione non omnino conuinci intellectum*, admonet. Quoniam verò hunc Musurgiæ tomum præ oculis nunc habeo, his subdere lubet nescire me, cur Doctissimus ille Autor pag. 280. vbi tradidit modum *describendæ parabolæ vnico ductu fili*; addiderit modum inueniendi focum O, cùm in ipsius schemate focus sit iam datus vel assumptus, ipsum nempe punctum L cui affigi filum methodus iubet. Ista enim methodus non describit nisi eam parabolæ partem quæ vltrà focum ad partes verticis iacet ; ita verò describit, vt figat filum in eo puncto quod parabolæ focus erit. Filum enim ponitur duplum sagittæ B L quæ iacet inter verticem B & punctum L cui nectitur filum, ponitur verò æquale ordinatim applicatæ L G ad axem B L ; ergo cùm vt B L, ad L G ordinatim applicatam, ita sit ipsa L G ad latus rectum, vt ex vndecima

decimâ primi conicorum liquet; erit B L quarta pars lateris recti, ac proinde punctum L erit focus parabolæ, vt demonstratum est à Vitellone.

PROPOSITIO X.

Ostendere ex analogia conorum euoluti & conuoluti, proportionem eandem colligi coni ad cylindrum eiusdem baseos & altitudinis, quæ alia methodo inuenta ab Antiquis extat, nempe trientis ad assem. Proportionem verò superficiei coni recti ab basim eandem quoque erui cum ea quam Archimedes demonstrauit propositione 15. libri quinti de sphæra & cylindro, videlicet lateris trianguli per axem ad semidiametrum baseos.

In secunda propositione (*Fig.* 49.) monuimus sicuti triangulum a b c conuoluitur in circulum a b c, ita cylindraceum prisma altitudinis a D, baseos triangularis a b c conuolui in cylindrum altitudinis eiusdem baseos circularis a b c: & ita pariter homœoconicum cuius eadem sit altitudo a D, basis triangularis a b c, vertex D, conuolui in conum cuius idem sit vertex D, basis circularis a b c. Antiqui igitur inuenerunt conum esse trientem cylindri eiusdem baseos & altitudinis, quod nos etiam nostra methodo demonstrauimus in quarti libri tetragonismicorum corollario quinto propositionis decimæ octauæ. Id verò etiam seruatur in cono euoluto & conuoluto; nam homœoconicum est triens prismatis vt in illo loco tetragonismicorum ostendimus, ergo cùm homœoconicum sit conus expansus & euolutus, illa proprietas competit cono in vtroque statu, quod erat primum ex demonstrandis.

Rursus ex vertice D educantur rectæ D c, D b; patet coni recti explicati & euoluti superficiem esse triangulum d c b. Cùm igitur recta D a sit ad planum a b c perpendicularis, erit angulus D a b rectus; cúmque angulus c b a ponatur quoque rectus, erit angulus c b D rectus; ergo triangula c b a, c b D eadem basi c b prædita sunt vt altitudines b a, b D: ergo superficies recti expansi est ad basim a b c vt recta D b ad a b. Atqui in cono conuoluto recta D b est latus trianguli per axem a D, & recta a b est semidiameter baseos circularis: ergo superficies coni expansi ad basim est vt latus trianguli per axem recti coni conuoluti, ad semidiametrum baseos, quod erat alterum ex demonstandis.

PROPOSITIO XI.

Esto planum quodcunque b a c (*Fig.* 53.) in quo b a, a c secent se ad rectos angulos; ex a excitata ad planum sit perpendicularis x a. In plano x a c intelligatur quæcunque figura a x z e c insistens rectæ a c ad positionem rectæ a x, cuius limbus x z e sit quælibet linea curua vel recta, vel mixta quomodocunque. Hæc figura vocetur *ge-*

neratrix. Intelligatur in plano b a c *ſuppoſito* (ita enim vocetur) intra parallelas b a, c d deſcribi quæcunque linea b h o recta vel curua vt paulò antè, eius verò proprietas hæc ſit vt rectæ b a parallelis non occurrat niſi in vno puncto. Ad poſitionem plani x a b intelligatur figura c e x a transferri in cylindraceam ſuperficiem E o b l inſiſtentem lineæ b h o, deſcriptam motu rectæ æquidiſtantis perpendiculari a x; modus autem transferendi ſit ille ipſe quem in decima quinta ſecundi libri expoſuimus, ita vt rectæ a x, b l ſint in eodem plano x a b l, ſintque a x, a l æquales, & ducto quouis alio z g h ad planum x a b parallelo, dimetientes z g, h m ſint æquales; iſta figura vocetur *generata*. Sit in eodem ſuppoſito plano alia quæuis linea b q r ita ſe habens ad b h o vt quæcunque q h, ſ t rectæ b a æquidiſtantes ducantur, portio q s ſit maior portione h t, idque perpetua lege ſeruetur, vel certè ſit minor, dummodo ſtata lege ſit minor quomodocunque ducantur ad rectam b a parallelæ q h, ſ t: lineæ verò b q r inſiſtat figura altera pari pacto generata.

Oſtendendum eſt generatarum ſuperficierum illam eſſe maiorem quæ maiori baſi inſiſtit, minorem verò quæ minori.

Quoniam enim altitudines h m, t u ſunt æquales altitudinibus quæ inſiſtunt punctis ſ, q, eáque æqualitas dimetientium perpetua lege obſeruatur ad poſitionem plani x a b; neceſſe eſt vt illa ſuperficies ſit maior, quæ maiori baſi ſuperſtat, illa minor quæ minori. Hoc enim ex ſe euidens eſt, baſis namque magis perpetua leue extenſa, poſita pari altitudine dimetientium ſibi æquidiſtanter reſpondentium, maius ſpatium gignit; hoc verò ſi euidens non eſt, vix quicquam aliud eſt. Ne tamen tyrannidem vllam exercere velle in ingenia videamur, reponatur inter poſtulata; tale enim eſt iſtud theorema, vt ſaltem illum locum ei negare non debeamus: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XII.

Iſdem manentibus (*Fig*. 53.) ex recta c a abſcindatur quælibet a A, & compleatur parallelogrammum a A B b.

Oſtendendum eſt ſi maneant ſuperficies generatæ vt ſuprà, & ſuſtententur plano b a c vt ſunt ad illud erectæ, æquipoderans figuræ erectæ ſuper baſi maiore eſſe maius æquiponderante figuræ erectæ ſuper minore, ſi planum b a c intelligatur ſuſpendi libræ axe b a, ſuſtentaculo A B.

Quoniam enim illæ ſuperficies ita ponuntur eſſe inter ſe, vt quæcunque ſ t axi b a parallela ducatur, dimetientes incidentes punctis t, s ſint æquales, & vna ſuperficierum ſit per ſuperiorem conſtanti lege maior

alia, necesse est vt cùm ipsæ magnitudines sint maiores, earum maior maioris sit ponderis, cùm in reliquis ad pondus facientibus non vincatur à minore superficie, eo quòd in pari ab axe interuallo æquales ponantur habere altitudines, siue perpendiculares ad planum b a c. Istud euidens mihi est; sed ponatur, si placet Lectori, inter postulata: ergo &c. quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

In sexta primi tetragonismicorum ostendimus superficies illas esse æquales cuicunque lineæ insistant, quæ ad positionem rectæ cuiuslibet a b sint condicta ratione æquales, quod videtur repugnare superiori & præsenti propositioni; volumus enim inter figuras generatas *eam esse maiorem quæ maiori limbo insistit, licet ad positionem certæ cuiusdam rectæ sint æquales. Respondemus nihil ista secum pugnare. In illo enim libro agimus de figuris quæ in eadem sunt superficie plana, hìc verò de superficiebus diuersis insistentibus eidem plano. Quod si concipias illas superficies quæ insistunt inclinari in planum b a c ad positionem plani x a b & illi congruere, tunc ita inclinatæ superficies erunt æquales per illam sextam, quamuis erectæ sint inæquales vt hìc ostendimus.*

PROPOSITIO XIII.

Iisdem manentibus (*Fig.* 54.) sit linea b t h o recta, vel composita ex rectis: figuræ a c e x quadratrix figura sit a f e c, quæ generetur librâ grammica a c suspensâ ex a, perpendiculo a x, brachio quocunque a A, ita vt sicut est A a brachium ad quamcunque rectæ a c portionem a g, ita g z dimetiens suspensæ parallela rectæ a x se habeat ad g f dimetientem quadratricis. Hæc quadratrix intelligatur transferri & commutari modo supra præscripto in generatam quæ insistat compositæ b t h o.

Ostendendum est libræ axe b a, sustentaculo B A, æquiponderans generatæ figuræ o n m u l b t h esse translatam figuram n y i b t h o: ac proinde quadratricem figuræ suspensæ translatæ esse ipsam quadratricem pariter translatam.

Istud demonstratur ex septima secundi tetragonismicorum in hunc modum. Linea b t h o composita sit ex quotcunque rectis b t, t h, h o: recta b t vel est parallela rectæ a c, vel eam secat. Si est parallela patet figuram u t b l generatam, esse similem & æqualem generatrici, itemque quadratricem b i t esse similem & æqualem generatrici a p r: ergo si t b, a r æquidistant translata b i t est quadratrix generatæ t u l b. Si t b secat rectam c a, sectionis punctum sit s; secet autem rectam A B in E: patet itaque rectam t b ad r a esse vt rectam b s ad a s, vel b E ad A a: ergo vt A a ad a r, ita erit b E ad b t; sed vt A a brachium ad a r, ita est r D ad r p, hoc est, t u perpendicularis basi t b ad t i: ergo vt b E brachium libræ grammicæ E t, ad longitudinem b t, ita est suspensæ u t b l dimetiens

ut ad t i dimetientem figuræ t i b: ergo per ſeptimam ſecundi tetragoniſmicorum figura t i b eſt quadratrix figuræ generatæ t u l b, ſiue recta t b ſecet rectam c a ſupra rectam b a ad partes c, ſiue infra. Eadem verò ſeruatur demonſtrandi methodus pro aliis quotcunque rectis t h, h o: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIV.

Iiſdem (*Fig.* 55.) manentibus figura b u t l h m o ſit curua, & ſit baſis generatæ ex genitrice c e z x a vt in ſuperioribus, ſiue caua arcûs illius ſint ad partes rectæ a c, ſiue non ſint; ſiue ex parte ſint, & ex parte non ſint,

Oſtendendum eſt generatam figuram illi inſiſtentem procreatam ex generatrice c e z x a habere pro quadratrice generatam aliam figuram illi inſiſtentem procreatam ex quadratrice a p f e c.

Iſtud oſtenditur Geometrarum veterum more, ſicuti & ſeptima ſecundi tetragoniſmicorum. Generata ex quadratrice a p f e c inſiſtens curuæ b u t l h m c ſit æqualis ſpatio E; ſpatium æquiponderans ſit F. Si igitur ſpatium F quod æquiponderat generatę ex generatrice c e z x a, non eſt æquale ſpatio E, erit vel eo minus vel maius. Sit primò ſi fieri poteſt minus, & duo ſimul F, H æquent totum E. Aſſumo duo genera rectarum primum eſt ſubtendentium, quæ videlicet ſubtendunt quotcunque arcus æquales in quos curua diuiſa fuerit, quales in ſchemate ſunt b t, t h, h o; alterum tangentium quæ eoſdem arcus in extremis punctis tangunt, ita vt arcus quilibet b u t ſubtendatur rectâ b t quæ eſt baſis trianguli b i t; duæ autem b i, i t tangant arcum in punctis extremis b, t, vel certè non ſecent niſi in punctis b, t, cadantque ad arcûs b u t conuexa. Ex Archimedeo aſſumpto liquet ſubtenſam b t eſſe minorem arcu b u t; duas verò ſimul tangentes b i, i t eſſe maiores eodem arcu b u t. Igitur ex demonſtratis in ſuperiore, figura c e f p a tranſlata in omnes ſubtenſas dabit quadratricem generatæ ex c e z x a inſiſtentis ſuper iiſdem ſubtenſis: eodemque pacto tranſlata in omnes tangentes exhibebit quadratricem generatæ ex c e z x a inſiſtentis ſuper ipſis tangentibus. Præterea ex vndecima quadratrix inſiſtens tangentibus erit maior quadratrice inſiſtente ſubtenſis, & generata ex c e z x a inſiſtens tangentibus erit quoque maior, generata inſiſtente ſubtenſis. Tertiò ex propoſitione duodecima quadratrix generatæ inſiſtentis tangentibus erit maior quadratrice inſiſtente arcubus, & quadratrix inſiſtens ſubtenſis erit minor quadratrice inſiſtente arcubus. Quartò ſi arcus vnius diuiſionis diuidantur iterum bifariam & ſinguli ſubtendantur ſuis rectis, & ambiantur ſuis tangentibus, aſſumimus cum Archimede & aliis omnes ſimul ſubtenſas poſterioris diuiſionis eſſe maiores omnibus ſimul ſubtenſis prioribus: eademque ratione omnes ſimul tangentes poſteriores eſſe minores omnibus diuiſionis anterioris. Vnde ſequitur quadratricem c e f a tranſlatam in omnes poſteriores

subtensas; esse maiorem quadratrice translatâ in prioris diuisionis subtensas: similique pacto quadratricem translatam in posterioris diuisionis tangentes esse maiorem quadratrice translata in tangentes prioris diuisionis. Quintò denique ponimus cum iisdem in tot arcus posse diuidi curuam, vt E genita ex c e f a translata in ipsos arcus & illis insistens excedat quidem quadratricem insistentem subtensis, sed excessu qui minor sit spatio H. Pari pacto vt eadem E sit quidem minor quadratrice insistente tangentibus, sed differentia possit esse minor qualibet data, multiplicatis in infinitum diuisionibus arcuum.

Hoc ita constituto ostenditur spatium F non esse minus spatio E. Diuidi intelligatur in tot arcus vt excessus sit minor quàm H: ergo quadratrix insistens illis subtensis erit maior quàm F, quod est absurdum cùm per vndecimam a c e f translata in lineam maiorem sit maior translatâ in minorem; composita autem linea ex arcubus est maior compositâ ex subtensis: non igitur spatium F est minus spatio E vel quadratrice c e f a translata in arcus.

Secundò si fieri potest, spatium F esto maius spatio E, & excessus sit H, ita vt duo simul E, H æquent totum F. Intelligatur in tot arcus diuidi curua vt excessus quo quadratrix c e f a translata in tangentes superat eandem translatam in arcus, sit minor quàm magnitudo H. Igitur ista quadratrix est minor spatio F, siue quadratrice c e f a translatâ in arcus, quod est absurdum, cùm per vndecimam a c e f translata in lineam maiorem sit maior translatâ in minorem: composita autem linea ex tangentibus est maior compositâ ex arcubus: non igitur spatium E vel quadratrix c e f a translata in arcus, est minor æquiponderante spatio F: sed neque est maior vt ostendimus: ergo quadratrix c e f a translata in lineam curuam b u t l h m o est æqualis spatio quod æquiponderat generatæ ex figura c e z x a insistenti super curua, quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

In istis quatuor propositionibus notari diligenter debet planum a c e poni rectum ad planum suppositum b a c, & rectam c e perpendicularem ad planum b a c, ad hoc vt (quod vis demonstrandi exigit) rectæ translatæ in puncta b, t & alia eiusmodi sint perpendiculares ad planum suppositum; ac proinde & ad rectas b t, b i ex definitione tertia Vndecimi Elementorum Euclideorum.

PROPOSITIO XV.

IIsdem manentibus curuæ b u t l h m o intelligatur recta b s æqualis, & diuisa in tot partes æquales b d, d q, q s quot sunt aut intelligi possunt arcus b t, t h, h o æquales; ad rectam b s excitentur ex punctis d, q, s rectæ d L, q M, s z æquales perpendicularibus translatis r p, g f, c e figuræ c e f p a (eadem verò est ratio de quacunque alia translatâ) & illæ omnes terminentur linea z M L b.

Ostendendum est figuram b s z M L expansam esse æqualem figuræ translatæ in arcum b u t l h m o generatæ ex figura quacunque genitrice c e f p a.

Istud ostenditur methodo superioris; nam omnes subtensæ designatæ conflant rectam b P minorem ipsa b s, & omnes tangentes designatæ conflant rectam b R maiorem recta b s; igitur b P diuidatur in portiones æquales subtensis b t, t h, h o & ex illis excitentur perpendiculares æquales ipsis d L, q M, s z, fiátque b P basis figuræ expansæ respondentis illis quæ rectis b t, t h, h o insistunt, ita vt illa quæ rectæ b t insistit competat illi primæ portioni rectæ b P, quæ ex recta b P abscissa, est æqualis ipsi b t, & ita in aliis fieri intelligatur. Simili pacto intelligatur b R diuidi ex ordine in partes æquales singulis tangentibus, & figuræ quæ tangentibus b i, i t &c. insistũt, intelligantur transferri in partes baseos b R sibi ex ordine respondentes. Patet figuram insistentem minori b P esse minorem figura insistente arcubus; & figuram insistentem maiori b R esse maiorem figura insistente arcubus. Patet inquam quia quando bases b P, b R sunt inæquales & illis insistunt figuræ b G C R, b V I P ita constitutæ vt perpendiculares C R, I P sint æquales, & si ad libitum agatur V G parallela basi occurrens in V limbo insistentis super minore b P; in G verò limbo insistentis super maiore b R; ductis perpedicularibus V N, G T ad bases b P, b R recta b N sit minor recta b T; ostenditur facillimè figuram maioris baseos esse maiorem figurâ minoris.

Hoc autem constituto modus demonstradi est simillimus; ostenditur enim figura insistens arcubus neque maior, neque minor esse figura insistente basi b s; ergo est æqualis, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

Isdem manentibus (*Fig.* 55.) sit a c e x quadratum, sintque a A, a c æquales.

Ostendendum est lineam a p f e esse rectam, nempe diametrum parallelogrammi a c e x. Expansam verò z M L b s ita esse constitutam vt si iungatur recta L t, vel M h, vel z o, & ita de aliis, iaceant in directum ambæ l t, t r; M h, h g; z o, o c; & idem euenire in aliis quibuscunque.

Rectam a e esse diametrum parallelogrammi a c e x patet ex methodo duodecimæ tertij libri tetragonismicorum; nam vt A a vel a c brachiũ ad longitudinẽ a g, ita ex generatione quadratricis est g z vel c e ad g f: sed si a e sit recta complens triangulum a c e, vt est a c ad a g, ita erit c e latus trianguli ad rectam per g parallelam ipsi c e, vt ex Elementis Euclideis patet; ergo quadratrix linea a f e, est in hoc casu diameter parallelogrammi a c e x. Quoniam verò rectæ d b, b t ponuntur æquales, & perpendicularis r p ponitur æqualis ei quæ insistit puncto t, eidem verò po-

nitur æqualis d L; ergo rectæ d L, r p sunt æquales inter se. Quoniam verò triangula a r p, a c e sunt similia, & latera a c, c e istius ponuntur æqualia, erunt quoque illius latera a r, r p æqualia; ergo recta d L æqualis rectæ r p, erit quoque æqualis rectæ a r: ergo cùm d L, a r æquidistent & sint æquales, si iungatur L r æquidistabit basi d a, sed eidem ex constructione æquidistat r t: ergo rectæ L r congruit recta r t; ergo rectæ L t, t r iacent in directum; idem verò eodem pacto ostenditur in aliis: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam trianguli a c e quadratrix per duodecimam tertij tetragonismicorum est ceratoides parabolica a c e φ λ comprehensa sub arcu parabolæ a λ φ e (quam tangit recta a c, & cuius axis est a x) & sub rectis a c, c e; liquet ex demonstratis, huius quadratricis mixtæ quadratricem mixtam esse ceratoidem parabolicam translatam. Quod si tertia quadratrix mixta quæreretur, transferri deberet tertia inuenta in quadrato a x e c, & ita procedi posset ad quartam, quintam & reliquas in eodem ordine quadratrices, quarum omnium quadratura habetur ex quadragesima quarta sequente.

DEFINITIONES.

FIguram genitam ex quadrato c e x a & translatam in arcum b u t l h m o appello *parallelogrammum mixtum*, & quamlibet eius portionem parallelogrammum e c g z translatam appello eodem nomine. Quadratricem a c e f pari methodo translatam voco quadratricem figuram *mixti parallelogrammi*, vel breuius *quadratricem mixtam*, vel etiam *superficiem vngularem aut cuneatam*. Figuram verò z M L b s in quam expanditur, *quadratricem expansam* nomino.

PROPOSITIO XVII.

IIsdem manentibus (*Fig.* 55.) si vt est parallelogrammum mixtum ad quadratricem mixtam ita fiat brachium A a ad rectam a O abscissam ex a c, & per O agatur planum parallelum plano x a b, itemque aliud per perpendicularis a x bisectionem quod æquidistet plano supposito b a c.

Ostendendum est grauitatis centrum parallelogrammi mixti esse in recta quæ est communis sectio duorum istorum planorum iam ductorum: grauitatis verò centrum curuæ lineæ quæ est latus parallelogrammi suspensi esse in recta O X parallela ad rectam a b, & in eo eius puncto in quod cadit perpendicularis demissa ex grauitatis centro parallelogrammi mixti.

Quoniam ex decima quinta propositione, parallelogrammi mixti quadratrix est illa figura quam quadratricem mixtam appellamus, patet ex

lege libræ reciproca vt est suspensum, nempe parallelogrammum, ad quadratricem illi respondentem, ita esse brachium A a, ad rectam a O. Igitur planum per O ductum æquidistanter perpendiculo plano x a b transit per grauitatis centrum parallelogrammi mixti; atqui planum plano supposito parallelum transit per grauitatis centrum superficiei: id enim ostenditur simili methodo qua à Commandino & aliis monstratur centrum grauitatis cylindri vel cylindracei cuiuslibet esse in plano distante æquo interuallo vtrinque à basibus oppositis eiusdem: ergo &c. quod erat vnum ex demonstrandis.

Rursus sicut in cylindro & cylindraceo quouis omnes sectiones basi parallelæ sunt similes & æquales, vt demonstratum extat apud Serenum pro cylindro, & ratio eadem conuincit pro quibuslibet cylindraceis, ita manifestum est omnes parallelogrammi mixti sectiones esse æquales similes & parallelas basi eiusdem parallelogrammi. Item sicut in cylindro & cylindraceo recta axi parallela incedens per grauitatis centrum baseos incedere ostenditur per sectionum æqualium, similium, & parallelarum centra, ita hic recta parallela axi a x incedens per grauitatis centrum parallelogrammi mixti, incedit quoque per grauitatis centrum baseos; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Si circa axem a c manentem intelligatur circumuolui linea curua b u t h m o donec ad partes oppositas congruat plano b a c, & relinquere ad easdem partes sui vestigium, patet centrum grauitatis eiusmodi lineæ curuę ita duplicatę esse in puncto O. Quod etiam de parallelogrmmo mixto pari ratione duplicati intelligi debet; nempe centrum eius esse in perpendiculari ad planum suppositum excitata ex puncto O, eiusque distantiam ab eodem puncto O esse ęqualem dimidio rectę a x vel a c.

PROPOSITIO XVIII.

IIsdem manentibus (*Fig.* 56.) iungatur recta c x diameter altera quadrati vel cuiuslibet alterius rectanguli e c a x, & ex A c producta abscindatur recta c q æqualis rectæ a c, vt triangulum c f x a sit quadratrix figura rectanguli c e x a, prout ex duodecima tertij libri liquet. Eiusmodi quadrarrix c f x a intelligatur transferri iuxta methodum vndecimæ in curuam b t h o. Recta g h æquidistet rectæ b a, & incedat per grauitatis centrum curuæ b t h o.

Ostendendum est sicut est quadratrix mixta brachij q c ad quadratricem mixtam brachij a A, ita esse rectam c g ad rectam g a.

Istud apertum est ex septima secundi tetragonismicorum, & ex superiore Nam ex ista habemus si planum parallelum plano x a b incedens per centrum grauitatis parallelogrammi mixti faciat in supposito plano sectionem g h, quę ex Elementis Euclideis ęquidistabit rectę a b, in eius-

modi

modi recta g h esse grauitatis centrum curuę b t h o; ex illa verò habemus vt est quadratrix mixta brachij a A ad parallelogrammum mixtum, ita esse rectam a g ad A a vel q c; & vt mixtum illud parallelogrammum ad quadratricem brachij q c, ita esse eandem q c ad c g: ergo ex æquo vt est quadratrix mixta brachij a A ad quadratricem mixtam brachij c q, ita est recta a g ad g c; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Ex nonâ secundi tetragonismicorum patet duas simul quadratrices mixtas esse æquales parallelogrammo mixto. Quòd si libræ brachium non sumeretur æquale rectæ a c, sed inæquale vt a T; & ipsi a T æquale c D; vt est recta c a ad a T, ita esse patet duas simul quadratrices illis respondentes ad parallelogrammum mixtum.

COROLLARIVM II.

Intelligatur eidem curuæ insistere parallelogrammum mixtum respondens parallelogrammo rectilineo e c a x ad positionem plani x a b, & c e a triangulum transferri simili pacto in curuam b h o, eiusque dimetientem respondentem curuæ puncto cuilibet h esse rectam P h æqualem & parallelam rectæ g i. Intelligatur præterea triangulum aliud a b B erigi super planum b a c & ad illud stare rectum; angulúsque b a B sit æqualis angulo c a e: deinde triangulũ a b B ita erectum intelligatur transferri in curuam b h o ad positionem plani x a c, eiúsque dimetiens respondens puncto h sit h N æqualis & parallela rectæ l M. Intelligatur denique brachio A a perpendiculo a b gigni quadratrix trianguli a b B translati in curuam b t h: brachio verò a n latere quadrati A a n E, gigni quadratrix trianguli a c e translati in curuam b t h. Ex demonstrata methodo ostendentur duæ istæ quadratrices translatæ esse vna & eadem. Quoniam l a, l M sunt æquales, itemque l M, h N, patet rectas l a, h N esse æquales; eadémque de causa rectas a g, h P. Quoniam igitur ex generatione quadratricis vt a A brachium æquale brachio a n ad longitudinem a g, ita est h N vel l a ad λ h dimetientem quadratricis secundæ mixtæ respondentis triangulo b a B translato; rectangulum contentum sub a A & sub h λ erit æquale rectangulo sub mediis a g, h N: sed recta h N est æqualis rectæ l a vel h g: ergo rectangulum contentum sub a A & h λ rectis est æquale rectangulo a g h vel a l h. Rursus quoniam vt n a brachium ad a l longitudinem, ita est h P vel a g ad dimetientem quadratricis respondentis triangulo c a e translato; ergo rectangulum sub extremis erit æquale rectangulo sub mediis, hoc est rectangulo l a g: sed eidem l a g æquale ostendimus rectangulum contentum sub h λ & sub a A vel a n; ergo rectangulum sub a n & sub dimetiente illius quadratricis est æquale rectangulo sub a n vel a A & sub h λ contento. Ergo triangulorum translatorum in curuam b h o quadratrix est vna & eadem, si quadratrices gignantur brachiis præscriptis. Vnde patet proprietatem in vigesima tertij libri de-

monstratam habere locum in istis triangulorum ita translatorum quadratricibus.

PROPOSITIO XIX.

Iisdem manentibus (*Fig. 56.*) in plano x a b intelligatur descripta curua b f m ita respondens curuæ b h o vt si in recta b a sumatur quodcunque punctum l, & per l ducantur h l, l f parallelæ rectis a c, a x, occurrentes limbis b t o, b f m in h, & f; ipsæ l h, l f sint inter se æquales. Per m ducatur m y parallela rectæ a x, & constructo quadrato A a n E, b n librâ suspensâ ex a perpendiculo a x, brachio a n, figuræ b f m quadratrix b p l ita respondeat, vt sicut est brachium a n ad a l quamcunque portionem rectæ a b, ita sit f l dimetiens figuræ b f m y ad l p dimetientem quadratricis b p l.

Ostendendum est ex figurâ b f m y generatrice, ad positionem plani x a c generari in superficie cylindracea insistente super curuâ b t h o, figuram eandem quæ ex translatione trianguli a c e ad positionem plani x a b: ac proinde quadratricem b p l translatam, esse quadratricem quadratricis mixtæ, positâ rectâ a A axe libræ planæ, perpendiculo plano x a A, sustentaculo n E.

Quoniam perpendicularis insistens puncto h est æqualis rectæ g i, ipsa verò g i rectæ g a, perpendicularis insistens puncto h erit æqualis rectæ h l, ac proinde & rectæ l f: ergo figura b f m y translata generat quadratricem mixtam, quod erat primò demonstrandum. Alterum verò ex isto sequitur posita veritate propositionis decimæ quartæ: ergo &c. quod erat demonstradum.

COROLLARIVM I.

Si curua b h o intelligatur vna cum plano o h b a circumuolui circa axem b a, superficies peripherica quam describet, talis (vt patet) est vt si secetur plano ad planum x a c parallelo ducto per l quodlibet punctum rectæ a b, eius sectio sit peripheria circuli descripti semidiametro l f, centro l. Cùm igitur peripheriæ inter se sint vt semidiametri, planum parallelum plano x a c ductum per centrum quadratricis mixtæ, transibit vt patet per centrum periphericæ superficiei: si igitur vt quadratrix mixta ad quadratricem b p l translatam, ita fiat brachium n a ad rectam a l, in plano f l h erit grauitatis centrum tam quadratricis mixtæ, quàm periphericæ superficiei.

COROLLARIVM II.

Quoniam quadratrix mixta genita brachio A a, perpendiculo a b, repræsentat superficiem periphericam genitam circa axem b a motu arcûs b h o: id est, ad positionem rectæ a c, secantur proportionaliter quadratrix illa mixta & superficies peripherica; & quoniam in circuli quadrante ista quadratrix mixta est inuolucrum cunei primi noti vel vngulæ, re-

& è Gregorius à S. Vincentio libri noni propositione septuagesima sexta contendit *in omnibus superficiem vngularum conuenire cum sphærica*; quod vtique generale est pro omnibus quadratricibus mixtis, vt iam annotauimus; illæ enim perinde sunt vngulares comparatæ ad suum cylindraceum à quo abscinduntur per planum ad basim cylindracei ipsius inclinatum.

PROPOSITIO XX.

Esto b h c a (*Fig.* 57.) quadrans circularis, ex quo genita sit paruæ semicycloideos pars superior c r p a, habens basim a p, axem a c: arcui b h c insistat parallelogrammum mixtum e c h b l m, eiusque quadratrix mixta b i e c h.

Ostendendum est istam quadratricem esse æqualem figuræ c r p a, ita vt si sumatur quodlibet parallelogrammum m h c e, & per h ducatur h r parallela basi b a, occurrens limbo c r p in r, & per r ducatur r s parallela rectæ a c, occurrens basi in s, quadratrix i h c e sit æqualis figuræ a c r s; & quadratrix b i h, figuræ r s p.

Istud patet ex corollario decimæ quintæ secundi libri; ibi enim ostendimus ex triangulo rectangulo a c e translato gigni superficiē b i e c h cunei primi noti: atqui illa superficies est quadratrix mixta ex definitionibus decimæ sextæ: superficiei autem isti esse æqualem semicycloidem superiorem liquet ex secundi libri octaua, id quoque generaliter constat ex decima sexta præsentis libri: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam decima sexta præsentis libri modò laudata id generaliter demonstrat quæcunque curua sit basis rectanguli mixti, & quadratricis ipsius, patet circa istud nihil affirmari incautè, quamuis res sit plena periculi vt monuimus in illius octauæ corollario. Ex nona verò eiusdem apertum est completo rectangulo r h z s, portionem b i h æqualem esse rectangulo a b z, & portionem i h c e rectangulo b a z.

PROPOSITIO XXI.

Iisdem manentibus (*Fig.* 57.) peripheriæ b c u semicirculari insistat parallelogrammum mixtum b l e f d u c; sit a n dupla secundi termini progressionis subadiunctæ, quam initio tertij libri definiuimus.

Ostendendum est punctum n esse grauitatis centrum peripheriæ b c u, siue quod idem est ex decima septimâ, planum per n incedens parallelum plano x a b transire per grauitatis centrum parallelogrammi mixti b i e f d u c. Rectam verò a c ad a n esse, vt arcum c h b ad radium c a.

Quoniam quadratrix b i e u, vel bis figura a c r p per nonam secundi, vel duodecimam primi, est æqualis duplo radij a c vel a A, suspensum autem parallelogrammum mixtum b l m e f d u c, est vt ex tertia primi li-

quet, æquale circulo, ſemidiametro a c deſcripto: igitur ſuſpenſum ad æquiponderans eſt vt terminus ſecundus progreſſionis perſpectæ ad duplum termini primi. Rurſus ex lege reciproca libræ vt eſt ſuſpenſum ad æquiponderans, ita eſt libræ brachium A a ad longitudinem a n; ergo cum a A radius ſit primus ſubadiunctæ progreſſionis, erit recta a n dupla ſecundi termini eiuſdem ſubadiunctæ, quod erat demonſtrandum primo loco.

Alterum verò ita oſtenditur; quoniam c a eſt primus terminus ſubadiunctæ progreſſionis, & a n eſt bis ſecundus; vt autem primus ſubadiunctæ ad bis ſecundum, ita eſt ſecundus adiunctæ (vt ex earum definitione patet initio tertij traditâ) ad bis primum, ita quoque erit dimidium adiunctæ ad primum. Atqui ſecundus adiunctæ eſt peripheria b c u; ergo dimidium illius erit b h c quadrans totius circularis: ergo vt c a recta ad a n, ita c h b quadrans peripheriæ deſcriptæ centro a, ſemidiametro a c, ſe habet ad rectam c a; tres ergo lineæ c h a, c a, a n ſunt proportionales, & vt c h b ad c a, ita eſt c a ad a n, quòd demonſtrandum ſupererat.

COROLLARIVM I.

Si vt latus quadrati ad diametrum eiuſdem, ita fiat recta a n dupla ſecundi ſubadiunctæ termini ad a o, ex methodo præſentis oſtendetur punctum o eſſe grauitatis centrum curuæ h c r, poſito quod c a ad a g ſit poteſtate vt binarius ad vnitatem. Atque hac methodo inuenientur centra grauitatis quorumcunque arcuum, eorumque diſtantia à puncto a definietur per ſecundum terminum ſubadiunctæ progreſſionis, vel per rectam illi ſecundo termino proportionalem in ratione cognitâ.

COROLLARIVM II.

Subtiliſſimum Guldini noſtri inuentum, quod omnes ſuſpiciunt & ſequuntur, hic præteriri non debet, vt ex eo & confirmemus noſtras demonſtrationes, & inueniamus centra grauitatis pro ſectoribus circuli methodo diuerſa ab ea quam in elementis noſtris tradidimus, & qua vſi ſumus in calculo problematum Anonymi edito ſub ipſum huius anni 1659. initium. Eſto igitur n centrum grauitatis arcûs b c u ſemicirculi, vel etiam cuiuſcunque alterius peripheriæ h c R ſubtenſæ recta h R ad radium a c ordinatim vtrinque applicatâ. Oſtendit ille primus ſi vt ternarius ad binarium ita fiat recta a n ad a g, punctum g eſſe centrum ſectoris comprehenſi ſub illo arcu, & ſub ſemidiametris a h, a R. Inde verò patet ex grauitatis centro n arcûs circularis cuiuſcunque haberi centrum grauitatis circuli ſectoris eidem arcui reſpondentis; ſi enim vt ternarius ad binarium, ita fiat n a ad a g; erit g centrum ſectoris. Hinc etiam oſtenditur conſonantia noſtrarum & Guldinianarum demonſtrationum: nam ſi n ſit grauitatis centrũ peripheriȩ totius b c u; cùm a n ſit bis terminus ſecundus ſubadiunctȩ progreſſionis, vel ſex trientes termini eiuſdem ſecundi; vt ternarius ad binarium, ita erunt ſex trientes, ad quatuor trientes: ergo centri grauitatis pro ſemicirculo diſtantia à centro a eſt quatuor trientes

ſecundi termini ſubadiunctæ, quos illi attribuimus in illo calculo: ergo nunc demonſtrata conſonant & principiis noſtris in illo calculo adhibitis, & demonſtratis Guldinianis.

COROLLARIVM III.

Cùm per methodum à nobis demonſtratam ex hoc Guldini inuento habeatur planum parallelum plano x a b incedens per centrum parallelogrammi mixti b l m e f d u c, & inuento iſto plano habeatur quadratrix mixta, ipſáque quadratrix mixta ſit æqualis figuræ c r p a; ex inuento illo Guldini per demonſtrata noſtra perueniemus ad quadraturam figuræ c r p a, quam in duodecima primi libri editi anno ſuperiore ſtatim poſt quàm Anonymus propoſuit ſua problemata, demonſtrauimus eſſe æqualem quadrato radij c a; poterítque idem Guldinus dici primus inuentor huius quadraturæ, ſi is dici iure debeat primus inueniſſe aliquid, qui excogitauit id vnde alij poſtea illud intulerunt, aut viderunt poſſe inferri, quamuis aliunde illud ipſum iam inueniſſent. Sed hoc quis dicat niſi qui profuſior eſſe velit in Anteriores Scriptores, & parcior in Poſteros. ~~occurrens limbo o d r in puncto d ; compleatur parallelogrammum l h d t, l h g a.~~

PROPOSITIO XXII.

Reuocato ſchemate propoſitionis decimæ octauæ (*Fig.* 58.) arcus b h o ſit quadrans peripheriæ circuli ſemidiametro a e, vel a o, vel a b deſcripti & motu illius circa manentem b a deſcripta ſit ſuperficies ſphærica. Eſto a o d r ſuperior pars ſemicycloideos paruæ reſpondens quadranti circulari b h o a; eius baſis a r bifariam ſecta eſto in m, & ex m excitata ad baſim perpendicularis m y æqualis dimidio radij a o; ſitque a y ſ r pars ſuperior cycloideos paruæ genitæ circulo cuius centrum m, ſemidiameter m y. In recta b a ſumptum ſit quodlibet punctum l, & per illud ductum planum f l h ſecans ſuperficiem ſphæricam in duas partes externam, & internã adiacentem centro a: per h ducta ſit h d parallela rectæ b a, occurrens limbo o d r, in puncto d, ; compleatur parallelogrammum l h d t, l h g a.

Oſtendendum eſt vt quadratum radij a e ad ſpatium t ſ r cognitum, per nonam libri ſecundi, ita eſſe radium a n vel a b ad rectam qua centrum grauitatis, reſpondens externæ parti eiuſdem ſphæricæ ſuperficiei, diſtat à centro a. Et vt idem quadratum ad figuram a t s rectilineo noto æqualem, ita eſſe radium eundem ad rectam qua centrum partis internæ diſtat à centro a. Demúmque centrum grauitatis reſpondens toti ſuperficiei hemiſphæricæ bifariam ſecare radium b a. Quod ſi reſpondeat ſuperficiei illi internæ quæ eſt inter radium a o & parallelam ipſi, incedentem per biſectionem radij a b, bifariam quoque ſecare portionem illam radij a b.

Ex centro a in plano x a b deſcriptus ſit quadrans circularis b f x a, & eius quadratrix b p x a reſpondens brachio a n, vt in decima nona ſuperiore præſcripſimus. Iſta itaque quadratrix tranſlata ad poſitionem plani x a o in ſuperficiem cylindricam inſiſtentem arcui b h o, erit quadratrix quadratricis mixtæ inſiſtentis eidem arcui b h o, vt ibidem oſtendimus: ac proinde, vt quadratrix mixta (ſiue figura a o d r vel tota pro toto arcu, vel ex parte ſumpta, pro partibus arcus, ita vt arcui b h reſpondeat d r t, & arcui h o conueniat figura o d t a) ſe habet ad ſuam quadratricem, ita erit radius a n ad diſtantiam centri quæſiti. Supereſt igitur vt oſtendamus figuram b p l tranſlatam, eſſe æqualem figuræ ſ t r, & figuram l p x a figuræ a y ſ t; ideóque totam b p x a, toti a y ſ r; ipſámque a y ſ r eſſe æqualem dimidio quadrati a b vel a n.

Completo parallelogrammo a r q A, intelligatur figura a i q r ſubcontraria figuræ o d r a, vt in primæ propoſitionis ſecundi libri ſchemate: igitur ex ſeptima ſecundi rectangulo i t d æquale eſt rectangulum contentum ſub radio & ſub t s: ſed rectæ l h æqualis eſt d t, rectæ verò h g vel l a æqualis eſt t i ex tertia ſecundi: ergo rectangulum ſub radio a n & ſub t s, eſt æquale rectangulo a l f: ſed vt n a brachium ad a l, ita eſt l f ad l p ex generatione quadratricis b p x a; ergo rectangulo a l f æquale eſt rectangulum ſub radio a n & ſub recta l p: ergo rectæ l p, t s ſunt æquales; ac proinde quadratrix b p x a tranſlata expanditur in figuram a y ſ r, & portio b l p æqualis eſt figuræ t ſ r; portioque l p x a figuræ a y ſ t. Quoniam verò ex duodecima primi figura m y ſ r eſt æqualis quadrato m y, quod eſt quadrans quadrati a b, tota a y r m erit æqualis dimidio quadrati a b; ergo vt o d r a ſiue quadratum a b, ad a y r m ſiue ad dimidium ſui, ita radius b a ad ſui dimidium, in quo proinde eſt grauitatis centrum pro tota ſuperficie hemiſphærica. Similiter quoniam quando l bifariam ſecat rectam b a, punctum t congruit puncto m, ſpatium a ſ t vel a y m erit quadrans quadrati b a; vt ergo quadratum b a ad ſui quadrantem, ita eſt recta b a ad interuallum centri à puncto a: ergo cùm l a ponatur eſſe duo quadrantes rectæ b a, & diſtantia illa oſtenſa iam ſit eſſe quadrans, bifariam ſecatur à centro grauitatis. Ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Cùm Guldinus oſtenderit centrum totius hemiſphæricæ eſſe in biſectione radij; inde confirmari noſtram methodum liquet. Ita pariter cùm in tetragoniſmicorum elementorũ tertio libro oſtenderimus centra grauitatis ſolidorum comprehenſorum ſuperficie ſphærica; inde eruemus centra grauitatis ſuperficierum ad ſphæram attinentium, nihil diſcrepantia ab inuentis modò: vel etiam ex iſtis extrahemus viciſſim illa. Nam Dettonuillæus in Opuſculo Gallico *de ſolidis circularibus* aſſumit extendi poſſe theorema Guldini ad ſolida, ita vt ſolidum genitum circumductu ſectoris circuli circa rectam ex centro, habeat centrum grauitatis diſtans

à centro sphæræ interuallo quod ad interuallum centri superficiei descriptæ motu illius, arcûs sit vt ternarius ad quaternarium, quæ est ratio quam habet in cono distantia centri grauitatis à vertice, ad distantiam grauitatis centri baseos ab eodem vertice. Quod recte congruit demonstratis: nam totius hemisphærij centrum ita diuidit radium, vt sicut 8. ad 3. ita sit radius ad distantiam centri sphæræ à centro hemisphærij: ergo cùm distantia centri superficiei sit ad istam vt quaternarius ad ternarium; distantia centri superficiei hemisphæricæ erit ad radium vt 4. ad 8. vel vt 1. ad 2. Hæc ipsa concordia elucescit in aliis exemplis, vt calculatori rem experienti patebit. Sed illa extensio in sectoribus ellipseos vel hyperbolæ non habet locum.

PROPOSITIO XXIII.

IIsdem manentibus vt in vigesima (*Fig.* 57.) superficies cylindrica duplicis cunei, vel vt alij loquuntur vngulæ sphæricæ, quarum vna b i e u insistat peripheriæ b h c R u, supra planum suppositum b a c, altera eidem peripheriæ insistat ad partes oppositas, habet centrum grauitatis in puncto n, ita vt n a recta æquet dimidium arcûs b h c. Si autem non consideretur nisi vnicus cuneus superior, illius centrum est in perpendiculari ad planum b a c excitatá ex puncto n, distatque à puncto n, rectá æquante dimidium eiusdem rectæ a n, vel quadrantem arcûs b h c.

Completo parallelogrammo a p B A, intelligatur semicycloides parua A a p t genita circulo cuius diameter sit a A, ita vt a p basis æquet semiperipheriam totius circuli genitoris. Ducta sit quæcunque h i perpendicularis ad planum suppositum occurrens in i limbo b i e semicunei b i e c h: per h ducta sit recta h r parallela rectæ b a occurrens limbo c r p in r; per r ducta sit r s parallela rectæ c a occurrens lineis a p, A t p, A B in s, t, q. Intelligatur b D A a parabola cuius axis A a, vertex A, ordinatim applicata a b; per h ducatur h z æquidistans axi a A, occurrens lineis b D A, AF in D, E: igitur per tertiam tertij tetragonismicorũ tres rectæ E z, z h, z D sunt proportionales. Quoniam verò per vndecimam tertij libri superioris tres rectæ q s, s r, vel h i & s t sunt proportionales; sunt autem æquales h z, r s, item q s, E z: ergo rectæ s t, z D sunt æquales: ergo si parabola b D A a z intelligatur ad positionem plani x a c transferri in superficiem cunei, & insistere arcui b h c ita vt translata sit b H e c h, expandetur in figuram A a p t, vt ex decima quinta patet; eritque portio b H h æqualis portioni s p t, & portio reliqua h H e c reliquæ portioni a s t A, totáque proinde a H e c h, toti a s p t A.

Quoniam igitur vt E z vel brachium A a ad z h, vel ad a g, ita h i æqualis rectæ g y ad h H; & ita est g y dimetiens trianguli rectilinei a c e parallela lateri c e ad P g dimetientem quadratricis; erit ergo b H e c h

quadratrix translata genita ex triangulo e c a, generatore superficiei cunealis b i e c h: ergo per decimam quartam semicunealis figuræ b i e c h quadratrix est b H e c h libræ planæ axe b a, sustentaculo A F. Cùm igitur, vt patet ex vndecimæ tertij libri calculis, figura A a s p t æqualis sit quadranti circulari b h c a, vt est suspensum b i e c h, hoc est quadratum a b vel primus terminus perspectæ progressionis, ad b h c a quadrantem secundi termini, ita erit brachium A a, siue primus terminus adiunctæ progressionis, ad quadrantem secundi adiunctæ: quapropter quia secundus adiunctæ æquat arcum b c u, quadrans illius erit dimidium arcûs b h c; sed ita etiam est A a ad a n: ergo recta a n æquat dimidium peripheriæ b h c; quod erat primum ex demonstrandis: nam cunei geminati centrum grauitatis esse in plano b a c & in recta a c, res est manifestior quàm vt probatione egeat.

Rursus si eadem superficies semicunealis b i e c h intelligatur manens vt iacet, suspendi plano b a c cadente perpendiculariter ad horizontem, ita vt recta c e æquidistet eidem horizonti; sustentaculum verò distet à plano b a c ad partes oppositas superficiei suspensæ interuallo æquante radium a A, patet isti superficiei æquiponderare idem spatium quod eidem expansæ in rectam a p æquiponderat axe a p, sustentaculo A B. Atqui ex quæsito secundo vigesimæ quintæ libri tertij, vt est primus terminus perspectæ ad octauam partem secundi, ita est recta A a vel primus terminus adiunctæ ad centri quæsiti distantiam à plano b a c: ergo centri quæsiti distantia à plano b a c est octaua pars secundi termini adiunctæ progressionis, qui cùm sit arcus b c h, eiusmodi distantia erit quadrans arcûs b h c, quod secundò erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex methodo tradita liquet pari pacto inueniri centrum grauitatis geminatæ portionis b i h, vel i h c e: neque tantùm geminatæ sed etiam simplicis. Cæterùm hoc habent superior & præsens propositio vt proximè & directè exequantur rem propositam; nec illam petant ex altero centro grauitatis priùs inuento. Recta verò a n est dupla distantiæ centri à plano supposito b a c non tantùm in isto casu, sed in omni alio vt ex decima quarta primi libri colligi potest.

SCHOLIVM.

Anno proxime elapso postquam vulgauimus nostras de Cycloide viginti propositiones, res tulit vt D. Pascalius Parisiis ad nos statim miserit aliquot sua Problemata quorum solutionem à nobis flagitabat vt probare posset num sua & nostra ratio demonstrandi in idem conspirarent. Eorum vna, quod ad præsentem propositionem attinet proponebatur istis verbis dati trianguli cylindrici centrum grauitatis reperire, *intelligendo per trianguli cylindrici latera, sectiones superficiei cylindricæ cum planis communes; id verò nihil est aliud quàm postulare centrum grauitatis superficiei cunealis vel integrè vel ex parte sumptæ. Respondimus si centrum eiusmodi nobis detur, repensuros nos esse absolutam circuli quadraturam, nihilque de laude quam centri*

illius

illius Inuentor mereretur, detractum iri. Ad hæc ille responsum sua manu dedit optando vt quam facilè ipse exhibiturus esset eiusmodi centrum, tam facilè nos quadraturam inde promeremus. Cùm centri inuentionem auidi expectaremus, accepimus ab eodem literas quibus fatetur suum istud problema non procedere nisi ex data circuli quadraturâ; quod narramus tantùm vt inde constet centra ista nobis iam tunc fuisse cognita: in D. verò Pascalio nihil propterea reprehensione dignum agnoscimus. Norunt enim omnes, quotquot inuentioni rerum reconditarum vacant, in inuentis, cum primùm ex abditis eruũtur semper residere aliquid quod postea accuratioris examinis limâ ipse Inuentor pro iure suo radat. Istud porrò problema & cætera quæ tunc ad nos D. Pascalius pro suis misit, ineunte postea Nouembri Anonymus (is nunc Dettonullæum se fuisse, scripto profitetur gallicè libro) vt sua etiam adiecit ad prima mense Iunio data, vt ita totius Europæ Geometras secundis quæstionibus distineret. Quæ est causa vt ex illo tempore discrimen quidem inter nomina illa agnouerimus, sed inter Dettonuillæum & Pascalium Geometras quodnam esset non ita bene viderimus. Excidit modo nobis vnum quod antequam longiùs abeamus retractari debet: neque enim omnia problemata ad nos tunc missa, euulgauit postea Dettonuillæus; vnicum excepit quod ipsi facilius fortasse visum propterea fuit, quod eius solutionem nobis notam esse calculo vnius casûs ipsi exhibito probauerimus: nam suis in literis difficile id esse prius affirmauerat. Istud verò ita se habebat inuenire centrum grauitatis in sectore sphæræ dato. *Initio quidem sectorem intelleximus illum quem Archimedes initio librorum de sphæra & Cylindro appellat τομέα σφαιρικόν, qui est portio quam coni recti habentis verticem in centro sphæræ, superficies abscindit ex ipsâ sphæra; statimque rescripsimus illud non videri difficile, satisque constare ex Archimedeis & aliorum inuentis. Post hac docuit nos ille ista* sectoris *voce à se intelligi portionem sphæræ interceptam inter duo plana per centrum ducta & secantia se ad angulos non rectos. Noster porrò ille calculus ita se habebat.*

Sint (*Fig.* 59.) a c b, a d b semicirculi magni sphæræ centro e prędite: per polos eiusmodi circulorum transeat circulus maior, eiusque arcus interceptus semicirculis a c b, a d b sit d f c graduum centum viginti: idem arcus d f c bifariam sectus esto in f, & iungatur recta e f. Vt est quaternarius ad ternarium ita fiat quadratum e c ad e h: vt autem 9. ad 16. ita recta e g ex e f abscissa, sit ad e h. Dico punctum g esse grauitatis centrum sectoris a m d b c l.

Addidimus in eadem responsione si figura proposita a c b d intelligatur secari plano i l m parallelo ad planum e c d, constare nobis methodum inueniendi grauitatis centrum partium seorsum sumptarum, datâ circuli quadraturâ: idque nobis videri difficilius problemate proposito.

Posita extensione Guldiniani illius principij cuius meminimus in corollario vigesimæ secundæ propositionis, patet si vt ternarius ad quaternarium ita fiat e g recta ad e n, punctum n esse grauitatis centrum superficiei sphæricæ a l c b d m.

PROPOSITIO XXIV.

EX centro a (*Fig*. 60.) deſcriptus ſit quadrans circularis d u t a, & ex radio t a intelligatur abſciſſa recta a b æqualis arcui d u t, vt ſit baſis paruæ ſemicycloideos ſuperioris b c d a habentis generatorem circulum centri a, & diametri d a l. Completo parallelogrammo b a l g intelligatur b f l a figura ex ſinibus verſis definita in decimæ tertiæ ſecundi corollario ſecundo, & vſurpata in vndecima libri tertij. Eſto g p q l figura ſubcontraria figuræ b c d a iuxta explicationem primæ ſecundi libri.

Oſtendendum eſt figuram b f l g eſſe figuram ex ſinibus verſis reſpondentem ſemicycloideos paruæ parti ſuperiori g p q l.

Quoniam rectę c e, i q parallelæ ad rectam d a ſunt per tertiam primi æquales ſinibus z u, a z, & quadrata rectarum z u, a z ſunt æqualia quadrato a u vel a l, erunt quadrata rectarum e c, i q æqualia ſimul quadrato a l vel e i: ſed quadratum c e eſt ex decimâ tertiâ ſecundi libri æquale rectangulo i e f, quadratum verò ei eſt æquale rectangulis i e f, e i f; ergo quadratum i q eſt æquale rectangulo e i f; & tres rectę e i, i q, i f ſunt proportionales, ergo figura b f l g reſpectu figuræ g p q l eſt illa quam ex ſinibus verſis appellauimus in corollario ſecundo decimæ tertiæ ſecundi, prout erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXV.

IIſdem poſitis ex puncto e vtcunque ſumpto in baſi b a (*Fig*. 60.) intelligatur excitari recta e x perpendicularis ad planum b a d, æqualis radio a t, & completo parallelogrammo d a e B, ex centro e interuallo rectæ e x vel e B, intelligatur deſcriptus quadrans circularis B ſ x e; ex puncto c intelligatur erigi recta c s parallela rectæ e x occurrens peripheriæ B ſ x in s, & compleatur parallelogrammum B ſ r e. Idem verò intelligatur factum in ſingulis punctis rectæ b a, vt inde exiſtant duo ſolida quorum vnum ſit quadrans cylindri cuius axis b a, baſis ſimilis æqualis & ſimiliter poſita circulo centri e, ſemidiametri e B vel e x: alterum verò ſolidum ſit illud cuius ſectio eſt parallelogrammum e c ſ r in cylindri quadrante incluſum.

Oſtendendum eſt libræ planæ axe b a, perpendiculo plano x e b, ſuſtentaculo l g, æquiponderans ſolido illi incluſo ad poſitionem plani x e i, eſſe cognitum datâ quadraturâ circuli.

Quoniam tres rectæ e i, e c, e f ſunt proportionales, vt eſt e i ad dimidium rectæ e c, ita erit tota e c, ad dimidium rectæ e f; ergo ſi dimidium rectæ e f aptetur puncto i ad poſitionem rectæ a l: æquiponderans rectæ e c, librâ grammicâ i c ſuſpenſâ ex e, perpendiculo e x, brachio e i, erit di-

midium rectę e f aptatum puncto i; ergo parallelogrammo e c ſ r vt iacet manenti æquiponderans erit rectangulum contentum ſub dimidio rectæ e f, & ſub recta c s. Quoniam verò quadrans circularis e B ſ x eſt ſimilis & æqualis quadranti circulari a d u t, & rectæ e c, a y ſunt æquales, erunt quoque c s, y u vel a z æquales; ſed y u, i q ſunt, vt in ſuperiore oſtendimus, æquales: ergo rectæ q i, c s ſunt æquales, & rectangulum ſub q i & ſub dimidio rectæ e f comprehenſum, ſi aptetur puncto i, ad poſitionem plani x e B æquiponderat rectangulo e c ſ r: ac proinde ex vigeſima octaua quarti tetragoniſmicorum ſolidum aptatum ſuſtentaculo g l, cuius ſectio eſt rectangulum contentum ſub recta q i & ſub dimidio rectæ e f, æquiponderat ſolido cuius ſectio eſt parallelogrammum e c ſ r.

Reſtat vt oſtendamus ſolidum cuius ſectio eſt parallelogrammũ comprehenſum ſub recta q i & ſub recta e f, eſſe parallelepipedo cognito æquale, ſuppoſita quadratura circuli: id verò ita oſtenditur. Cylindraceum altitudinis e x vel e i baſeos g i l q p eſt notum, cùm baſis g i l q p quadretur per nonam ſecundi libri: cùm ergo cylindraceum iſtud diuidatur in duo dicylindracea quorum vnum ad poſitionem plani x e i gignitur ex figura g i l q p & ex figura ſinuum b f l i g, quæ ipſi reſpondet; alterum ex eadem figura g i l q p & ex figura b f l a e: ſi ex cylindraceo altitudinis e x, baſeos g i l q p cognito, auferatur dicylindraceum genitum ex figura g i l q p & ex figura b f l i g, relinquetur dicylindraceum genitum ex figura b f l a e & ex figura g i l q p, cuius dimidium quærimus.

Intelligatur figura g i l m p ita deſcripta, vt ſicut eſt recta e i ad i q, ita ſit recta i f ad i m; ac proinde ita vt quatuor rectæ e i, i q, i f, i m ſint continuè proportionales. Figuram iſtam dimetientis i m appellauimus in corollario ſecundo propoſitionis octauæ libri tertij, *quartum gradum*; figuram dimetientis f i, *tertium*; figuram dimetientis q i *ſecundum*; & parallelogrammum altitudinis i e *primum*. Intelligatur circa manentem g l circumuolui figura g p q l, & conſideretur ſolidi ita geniti quadrans inſiſtens baſi g p q l. Intelligatur quoque dicylindraceum genitum ad poſitionem plani x e B ex ipſa figura g p q l, ita vt eius ſectio in eodem plano x e c poſita, ſit quadratum F i q G inſiſtens ſuper latere q i. Æquiponderans ſolidi peripherici quadranti axe g l, perpendiculo plano F i g, ſuſtentaculo b a inuentum eſt in tertio libro, & computatum pro tota figura g l q p extat in quæſito ſeptimo propoſitionis vigeſimæ quintæ tertij libri, pro partibus verò obtinetur ex decima nona propoſitione eiuſdem tertij, poſitâ circuli quadraturâ. Quoniam verò ex ſexta tertij tres ſemiſſes æquiponderantis quadranti peripherici ſunt æquiponderans dicylindraceo ſectionis quadratæ F i q G, patet notum eſſe æquiponderans dicylindraceo iſti. Demum verò quia ex corollario quarto octauæ tertij ſi iſtud æquiponderans reducatur ad cylindraceum altitudinis e x, baſis eſt dimidium quarti gradûs, patet triplum cylindracei æquiponderantis qua-

dranti illi, & habentis altitudinem e x, habere pro basi quartum gradum.

Quoniam igitur notus est quartus gradus, & cylindraceum sectionis e i m est æquale dicylindraceo sectionis q i f, sicuti & ipsæ sectiones sunt æquales, nam e i m comprehenditur sub prima & quarta quatuor proportionalium, & q i f sub secunda & tertia: ergo cylindraceum altitudinis i e cuius basis sit quartus gradus iam inuentus æquat dicylindraceum sectionis q i f quæsitum: igitur cylindraceum altitudinis i e, cuius basis sit quartus gradus modo repertus æquat dicylindraceum cuius sectio est rectangulum contentum sub recta q i & sub recta i f, & est cognitum, datâ quadraturâ circuli. Igitur si istud dematur de cylindraceo altitudinis e i, baseos æquantis trientem quadrati a l, relinquetur cylindraceum quæsitum: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVI.

Ostendendum est iisdem manentibus (*Fig. 60.*) dicylindraceo sectionis c f r e integro, id est cuius basis sit integra figura b c d a, æquiponderans axe b a perpendiculo plano x e b, sustentaculo g l esse æquale cylindraceo altitudinis e x vel a d, cuius basis æqualis sit sextanti quadrati a d vel a l, vel e x; sunt enim ex constructione istæ omnes rectæ inter se æquales.

Quoniam ex parte secunda decimæ nonæ propositionis tertij libri dimidio conoidis circa manentem g l geniti motu figuræ g p q l i æquiponderans axe g l, perpendiculo plano F i g, sustentaculo b a, est cylindraceum altitudinis e x, baseos æquantis quatuor nouenas quadrati a d, quadranti eiusdem conoidis insistenti super basi g p q l æquiponderabit cylindraceum altitudinis e x vel a d, baseos æquantis duas nouenas quadrati d a: ergo cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis trientem quadrati a l vel a d, est æquale spatio quod æquiponderat solido sectionis quadratæ F i q G insistenti super tota figura g p q l; ergo dimidium quarti gradûs g i l m p est ex superioris præscripto ille idem triens quadrati a l: ergo dicylindraceum genitum ex figura g p q l & ex portione g i l f b, est æquale cylindraceo altitudinis e x, baseos æquantis bessem quadrati d a.

Quoniam igitur cylindraceum baseos g p q l i, altitudinis e x, est æquale (vt ex nona secundi liquet) cylindraceo altitudinis a d, baseos æquantis quadratum a d vel e i; si ex isto dematur cylindraceum æquale dicylindraceo genito ex figuris p q l g, b f l g, residuum fiet cylindraceum altitudinis a l, baseos æquantis trientem quadrati a d: igitur ex superioris demonstratione patet, dicylindraceum genitum ex figuris g p q l i, b f l a e esse æquale cylindraceo altitudinis a d, baseos æquantis trientem quadrati a d, & istius dimidium nempe cylindraceum altitudinis e x, baseos æquantis sextantem quadrati a d, æquale esse spatio quod æqui-

ponderat ſolido ſectionis c ſ r e, axe b a, perpendiculo plano x e b, ſuſtentaculo g l, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Ex corollario quintę tertij patet æquiponderans ſolido cuius ſectio ſit triangulum e ſ c, quod comprehenditur ſub parallelogrammi e c ſ r, lateribus e c, c s & ſub eiuſdem parallelogrammi diametro e s, eſſe beſſem æquiponderantis ſolido cuius ſectio eſt ipſum parallelogrammum: igitur ſolido ſectionis triangularis e c s æquiponderans eſt cylindraceum altitudinis e x, baſeos æquantis nouenam partem quadrati a d.

COROLLARIVM II.

Si in plano d u t a generetur quadratrix a T d y reſpondens ita quadranti circulari d u t a, vt libra grammicâ l d ſuſpenſâ ex a perpendiculo a t, brachio a l, ſicut l a ad a y quamcunque portionem rectæ a d, ita y u, parallela perpendiculo a t & dimetiens quadrantis d u t a, ſit ad y T dimetientem quadratricis, patet ad poſitionem plani P a b notum eſſe dicylindraceum genitum ex quadratrice a T d & ex figura d c b a; nempe cylindraceum altitudinis a d vel a l, baſeos æquantis ſextantem quadrati a d. Pro aliis verò caſibus (vt ſi non ſumeretur niſi dicylindraceum genitum ex partibus d c y, d T y) inueniri oporteret per præcedentem, ſpatium æquiponderans portioni cylindri inſiſtenti ſuper baſi e c d a, & inde deducendum ſpatium æquiponderans portioni cylindri eiuſdem inſiſtenti ſuper parallelogrammo c y a e, quod eſt inuentu facillimum ex vigeſimæ ſextæ quarti tetragoniſmicorum methodo.

PROPOSITIO XXVII.

MAneat (*Fig. 61.*) vt in ſuperiore figura d c b a, & quadrans circularis d u t a, parallelogrammúmque a l g b. Eſto d m n limbus partis ſuperioris ſemicycloideos magnæ, ita vt ad poſitionem rectæ a b dimetientes m c, y u ſint æquales, vt in prima primi libri oſtendimus. Intelligatur ex centro a excitari ad planum b a d perpendicularis a p, æqualis radio a d vel a t. Ad poſitionem plani p a b intelligatur dicylindraceum genitum ex figuris b c d a, d u t a vel d m n b c.

Oſtendendum eſt libræ planæ axe b a, perpendiculo plano p a b, ſuſtentaculo l g, æquiponderans iſti dicylindraceo eſſe cognitum, ſi, vbi opus fuerit, cognita ſit quadratura circuli.

Quoniam quadratum y m continet ex Euclidis elementis bis rectangulum m c y, & ſemel quadrata m c, c y; ſi habeantur æquiponderantia ſolidis quorum ſectiones parallelæ plano p a b ſunt quadrata m y, m c, c y, & ex æquiponderante ſolido quadrati m y auferantur æquiponderantia ſolidorum quorum ſectiones ſunt quadrata m c, c y, relinquetur (vt patet) duplum æquiponderantis ſolido, cuius ſectio eſt rectangulum m c y,

vel u y c. Vt eſt quadratum circulo circumſcriptum ad ipſum circulum, ita ponatur recta a p ad a r.

Peripherico igitur genito motu figuræ d m n a circa rectam a d, libræ planę axe b a, ſuſtentaculo l g, ęquiponderans, per decimam ſextam quarti & per corollarium tertium decimę nonę eiuſdem libri, eſt cylindraceum altitudinis a r, baſeos ęquantis quadrantem quadrati a b, auctum triente circuli genitoris ſemidiametro d a deſcripti, & imminutum quatuor nouenis quadrati a d: ergo per demonſtrata in decima nona primi, ſi loco peripherici ponatur dicylindraceum cuius ſectio eſt quadratum m y, ęquiponderans erit eiuſdem baſeos, ſed altitudinis a p vel a d.

Similiter peripherico genito motu figurę d c b a circa rectam a d, ex corollario vndecimę tertij & ex corollario tertio decimę nonę, ęquiponderat iiſdem poſitis cylindraceum altitudinis a r, baſeos ęquantis quadrantem quadrati a b, imminutum quadrante quadrati a d: ergo ſi loco peripherici ponatur dicylindraceum, cuius ſectio eſt quadratum m y, baſis erit eadem, ſed altitudo a p, vel a d.

Præterea quoniam dicylindraceum genitum ex figura d u t a, ad poſitionem plani p a t eſt *homœoſphæricum* definitum in corollario tertio decimę quartę quarti tetragoniſmicorum, planum parallelum plano p a t, incedens per grauitatis centrum, ita diuidit rectam d a in y, vt ſicut octonarius ad ternarium, ita ſit d a vel a l ad a y, vt ibidem oſtendimus: ex decima verò octaua eiuſdem libri conſtat eiuſmodi homœoſphęricum eſſe beſſem parallelepipedi, cuius baſis ſit quadratum a c vel a d, & altitudo ęqualis ipſi a t. Vt igitur l a recta ad a y rectam, hoc eſt vt octonarius ad ternarium, ita eſt ſuſpenſum homœoſphęricum, vel duo trientes parallelepipedi iam dicti, ad quadrantem eiuſdem parallelepipedi: ergo ęquiponderans eiuſmodi homœoſphęrico eſt parallelepipedum altitudinis a d, baſeos ęquantis quadrantem quadrati a t vel a d.

Duo igitur ęquiponderantia dicylindraceis, quorum ſectiones ſunt quadrata c y, y u vel c m, conflant ſimul quadrantem quadrati a b. Quoniam verò dicylindraceo, cuius ſectio eſt quadratum y m, ęquiponderans inuentum eſt ſuprà, ſi ex illo auferatur conflatum ex duobus poſtremis iam collectum, reſiduum fiet duplum ęquiponderantis dicylindraceo cuius ſectio eſt rectangulum m c y vel c y u, nempe cylindraceum altitudinis a d, baſeos æquantis trientem circuli ſemidiametro a d geniti imminutum quatuor nouenis quadrati a d. Igitur æquiponderans dicylindraceo genito ex figuris d m n a, d u t a, eſt cylindraceum altitudinis d a vel a p, baſeos æquantis ſextantem circuli ſemidiametro a d deſcripti, imminutum duabus nouenis quadrati a d: ergo ſi, vbi opus fuerit, cognita ſit quadratura circuli, notum quoque erit iſtud æquiponderans, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Methodus noſtra eſt generalis, ſi attentè res inſpiciatur, cùm propoſi-

tiones quibus illa nititur, vel ex elementis nostris vel ex præsenti Opere desumptæ, sint generales.

PROPOSITIO XXVIII.

Reuocato schemate propositionis vigesimæ sextæ (*Fig.* 60.) ostendendum est æquiponderans figuræ solidæ, cuius sectio parallela plano x e B est sector circularis e f x, esse cylindraceum altitudinis x e vel a d, baseos æquantis excessum quo basis cylindracei reperti in superiore, excedit basim cylindracei reperti in propositionis proximè ante superiorem demonstratæ corollario: ac proinde æquiponderans toti solido esse cylindraceum altitudinis e x vel d a, baseos æquantis sextantem circuli genitoris semidiametro a d descripti, imminutum tribus partibus nouenis, vel vno triente quadrati d a.

Propositio patet; nam figura c f x e est sectio dicylindracei geniti ex quadrante circulari d u t a & ex figura d c b a ad positionem plani x e b; isti verò dicylindraceo inuenimus in superiore propositione æquiponderans; in vigesimę sextę autem corollario reperimus æquiponderans solido cuius sectio est triangulum e c s: ergo per subductionem relinquitur æquiponderans solido cuius sectio est sector e f x, librę planę axe a b, perpendiculo plano x e b, sustentaculo l g: in casu autem assumpto calculus patet ex numerorum collatione: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIX.

Iisdem manentibus (*Fig.* 62.) ex recta b a abscissæ sint æquales b e, a g, & ex g excitata sit perpendicularis g q ad planum b a d, æqualis rectæ e x, vel a d; per g ducta sit g f o æquidistans rectæ a d, & occurrens rectæ D d in o, limbo b c d in f: centro g per o, q descriptus sit quadrans circularis o m q g, & per f ducta sit ordinatim applicata f m, completóque parallelogrammo g f m p, ducta sit eius diameter g m.

Ostendendum est sectorem inferiorem g o m esse æqualem sectori superiori f e x, ita vt arcus f x, o m sint æquales.

Istud patet, nam eo modo quo ostendimus arcum f x ęqualem arcui u t vel rectę b e, ostendemus arcum q m esse ęqualem arcui i t vel rectę b g: ergo cùm tota b a sit ęqualis arcui o m q, & pars b g sit ęqualis parti q m, residua o m erit ęqualis parti g a vel b e, cui cùm ęqualis sit arcus f x, patet arcum o m esse ęqualem arcui f x, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hinc apertè liquet solidum sectionis g o m esse ipsum sectionis f e x, sed subcontrariè positũ; vnde sequitur, quod ęquiponderat solido sectionis f e x, posito librę axe e g, perpendiculo plano x e g, ęquiponderare quoque solido sectionis o g m posito librę axe g o perpẽdiculo plano o g a, E con-

trario autem quod ęquiponderat solido sectionis o g m, librę axe e g, perpendiculo plano x e g, ęquiponderare solido sectionis s e x, librę planę axe B e, perpendiculo plano B e g. Patet quoque licet totum subcontrarium sit æquale toti solido primario cuius sectio est s e x; si tamen portio solidi subcontrarij posita inter plana plano B e x æquidistanter ducta per rectas b D, g o, sumatur, eiusmodi æqualitatem non seruari amplius; sed portionem subcontrarij esse illam primarij quæ iacet inter plana parallela ducta per rectas e c, a d.

DEFINITIONES.

Solidum sectionis s e x vocetur *scalarium*; ita enim illud gallicè appellauit Dettonuillæus, à scalarum cochleatim structarum similitudine nonnulla. Solidum, cuius sectio est o g m, vocetur *scalarium subcontrarium* scalarij primarij & absolutè dicti; ex centro a excitetur ad planum d a t perpendicularis a h æqualis ipsi a t, & centro a per d, h describatur quadrans circularis d z h a, qui vocetur *scalarij basis*; radius a d vocetur *primus*, radius a h, *postremus*. Intelligatur ex scalarij centro grauitatis demitti perpendicularis in basim, & cadere in punctum E, ex quo demittantur in radios a d, a h perpendiculares E A, E F. Vocetur E A *distantia à radio primo*, & E F *distantia à radio postremo*.

PROPOSITIO XXX.

Reuocato (*Fig.* 60.) schemate propositionis vigesimæ octauæ, scalario subcontrario ad positionem plani x e c æquiponderat axe a b, perpendiculo plano x e a, sustentaculo l g, cylindraceum altitudinis a b, baseos æquantis trientem quadrati a d deducto æquiponderante scalarij primarij reperto in propositione vigesima octaua.

Quoniam quadrans circularis x e B s est sectio cylindracei cuius altitudo est b a, basis verò est a d R P quadrans circularis illi æqualis, & similiter positus centro a descriptus; æquiponderans autem basi, librâ grammicâ l d suspensâ ex a perpendiculo a P, est per decimam octauam tertij tetragonismicorum, æquale trienti quadrati a d; æquiponderans cylindraceo altitudinis b a erit, per vigesimam quintam quarti libri tetragonismicorum, æquale cylindraceo altitudinis b a, baseos æquantis trientem quadrati a d. Igitur si inde auferatur æquiponderans scalarij cuius sectio est x e s, residuum fiet æquiponderans scalario subcontrario, quale erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Si non sumatur nisi cylindri portio intercepta inter plana x e B, P a d, æquiponderans illi, (vt ex methodo patet) erit cylindraceum altitudinis a c, baseos æquantis trientem quadrati a b.

COROLL.

COROLLARIVM II.

Ex corollario vigesimæ nonæ liquet æquiponderans hîc repertum, esse æquiponderans scalario, libræ planæ axe a d, perpendiculo plano d a t, sustentaculo distante interuallo rectæ a P, vel a d. Præterea æquiponderans repertum in vigesima octaua est cylindraceum altitudinis a P baseos æquantis sextantem circuli semidiametro a d geniti, imminutum tertia parte quadrati a d: cylindraceum verò altitudinis a b æquantis dimidium termini secundi progressionis adiunctæ, & baseos æquantis trientem quadrati a d, vel primi termini perspectæ progressionis, est per reciprocationis leges æquale cylindraceo altitudinis a d, baseos æquantis sextantem secundi termini perspectæ progressionis, qui est semicirculus semidiametro a d descriptus. Nam vt altitudo, siue primus adiunctæ, ad altitudinem, siue ad dimidium secundi adiunctæ; ita basis, siue triens primi perspectæ, ad basim, siue ad sextantem secundi perspectæ. Igitur æquiponderans scalario libræ planæ axe a d, perpendiculo plano d a t, sustentaculo distante distantiâ rectæ a P, est cylindraceum altitudinis a d, baseos æquantis tertiam partem quadrati a d.

PROPOSITIO XXXI.

Reuocetur schema propositionis vigesimæ primæ & vigesimæ secundæ quarti libri superioris (*Fig.* 42.)

Ostendendum est scalarium, cuius sectio parallela plano d g c est sector f h t, esse æquale dimidio cylindracei altitudinis g d vel gc, baseos blg: centrum verò grauitatis illius distare à scalarij basi g d e c, triente rectæ g b.

In illa propositione vigesima prima cùm ostenderimus ad positionem plani d g c solidum, cuius sectio est sector f h t, hoc est scalarium ita iam appellatum, esse æquale dimidio cylindracei vel prismatis, cuius basis est triangulum b g l, altitudo g d; patet scalarium esse æquale dimidio eiusmodi solidi, siue quadranti solidi cuius altitudo g d, basis quadratum g b. Centrum verò grauitatis esse in plano f h n ita diuidente rectam b g, vt g h sit triens totius g b, patet ex sexta quadraturæ parabolæ Archimedeæ: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Methodus præsens extenditur ad quamlibet portionem scalarij, vt ex illa vigesima prima liquet, abscissam plano parallelo ad basim d g c. Præterea quoniam g b est æqualis arcui c e d ex constructione, erit g h triens peripheriæ c e d, & vncia totius peripheriæ circuli geniti semidiametro g c. In aliis verò casibus illa distantia facilè ostendetur, cùm non oporteat inueniri nisi rectam parallelam rectæ g f, incedentem per centrum grauitatis trapezij l i h g, abscissi ex vna parte, vel trianguli b i h abscissi ex aliâ per planum f h n vtcunque ductum æquidistanter basi scalarij.

COROLLARIVM II.

Quadratum g b eſt quadrans tertij termini progreſſionis perſpectæ; primus enim eſt quadratum radij g c, ſecundus eſt ipſe circulus radio g c deſcriptus, ſiue rectangulum ſub radio & ſub dupla rectæ g b, hoc eſt, ſub recta æquante ſemiperipheriam eiuſdem circuli; illius ergo rectæ quadratum erit tertius terminus perſpectæ, ac proinde quadratum g b erit quadrans tertij perſpectæ; & ſolidum altiudinis g d, baſeos æquantis decimam ſextam partem tertij termini perſpectæ progreſſionis, erit æquale ſcalario integro.

PROPOSITIO XXXII.

REducto (*Fig.* 62.) ſchemate vigeſimæ nonæ, recta A E, quæ eſt diſtantia à primo radio baſeos ſcalarij, eſt ſexdecim trientes tertij termini progreſſionis ſubadiunctæ. Diſtantia verò E F ab extremo ſcalarij radio eſt octo trientes ſecundi termini ſubadiunctæ, deductis ſexdecim trientibus tertij termini ſubadiunctæ. Diſtantia denique centri eiuſdem à baſi ſcalarij eſt ſextans ſecundi termini ſubadiunctæ progreſſionis.

Ex rectis d a, h a abſcindantur a H, a G ipſis æquales. Igitur quoniam libræ planæ axe a d, perpendiculo plano d a t, ſuſtentaculo G m parallelo ad axem ipſum, æquiponderans ſcalario ſuſpenſo eſt per trigeſimæ corollarium ſecundum æquale cylindraceo altitudinis a h vel a d, baſeos æquantis trientem quadrati a d; ipſum autem ſcalarium ſuſpenſum, eſt per corollarium ſecundum trigeſimæ primæ, æquale cylindraceo eiuſdem altitudinis, baſeos æquantis decimam ſextam partem tertij termini perſpectæ progreſſionis; vt eſt ſuſpenſum ad æquiponderans, vel vt baſis cylindracei æqualis ſuſpenſo ad baſim cylindracei æqualis æquiponderanti (ſunt enim ambo eiuſdem altitudinis) ita recta G a ad a F vel A E: ergo vt decima ſexta pars tertij termini perſpectæ progreſſionis ad trientem primi, ita G a primus ſubadiunctæ ad ſexdecim trientes tertij termini ſubadiunctæ. Eſt ergo recta a F vel A E æqualis trientibus ſexdecim tertij termini ſubadiunctæ, quod erat vnum ex demonſtrandis.

Rurſus quoniam libræ planæ axe a t, perpendiculo plano h a t, ſuſtentaculo H N parallelo ad axem, æquiponderans ſcalario ſuſpenſo eſt, per vigeſimam octauam, æquale cylindraceo altitudinis a h, baſeos æquantis ſextantem ſecundi termini perſpectæ progreſſionis, imminutum triente primi termini; ipſum autem ſcalarium ſuſpenſum eſt æquale cylindraceo eiuſdem altitudinis, baſeos æquantis decimam ſextam partem tertij termini perſpectæ; vt eſt baſis iſtius ad baſim illius, ita erit recta H a ad a A, vel ad E F; ergo vt decima ſexta pars tertij termini perſpectæ ad ſextantem ſecundi eiuſdem perſpectæ, imminutum triente primi, ita eſt a H primus ſubadiunctæ ad a A, hoc eſt ad ſexdecim ſextantes, vel ad octo trientes ſecundi ſubadjunctæ, imminutos ſexdecim trientibus tertij;

ergo recta F E est octo trientes secundi termini subadiunctę, deductis sexdecim trientibus tertij termini, quod erat secundò demonstrandum. Tertia verò propositionis pars constat ex corollario primo trigesimæ primæ: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quoties suspensum diuiditur in duas partes æquales, & eodem axe brachióque inuenitur illis singulis suum æquiponderans, toties centri vnius ab axe, addita distantiæ centri alterius, conflant duplam distantiæ, qua ab eodem axe dissitum est centrum totius; id verò in præsenti calculo ita se habet. Nam cylindrus est altitudinis a d, baseos æquantis octantem tertij termini perspectę; æquiponderans verò illi est, per corollarium secundum trigesimæ, cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos æquantis sextantem secundi termini perspectæ. Vt igitur octans tertij perspectæ ad sextantem secundi eiusdem perspectæ; ita, axe b a, perpendiculo plano h a t, sustentaculo H N, brachium, siue primus terminus subadiunctæ, ad octo sextantes, vel quatuor trientes secundi subadiunctæ progressionis, siue ad distantiam grauitatis centri competentis cylindraceo baseos d z h a, altitudinis b a. Duę autem distantię A E, E F ęquant, vt ex calculo patet, octo trientes secundi termini subadiunctę: ergo in hoc rectè quadrat calculus illi proprietati initio huius corollarij positę.

COROLLARIVM II.

Quoniam duodecuplum decimæ sextæ partis est dodrans, vel duodecim decimæ sextæ partes; duodecuplum verò trientis est quadruplum assis, vel duodecim trientes: vt est decima sexta pars tertij termini perspectæ progressionis ad trientem primi termini; ita erit dodrans, vel tres quadrantes tertij termini, ad quadruplum primi: sed vt decima sexta pars tertij illius ad trientem primi; ita ostendimus esse radium G a vel a h ad A E distantiam primi radij: ergo vt tres quadrantes tertij termini perspectæ, ad quadruplum primi; ita est radius a d ad A E distantiam primi radij. Sed quadrans tertij termini perspectæ est æqualis quadrato rectæ a b vel peripheriæ d i t, vt ostendimus in corollario secundo trigesimæ primæ: ergo vt est triplum quadrati peripheriæ d i t, ad quadruplum quadrati a d; ita est radius a d ad distantiam A E. Dettonuillæus in epistola edita ad D. de Sluze agens de hoc scalario scripsit vt triplum quadrati peripheriæ d i t ad quadruplum quadrati a d, ita esse ipsum radium a d ad distantiam A E. Perspicis calculorum consonantiam omnimodam, ex quo mirum quantum confirmatur nostra methodus, imprimis verò calculus secundæ partis propositionis decimæ nonæ tertij libri quo vsi sumus in vigesima sexta, itémque calculus alter decimæ sextæ propositionis libri quarti, & calculus corollarij vndecimæ tertij, quos adhibuimus in vigesima septima superiore. Porrò calculus decimæ sextæ quarti exhibet æquiponderans dimidij solidi circa semiaxem superiorem geniti, libræ planæ axe posito ipso cycloideos magnæ axe, & distantiâ su-

ſtentaculi æquante radium. Inde verò per methodum in præſenti propoſitione vſurpatam, & ſæpius aliàs in calculo ſexdecim caſuum, obtinetur diſtantia centri grauitatis ab axe pro dimidio ſolido genito circa ſemiaxem ſuperiorem. Ejus tamen calculum vitioſum eſſe ſcripſit Autor Hiſtoriæ cycloideos, in ſua appendicula cuius mentionem iam fecimus ſub calcem libri prioris, & ampliorem adhuc facturi ſumus in propoſitione duodecima ſequentis libri. Si vitioſus eſt, non certè ex hoc capite; ſed neque, vti ſperamus, ex methodi labe aliqua occulta; ſin autem ex computandi ἀπροσεξεία, veniam huius errati non ſemel ſponte ſua ipſe obtulit in ſuis ad Europæ Geometras literis, quas ſub extremum librum quartum curauimus referri. Patet autem ex demonſtratis in nouem iſtis poſtremis de ſcalario propoſitionibus, pari methodo poſſe aſſignari centrum grauitatis pro quolibet ſegmento ſcalari, abſciſſo per planum baſi parallelum.

PROPOSITIO XXXIII.

Sint (*Fig* 63.) quatuor quæcunque lineæ rectæ b, c, d, a quarum tres b, c, d ſint proportionales; inter quartam a & primam b media proportionalis ſit f; media verò inter eandem quartam a & tertiam d ſit g.

Oſtendendum eſt vt ſe habet recta b ad c, ita eſſe rectam f ad g. Item vt ſe habet recta c ad f, ita eſſe rectam g ad a; ac proinde rectangulum ſub extremis c, a eſſe æquale rectangulo ſub mediis f, g.

Quoniam enim tres rectæ b, c, d ſunt proportionales, & rectangulum ſub rectis a, b comprehenſum ad rectangulum ſub rectis a & d contentum eſt vt baſis b ad baſim d; ipſis autem rectangulis a b, a d æqualia ſunt quadrata rectarum f, g; ergo vt recta b ad d, ita eſt quadratum f ad g: ſed vt b recta ad d, ita per 20. ſexti Euclidis in corollario, eſt quadratum b ad c; ergo vt quadratum b ad c, ita quadratum f, ad g; ergo vt recta b ad c, ita recta f ad g, quod erat vnum ex demonſtrandis.

Rurſus quoniam quadratum quod poteſt recta a, ad rectangulum comprehenſum ſub rectis a, b, ſe habet vt baſis a ad baſim b, ſunt enim eiuſdem altitudinis a: rectangulum autem ſub rectis a, d contentum ad rectangulum ſub b, d rectis ſe habet pariter vt baſis a ad b, cùm eorum eadem ſit altitudo d; ergo vt quadratum a ad rectangulum a b, hoc eſt ad quadratum f, ita ſe habet rectangulum a d, ſiue quadratum g, ad rectangulum b d, ſiue ad quadratum c; ergo vt quadratum a ad f, ita quadratum g ad c; ergo vt recta a ad f, ita recta g ad c; & alternando vt a ad g, ita f ad c; & inuertendo vt c ad f, ita g ad a, ac proinde rectangulum ſub rectis c, a, eſt æquale rectangulo ſub rectis f, g; quod erat alterum ex demonſtrandis.

COROLLARIVM I.

Quòd ſi tres rectæ b, c, d non ſint proportionales; inueniatur media

h inter b & d; atque vt h recta ad c, ita fiat recta g ad i. Patet ex demonstratis vt est recta b ad c, ita esse rectam f ad i, & vt est recta c ad f, ita esse rectam i ad a.

Quoniam enim ex antè demonstratis vt est recta b ad h, ita est recta f ad g, & vt est recta h ad c, ita ponitur recta g ad i; ergo ex æquo vt est recta b ad c, ita est recta f ad i. Item quoniam vt est recta c ad h, ita est recta i ad g, & vt h recta ad f, ita est g recta ad a; ergo ex æquo vt est c ad f, ita est i ad a.

COROLLARIVM II.

Quod si quatuor rectæ a, f, g, c sint proportionales, vt sicut est a ad b, ita sit g ad c; ostendetur tres rectas b, c, d esse proportionales. Nam rectangulum sub extremis a, c est æquale rectangulo sub mediis f, g. Rursus quoniam per lemma propositionis trigesimæ primæ decimi Euclidis, vt est recta f ad g, ita est quadratum rectæ f ad rectangulum f g, hoc est ad rectangulum a c; & vt est g ad f ita est quadratum g ad rectangulum g f, hoc est ad rectangulum a c; ergo tria spatia quadratum f, rectangulum f g, quadratum g sunt proportionalia; ergo cùm quadratis f, g æqualia sint rectangula a b, a d, tria rectangula a b, a c, a d sunt proportionalia, & eiusdem altitudinis a; ergo bases b, c, d sunt proportionales, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XXXIV.

ESto (*Fig.* 64.) quadratum i B t n, & parallelogrammum rectangulum i c d n; descriptus esto circulus z D E d c centro c, diametro z d; recta i c producta occurrat peripheriæ in D: libra z d suspensa ex c perpendiculo c D, brachio c z, descripta intelligatur quadratrix c u d respondens quadranti circulari D E d c, ita vt sicut brachium z c ad c p quamlibet portionem radij c d, ita E p ordinatim ad diametrum z d applicata se habeat ad p u dimetientem quadratricis. Compleatur parallelogrammum z c i o, & describatur parabola i r t, cuius axis i B, vertex i, tangens o i, ac proinde ordinatim applicata B t. Recta E p producta occurrat lineis i n, i r t, B t, in punctis q, r, s.

Ostendendum est rectam p u, esse æqualem sinui recto r H arcûs q H sumpti in circulo q H s diametri q s.

Rectæ o i, i q, q r sunt proportionales per duodecimam tertij tetragonismicorum; præterea ex tertia tertij tetragonismicorum media inter rectam s q & r s est ordinatim applicata p E; media autem inter s q, q r est, vt iam ostendimus, recta q i. Habemus ergo quatuor rectas primam s r, secundam H r; tertiam q r, quartam q s vel o i; media autem inter quartam q s & primam s r est E p, & media inter eandem quartam & tertiam q r est q i; ergo per superiorem, rectangulum sub r

H & sub o i est æquale rectangulo sub i q & sub p E comprehenso, hoc est, rectangulo c p E, nam c p, i q sunt æquales: sed rectangulo c p E est æquale rectangulum sub z c, & sub p u cùm ex generatione quadratricis vt brachium z c ad c p, ita sit p E ad p u, rectangulumque sub extremis z c, p u sit æquale rectangulo c p E sub mediis; ergo rectangulum contentum sub rectis z c, p u est æquale rectangulo contento sub rectis q s vel z c & sub r H: ergo rectæ p u, r H sunt æquales, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXV.

Isdem manentibus (*Fig.* 64.) ostendendum est arcum q H esse similem arcui duplo arcûs D E.

Radius z c bifariam secetur in A, & compleatur parallelogrammum A c i a: arcus D R sit duplus arcûs D E. Quoniam c p est æqualis sinui arcûs D E, rectangulum comprehensum sub sinu verso arcûs D R, & sub a i, erit æquale quadrato c p, vt demonstrat Clauius propositione quarta libelli sinuum: ergo rectangulum sub o i & sub dimidio sinus versi respondentis arcui D R, erit æquale quadrato c p: sed quadrato c p vel i q æquale est rectangulum contentum sub o i & sub q r: ergo q r est dimidium sinûs versi arcûs D R. Cùm igitur semicirculi z D d, q H s habeant diametros z d, q s in ratione dupla, sinus versus arcûs D R erit duplus sinûs versi competentis arcui simili sumpto in peripheria q H t; sed q r sinus versus arcûs q H est duplus sinûs versi attinentis ad arcum D R; ergo arcus q H est similis arcui D R, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVI.

Esto (*Fig.* 65.) semicycloides magna c d a b, cuius basis b c, axis b a æqualis diametro circuli genitòris b q a; ex c b producta abscindatur b z dupla ipsius a b, & fiat parabola a b z h cuius axis a b, ordinatim applicata b z, & latus rectum est rectæ a b quadruplum.

Ostendendum est quadratricem mixtam definitam sub finem decimæ sextæ propositionis, respondentem parallelogrammo mixto altitudinis æquantis rectam b a, librâ grammica u b a suspensa ex b perpendiculo b c, brachio b u æquante rectam b a, esse æqualem figuræ parabolicæ a h z b, ita vt ductâ quacunque d g parallela basi c b occurrente lineis a d c, a b, a h z in d, g, h, & per d, h actis d t, h r perpendicularibus ad c z, quadratrix respondens parallelogrammo mixto insistenti super arcu c d sit figura h z r, & reliqua a h r b respondeat parallelogrammo mixto quod insistit super curua d a.

Arcum a d esse æqualem rectæ g h, sumo ex inuentis Recentiorum Geometrarum, inter quos D. Vvren primus dicitur inuenisse integrum

arcum a d c esse duplum axis a b. De veritate autem huius assumpti nullus dubitare possum ex quo huius rei demonstrationem more antiquorum à Geometra celeberrimi nominis Tolosano subtilissimè elaboratam legi. Eo autem ita sumpto, cætera patent ex methodo simillima propositionis vigesimæ : ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Si compleatur parallelogrammum c b u l, ex Archimedeis de parabolę quadratura demonstratis patet parabolicæ figuræ a h z b, axe b z, sustentaculo u l æquiponderare rectanguli a b z quatuor decimas quintas, hoc est, quadrati a b octo decimas quintas, cùm recta b z sit dupla rectæ b a. Duplum igitur huius æquiponderantis erunt sexdecim decimæ quintæ partes quadrati a b. Ipsa autem figura a h z b est vt patet, duo trientes rectanguli a b z, vel quatuor trientes quadrati b a. Quòd si b g bifariam secetur in g, patet rectam b z ad g h esse potestate vt binarium ad vnitatem, siue vt rectam a b ad a g. Igitur portio a b r n est quinque trientes rectanguli a g h comprehensi sub semidiametro circuli genitoris a q b & sub recta g h quæ ad a b est potestate vt binarius ad vnitatem : & quæ ad semidiametrum circuli genitoris est potestate vt 8. ad 1.

PROPOSITIO XXXVII.

Esto vt in trigesima quarta, (*Fig. 64.*) b g i a pars superior semicycloideos paruæ cuius circulus generator sit i x o, diametro i o descriptus; tota verò semicycloides parua sit z b i o; completo parallelogrammo o i c z; ex c z abscindatur c d æqualis ipsi c z, & descripta concipiatur pars superior i h d c semicycloideos paruæ, cuius circulus genitor z D d descriptus sit diametro z d. Librâ z d suspensâ ex c, perpendiculo c D, brachio z c, intelligatur ita generari quadratrix c u d, vt sicut brachium z c ad c p, quamlibet portionem rectæ c d, sic E p ordinatim applicata ad generatoris diametrum z d, se habeat ad u p dimetientem quadratricis c u d p. Ista quadratrix intelligatur ad positionem rectæ i c transferri in curuam i h d illíque insistere ad partes c, & ita insistens esse figura i F d h, cuius hæc est proprietas vt quæcunque u p parallela rectæ c i ducatur occurrens limbo c u in u; rectæ i d in p; curuæ i F in F, & curuæ i h in h, dimetientes u p, F h sint æquales. Intelligatur denique semicirculus o x i similiter transferri in curuam z b i, vt z M i o sit semicycloides magna, cuius circulus genitor o x i.

Ostendendum est quæcunque y g ducatur parallela rectæ i c, secans rectam o i in y; occurrens limbo z b i in g; limbo z M i in M; si per g ducatur recta g h parallela rectæ o i, occurrens rectæ i c,

in l; limbo i h d in h: et per h ducatur h q æquidiſtans rectæ y g, occurrens limbo i F d in F: rectam M F connectentem, puncta M & F eſſe parallelam rectæ o i.

Intelligatur figura i n t B vt in trigeſima quinta: ergo recta h F vel p u eſt æqualis rectæ r H, ſiue ſinui recto arcûs q H ſimilis arcui D R, & ſumpti in circulo diametri q s vel o i, hoc eſt in circulo o x i. Præterea ex prima ſecundi libri propoſitione, recta i f eſt æqualis arcui D E, & eadem recta i f eſt æqualis arcui i m. Quoniam igitur peripheriæ ſunt vt diametri, tota i x o peripheria erit æqualis toti D E d; ergo vt D E ad quadrantem D E d peripheriæ circuli maioris, ita i m ad ſemiperipheriam i m x circuli minoris: ergo dimidium arcûs i m eſt ad i m x dimidium arcûs i x o, vt arcus D E ad D E d: igitur dimidium arcûs m i eſt ſimilis arcui D E: ergo cùm D E, E R ſint æquales, peripheriæ i m, D R erunt ſimiles: ſed peripheriæ q H, D R ſunt ſimiles per ſuperiorem trigeſimam quintam; ergo arcus i m, q H ſunt ſimiles; cúmque diametri o i, q s ſint æquales, erunt ipſi arcus i m, q H æquales: ergo recta y m eſt æqualis rectæ r H; ſed iſta eſt, per ſuperiorem trigeſimam quintam, æqualis rectæ p u, & rectæ p u eſt æqualis recta h F; ergo rectæ y m vel g M, & h F ſunt æquales: ergo cùm ſint etiam parallelæ, figura M g h F erit parallelogramma, ac proinde latera M F, g h æquidiſtabunt: ſed æquidiſtant o i, g h: igitur recta M F æquidiſtat rectæ o i, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Patet ex demonſtratis poſſe rem conuerti, nempe ſi limbi i M z, i F d ſecentur qualibet M F parallela ad rectam i o, & per M, G ducantur M y, F q occurrentes limbis i b z, i h d in g, h, iungatúrque recta g h; ipſam g h eſſe parallelam rectæ i o.

PROPOSITIO XXXVIII.

Iiſdem manentibus (*Fig.* 64.) ducatur quæcunque M F parallela baſi o i, occurrens limbis i M z, i F d in M, F, & rectæ i c in G.

Oſtendendum eſt tres rectas o i, G F, M G eſſe proportionales.

Quoniam z b i l c, ex vigeſima quarta huius libri, eſt figura ex ſinibus verſis comparata ad figuram i h d c, tres rectæ o i, f h, g f erunt proportionales per eandem propoſitionem; ſed duabus g f, f h æquales ſunt duæ M G, G F, ſingulæ ſingulis: ergo tres rectæ o i, G F, M G ſunt proportionales, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Completo parallelogrammo o z d n, recta M F producta occurrat lateribus o z, d n in S, N; patet ſemicycloidi magnæ i M z o, cuius generator circulus o x i, ita reſpondere figuram i F d n, vt ſi iſtius baſis i n ſecetur vtcunque in q, & per q ducatur recta q F parallela rectæ o z, occurrens limbo i F d in F, & per F agatur F M parallela baſi i n, occurrens

lineis

lineis i M z, o z in M, S, recta i q sit æqualis dimidio curuæ M i. Quoniam enim, per trigesimam sextam, curua M i est æqualis rectæ quæ media proportionalis sit inter quadruplam rectæ o i, & inter i y vel M G, dimidium curuæ M i, erit æqualis rectæ quæ media sit inter rectam o i totam & inter i y, quadratum enim dimidij illius est ad quadratum totius, vt vnitas ad quaternarium, prout ex elementis Euclideis notum est. Ergo cùm per præsentem tres rectæ o i, G F vel i q, & M G vel i y sint proportionales, patet rectam i q esse æqualem dimidio arcûs M i.

PROPOSITIO XXXIX.

Isdem manentibus (*Fig. 64.*) ex recta i n abscindatur n L ipsi æqualis, & completo parallelogrammo c i L V, figuræ i F d c fiat ad positionem rectæ c V proportionalis i P V c; ita vt, sicut est c d ad c V, siue vnitas ad binarium, ita G F quælibet parallela rectæ c d dimetiens figuræ i F d c, se habeat ad G P dimetientem figuræ i P V c.

Ostendendum est semicycloidi magnæ z M i o ita respondere figuram i P V L; vt quæcunque ducatur S Q parallela rectæ o i, occurrens lineis o z, z M i, i P V, V L in S, M, P, Q; si per P agatur P T perpendicularis ad i L, recta i T sit æqualis curuæ M i. Atque ita per definitiones decimæ sextæ; si ex i c auferatur i Y ipsi æqualis, librâ grammicâ Y c suspensâ ex i perpendiculo i o, brachio i Y, figura i P V L sit quadratrix mixta & expansa rectanguli mixti insistentis super arcu z M i, altitudinis æquantis rectam i Y. Eiusmodi verò rectangulum mixtum est portio superficiei curuæ solidi cylindracei recti insistentis super basi z M i o.

Quoniam rectis G F, G P æquales sunt i q, q T, sicut G P est dupla rectæ G F, ita i T erit dupla rectæ i q; sed M i, per corollarium superioris propositionis, est etiam dupla rectæ i q: ergo recta i T est æqualis curuę M i: ergo, per vigesimam propositionem, figura i P V L est quadratrix mixta expansa rectanguli mixti insistentis super arcu z M i, libræ brachio i Y, perpendiculo i L; ita vt parallelogrammo mixto quod super curua i M insistit, respondeat quadratrix expansa i P T; parallelogrammo verò mixto quod super curua M z insistit, respondeat T P V L, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Ex secundi libri tetragonismicorum decima quinta liquet, libræ grammicæ brachio i Y, perpendiculo i L, æquiponderans figuræ i P V L esse ad positionem rectæ i L condicta ratione duplum æquiponderantis figuræ i F d n; cùm illius dimetientes parallelæ perpendiculo i L sint duplæ dimetientium istius.

COROLLARIVM II.

Hæc quadratrix expanſa habet iſtam proprietatem, quæcunque ſit curua zMi cui parallelogrammum mixtum inſiſtit, vt portio eius quælibet VPQ, poſito libræ perpendiculo GQ, brachio æquante rectam Gc, & altitudine parallelogrammi mixti æquante pariter eandem Gc, ſit quadratrix mixta expanſa parallelogrammi mixti iam dicti. Id verò ita patet, vt ampliore explicatione non egeat.

COROLLARIVM III.

Eadem quadratrix expanſa integrè ſumpta eſt æqualis circulo genitori diametti zd, imminuto quatuor trientibus quadrati cd. Nam parallelogrammum cind eſt, ex Archimedeis de dimenſione circuli principiis, æquale dimidio circuli genitoris iam dicti; ipſa verò figura ihdc eſt æqualis quadrato cd, vt ex nona ſecundi liquet: ergo figura ihdn eſt ſemicirculus genitor imminutus quadrato cd; ſed figura iFdh, vel cudp, eſt per decimam octauam tertij tetragoniſmicorum æqualis trienti quadrati cd; ergo tota figura iFdn eſt æqualis ſemicirculo genitori, imminuto duobus trientibus quadrati cd. Cùm igitur figura iFdn ſit dimidium figuræ iPVL patet quod propoſitum fuit in præſenti corollario.

PROPOSITIO XL.

Esto bcda (*Fig. 66.*) quadrans circularis ex centro a deſcriptus; ſuper radio ba deſcriptum ſit quadratum bafe; ponatur fa axis parabolæ ela, & fe ordinatim ad illum applicata. Ex ba abſciſſa ſit ag ipſi æqualis, & librâ grammicâ gb ſuſpensâ ex a perpendiculo ad, brachio ag, intelligatur gigni quadratrix anbm, quam *ſemihederaceam* voco, reſpondens quadranti circulari; ita vt, ſicut brachium ga ad quamlibet am, ita mo ordinatim applicata ad diametrum gb ſit ad mn. Ex puncto a excitetur ap perpendicularis ad planum bad.

Oſtendendum eſt dicylindraceum ad poſitionem plani pad ad planum bad recti genitum ex figuris aleb, bcda eſſe condicta ratione æquale cuneato baſeos anbm, altitudinis aqeb; & quod vni æquiponderat axe ad, perpendiculo plano paf, æquiponderare alteri.

Quoniam vt ga ad am, ita ponitur mo ad mn, & ita, per duodecimam tertij tetragoniſmicorum, eſt qm dimetiens trianguli aeb, ad ml dimetientem figuræ parabolicæ aleb, erit vt qm ad ml, ita mo ad mn; ergo rectangulum ſub extremis qm, mn eſt æquale rectangulo ſub mediis ml, mo: ergo cuneatum genitum ex triangulo aeb & quadratrice anbm, eſt condicta ratione æquale dicylindraceo genito ex ceratoide

parabolica a l e b, & ex figura b c d: ergo per vndecimam quarti habent centrum grauitatis in eodem ad planum p a d parallelo; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quæcunque figura sit b c d a patet idem demonstrari, & quamuis a b e f non sit quadratum, sed latera e b, b a forent inæqualia, semper cuneatum genitum ex triangulo comprehenso sub lateribus a b, b e, & sub diametro a e, & ex quadratrice, erit æquale alteri dicylindraceo habebitque centrum grauitatis in eodem plano ad planum p a d parallelo; ac proinde idem erit vtrique æquiponderans spatium. Eadem porrò methodus idem probat si pro triangulo a e b, sumatur alia figura eiusque quadratrix pro figura a l e b.

PROPOSITIO XLI.

Maneat b c d a quadrans circularis, ostendendum est dicylindraceum genitum ex ceratoide parabolica e l a b & ex quadrante circulari b c d a ad positionem plani p a f, esse æquale cylindraceo altitudinis e b, baseos æquantis quadrantem figuræ b c d a totius, quando tota sumitur: vel si sumatur eius quælibet portio m o d a inter parallelas a d, m o, vel extra illas alia portio m o c b, esse cylindraceum altitudinis b e, baseos æquantis quadrantem figuræ m o d a, vel b c o m, auctum ex nota lege vel imminutum rectilineo cognito.

Intelligatur cylindraceum altitudinis b e baseos a n b, & semihederaceæ quadratrix altera a r b: ex corollario superioris liquet dicylindraceo genito ex triangulo e a b & ex semihederacea a n b, æquale condicta ratione esse cylindraceum genitum ex parallelogrammo f a b e, & ex quadratrice altera a r b; est enim triangulum a b e quadratrix parallelogrammi: ergo vt i m ad m n, ita q m ad m r; ideóque rectangulum sub extremis i m, m r est æquale rectangulo sub mediis q m, m n; ipsáque solida, quorum illa rectangula sunt sectiones, sunt inter se æqualia, & habent idem æquiponderans.

Rursus quoniam vt i m ad m q, ita m o ad m n; rectangulum sub extremis erit æquale rectangulo sub mediis: ergo solidum sectionis q m o, est æquale condicta ratione solido sectionis i m n, & habent idem æquiponderans. Quoniam verò cylindraceum altitudiinis i m, baseos a n b, habet æquiponderans cylindraceum eiusdem altitudinis, baseos a r b, quę est quadratrix baseos a n b (quadratariū enim spatium cylindracei eiusdem altitudinis, habet basim quadratricem baseos cylindracei: ergo cylindraceum altitudinis e b, baseos a r b, æquiponderat ad positionem plani p a f condicta ratione cylindraceo altitudinis b e, baseos a n b) igitur idem cylindraceum baseos a r b æquiponderat cuneato genito ex

triangulo aeb & ex b c d a. Præterea quoniam tres i m, m q, m l, sunt proportionales tribus o m, m n, m r (sunt enim i m, m q, m l proportionales in ratione rectæ g a ad am ; in eadem quoque ratione proportionales sunt ex generatione quadratricis, tres m o, m n, m r) ergo ex æquo vt i m ad m l, ita m o ad m r : ergo rectangulum sub extremis i m, m r, est æquale rectangulo sub mediis l m, m o. Igitur solidum genitum ex ceratoide a l e b & ex figura b c d a, est condicta ratione æquale cylindraceo altitudinis i m vel e b, baseos a r b m, quæ est quadratrix semihederaceæ.

Quadratricem autem secundam a r b reduci ad quadrantē totius figuræ b c d a, si tota sumatur, vel ad quadrantem figuræ m o d a, vel b c o m auctum vel imminutum certo quodam rectilineo, patet ex decima tertia primi libri, & ex corollario quarto decimæ quartæ tertij : ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quoniam cylindraceum altitudinis e b, baseos b c d a diuiditur in duo dicylindracea eiusdem baseos, quorum vnum habeat pro altitudine figuram ceratoidem e l a b, alterum figuram parabolicam e l a f, patet dicylindraceum genitum ex semisegmento parabolico e l a f ad positionem plani p a f, & ex figura b c d a, reduci ad solidum altitudinis e b cuius basis sint tres quadrantes figuræ b c d a, si totum sumatur: vel tres quadrantes figuræ condictæ a d o m, vel m o c b, aucti vel minuti cognito spatio.

COROLLARIVM II.

Ex vigesima octaua quarti tetragonismicorum liquet, si figura parabolica e l a f intelligatur ad positionem rectæ a d aptari limbo b c d, & libræ planæ ponatur axis a b, sustentaculum e f, æquiponderans parabolæ ita aptatæ esse æquale tribus quadrantibus condictis si tota suspendatur, vel auctis imminutisue certo rectilineo, si non suspendatur nisi secundum partem i l a f, vel e l i; nempe tribus illis quadrantibus auctis vel minutis, quos in superiore corollario collegimus. Eadem ratione si ceratoides figura a l e b intelligatur ita aptari eidem limbo b c d, æquiponderans erit quadrans condictus si suspendatur tota, vel quadrans condictus auctus minutúsque certo quodam rectilineo, si non suspendatur tota, sed ex parte, vt dictum fuit.

COROLLARIVM III.

In quinto nostrorum elementorum tradidimus principia vnde habeatur quadratrix secunda quadratricis respondentis hyperbolæ ; ex illis verò inuenitur, æquiponderans esse notum rectilineum imminutum tribus quadrantibus condictis, quando b g ponitur axis transuersus sectionum oppositarum centro a descriptarum, & f d axis rectus. Quod hîc obiter monemus ; nam isto corollario hîc opus nobis non est.

PROPOSITIO XLII.

Iisdem manentibus (*Fig. 66.*) ad poſitionem rectæ f a intelligantur per generationem continuam propagari quadratrices quarum radix ſit parallelogrammum b e f a, quamcunque rationem habeant latera b e, b a; prima verò quadratrix ſit triangulum b e a, ſecunda ceratoides parabolica a b e l, tertia a b e s, & ita ſine vllo certo fine procedatur; ita vt rectæ i m, m l, m s &c. ſint in continua progreſſione geometricâ.

Oſtendendum eſt in iſta ſerie graduum, quorum primus ſit parallelogrammum b e f a, notum eſſe ſpatium æquale ſingulis ex quatuor poſt primum conſequentibus.

Quoniam in decima ſexta propoſitione oſtendimus lineam a e eſſe rectam; patet triangulum a e b eſſe notum. Quoniam verò in duodecima tertij tetragoniſmicorum oſtendimus lineam a l e eſſe parabolæ limbum, cuius axis a f, tangens a b; liquet ex quadratura parabolæ notum eſſe gradum dimetientis l m. Præterea quoniā per demonſtrata ibidem initio quarti notum eſt grauitatis centrum quadratricis ſecundæ,& notum quoque rectilineum æquale ipſi quadratrici; ergo vt brachium g a ad longitudinem notam interceptam inter f a, & ipſi parallelam per grauitatis centrum ſecundę ductam, ita ſpatium ſecundæ notum ad ſpatium tertiæ; notum igitur eſt ſpatium dimetientis ſ m. Denique completo parallelogrammo b a d A, intelligantur ad poſitionem rectæ a d, tres gradus quorum primus ſit parallelogrammum a f e b, ſecundus ceratoides parabolica b a l e, tertius figura A B d z, inſiſtens ſuper recta A d; igitur per vigeſimam octauam quarti tetragoniſcorum, figuræ a l e b vt iacet manenti, axe a b, ſuſtentaculo d A, æquiponderat condicta ratione dimidium figuræ d B A z aptatum ſuſtentaculo d A. Igitur cùm figura a b e l ſit æqualis rectilineo noto & cùm eiuſdem figuræ centrum grauitatis ſit notum ex parabolæ quadraturâ, notum erit æquiponderans illi eidem figuræ axe a b, ſuſtentaculo d A: ergo figuræ d B A z, æquale rectilineum eſt cognitum. Rurſus quoniam vt i m ad m q, ita eſt m q ad l m, & ita eſt l m ad ſ m, & ſ m ad dimetientem quinti gradus; dimetientes primi, tertij, & quinti erunt proportionales; atqui dimetiens primi eſt m z, tertij m l; ergo cùm m z, m l, & z B ſint proportionales, erit z B dimetiens quinti gradûs. Igitur quatuor gradus nempe ſecundus,tertius,quartus, quintus ſunt ſinguli æquales rectilineo noto, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Primam quadratricem a q e b eſſe dimidium rectanguli parallelogrāmi a f e b, patet ex eo quod a q e limbus quadratricis ſit diameter eiuſdem parallelogrammi. Secundam quadratricem, ſiue tertium gradum,

esse trientem eiusdem rectanguli patet ex quarti tetragonismicorum prima, & ex quadratura parabolæ Archimedea. Tertiam quadratricem, siue gradum quartum, esse quadrantem eiusdem rectanguli ita ostenditur. Ex corollario quarto primæ propositionis quarti libri tetragonismicorũ recta l m incedens per centrum grauitatis tertij gradûs a l e b, ita secat rectam a b, vt a b vel g a sit ad a m, sicut quaternarius ad ternarium; ergo quartus gradus a s e b est tres quadrantes tertij a l e b: sed tertius est triens vel quatuor vnciæ parallelogrammi a f e d; ergo quartus est tres vnciæ, vel quadrans eiusdem parallelogrammi rectanguli. Denique quintum gradum esse partem quintam eiusdem rectanguli; demonstratur hoc pacto. Si recta a f secetur bifariam in E, centrum grauitatis parallelogrammi a f e b erit in parallelâ ad rectam a b, ductâ per E; & si f G recta ponatur duæ quintæ, vel quatuor decimæ partes totius f a, centrum grauitatis figuræ a l e f erit in recta per G ducta æquidistanter rectæ a b, per corollarium quintum primæ quarti tetragonismicorum. Cùm ergo totum f a b e diuidatur in duas partes e l a f, e l a b, quarum illa est dupla istius, si E H abscissa ex recta E a sit dupla rectæ E G, hoc est si E H sit duæ decimæ partes rectæ f a, centrum grauitatis partis a l e b erit per reciprocationis legem, quam libra præscribit, in recta per H ducta æquidistanter rectæ a b. Præterea quoniam a d vel a f est ad a H vt denarius ad ternarium, pars autem a l e b est triens parallelogrammi a f e b, æquiponderans isti parti axe a b, sustentaculo d A, erit tres decimæ partes illius trientis, hoc est, erit vna decima pars rectanguli a f e b; ergo cùm duplum huius æquiponderantis sit quarta quadratrix, vel quintus gradus, patet istum quintum gradum esse quintam partem rectanguli a f e b. Hinc patet gradus istos ad primum comparatos esse vt vnitatem ad numerum sedis quam in illa serie occupant, hoc est secundum esse ad primum vt vnitatem ad binarium; tertium, vt vnitatem ad ternarium; quartum, vt vnitatem ad quaternarium; quintum vt vnitatem ad quinarum; quod de consequentibus singulis gradibus esse verum constabit ex mox demonstrandis: quamuis enim iis non egeamus in præsens, quia tamen illa iamdiu à nobis parata sunt, & huc solum transferanda sunt ex libro vbi alias gaduum series pari pacto demonstramus, non iniucundum id fore Lectori speramus. Hinc porrò liquet si recta i m parallela perpendiculo a d incedat per grauitatis centrum primi gradûs; rectam a m esse dimidium ctæ a b; si per centrum secundi, ipsam a m esse duos trientes ipsius a b; si per centrum tertij, esse tres quadrantes; si per centrum quarti, esse quatuor quintas; ita vt b m pro primo gradu sit dimidium, pro secundo triens, pro tertio quadrans, pro quarto quinta pars, qui progressus pergit in infinitum, si graduum ratio progrediatur, vti diximus.

PROPOSITIO XLIII.

ESto (*Fig.* 67.) quadratum b a d e, & ex puncto a excitata sit a c perpendicularis ad planum b a d e, æqualis lateri ba: completo quadrato b a c t, intelligatur describi graduum series suprà exposita, quorum primus sit quadratum b a c t, secundus sit triangulum comprehensum lateribus b a, a c, & diametro b c; tertius sit ceratoides parabolica comprehensa arcu parabolæ quam tangat in b recta b a, & cuius axis sit b t: & sic deinceps, ita vt graduum istorum consequens sit quadratrix figura antecedentis, brachio p b æquante latus b a, & perpendiculo b t. In illa seria *numerus gradualis* appelletur ille quo sedes cuiúsque gradus designatur, initio ducto à primi, siue quadrati b a c t, sede primâ. Intelligatur quicunque gradus b a c m, & ad positionem plani t b a, ex illo gradu & ex quadrato b a d e intelligatur gigni dicylindraceum, ita vt (si in recta b a sumatur quodcunque punctum n, & per illud ducatur n m parallela rectæ c a, limbo gradûs b m c a designati occurrens in m; item recta n g ducatur complens parallelogrammum n g e b, & recta m g) triangulum n m g sit dimidium illius parallelogrammi, quod erit sectio dicylindracei & plani per n ducti æquidistanter plano t b e. Per a & e agatur diameter a e, occurrens rectæ n g in f: super lateribus b e, d e construantur quadrata b p A e, e d u z: per f ducta sit f h complens parallelogrammum a b h i; per i ducta sit i l recta parallela lateri a c, trianguli c a d. Solidum illud cuius sectiones parallelæ plano t b e sunt triangula n m g, a c d, vocetur *semidicylindraceum*. Isti semicylindraceo & plano c a e sectio communis vocetur *septum medium*, quod ad positionem plani b a c intelligatur transferri in planum p b e, & ita insistere rectæ b e, vt septi dimetiens λ f, perpendicularis ad planum b a d e excitata ex puncto f, sit æqualis dimetienti D h sectionis translatæ e b p D. Intelligatur figura e g d u s, cuius dimetiens g s parallela rectæ d u se habeat ad λ f, sicut f g ad g B, vel e z.

Ostendendum est, si septum medium transferatur ad positionem plani t b e in planum d e z, generetque figuram d e F u; & si, recta a e manente, circumuoluatur rectilineum a p A e, lineam e D p congruere lineæ e F u, punctúmque D puncto F; & in serie illa graduum, post gradum b a c m proximè sequi gradum d e F u, & post d e F u gradum d e s u.

Vt est recta c a ad m n, ita esse l i ad λ f ostenditur methodo quam adhibuimus pro simili causa in quarti libri propositione prima. Præterea

quoniam b n, g e latera parallelogrammi b n g e ſunt æqualia, itémque e g, g f latera quadrati e g f h; rectæ b n, g f, h f erunt æquales: igitur vt p b ad b n, ita eſt g n ad g f, & ita eſt p b ad h f; ita verò quoque eſt mn dimetiens gradûs aſſumpti, ad dimetientem proximè conſequentis. Cùm igitur in triangulo g n m lateri m n æquidiſtet λ f; vt eſt g n ad g f, ita erit m n ad λ f, vel g F; ſed ita etiam eſt eadem m n ad dimetientem proximè ſequentis gradûs; ergo λ f vel g F eſt dimetiens gradûs proximè ſequentis poſt aſſumptum. Præterea quoniam anguli a e b, a e d in quadrato b a d e ſunt æquales; recta b e, peractâ circumuolutione, congruet rectæ e d, punctúmque h puncto g, cùm e h, e g ſint æquales; & punctum D puncto F, cùm h D, g F ſingulæ, ſint æquales rectæ λ f; & h D, g F ſint perpendiculares ad rectas b e, e d. Igitur figuræ b p D e, d e F u ſibi mutuò congruunt poſt tranſlationem, ideóque ſunt æquales ſingulæ gradui proximè ſequenti poſt aſſumptum.

Præterea quoniam vt g n ad g f, hoc eſt vt a b ad b n, ita ponitur λ f ad g s; & vt a b ad b n, ita ex generatione quadratricum conſtituentium hos gradus, eſt ſuperioris dimetiens ad ſequentis dimetientem, patet g s eſſe dimetientem gradûs qui ſequitur poſt gradum dimetientis g F. Ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Quoniam vt n g ad g f, ita ex conſtructione eſt λ f ad f g, patet rectangulum λ f g comprehenſum ſub mediis eſſe æquale rectangulo g s comprehenſo ſub extremis, ac proinde cylindraceum altitudinis g n baſeos d e f u, eſſe condicta ratione æquale dicylindraceo ad poſitionem plani t b e genito ex triangulo a e d, & ex ſepto medio; vel eſſe æquale duplo portionis ſemicylindracei, interceptæ inter plana c a d, c a e.

COROLLARIVM II.

Ex demonſtratis liquet figuram h f λ eſſe ad triangulum g f λ, vt eſt figura b a c m ad triangulum c d a. Eſt enim h f g e quadratum, & ſuper latere h f conſtructum intelligitur parallelogrammum h f λ, in quo intelligitur ſeries graduum quorum primus eſt parallelogrammum h f λ, ſecundus triangulum h f λ: ergo cùm vt parallelogrammum b a c, ſiue primus gradus, ad triangulum b a c, ſiue ad ſecundum gradum, ita in alia ſerie ſit parallelogrammum h f λ ad triangulum h f λ; patet eandem eſſe vtrobique rationem dimetientium in gradibus; ergo cùm reſpectu quadrati h f g e, figura h f λ habeat numerum eundem gradualem quem habet figura b a c m in ordine ad quadratum b a d e; patet vt eſt b a c m ad c a d triangulum, ita eſſe h f λ ad triangulum λ f g. Igitur cùm poſt conuerſionem recta h f congruat rectæ f g, & planum h f λ ſit in plano g f λ, idque eueniat perpetuâ lege, vbicunque inter a & e iaceat punctum f; patet ſolidum cuius ſectio eſt figura h f λ, eſſe ad ſolidum cuius ſectio eſt triangulum λ f g, hoc eſt, ad ſemidicylindraceum, vt eſt figura b a c m ad triangulum c d a.

PROP.

PROPOSITIO XLIV.

IIsdem manentibus (*Fig.* 67.) gradus quiſque in illa ſerie integrè ſumptus inter parallelas b e, a d, eſt ad primum gradum b a c t vt vnitas ad numerum gradualem illiuſmet gradûs.

Sit quilibet gradus C à primo diuerſus,& vnus ex quatuor quorum tetragoniſmum dedimus in corollario quadrageſimæ ſecundæ ; proximè antecedens ſit B ; cuius numerus gradualis ſit E. Dico proximè ſequentem D eſſe ad rectangulum b a c t, vt eſt vnitas ad compoſitum numerum ex binario & ex E ; vel vt eſt vnitas ad numerum gradualem gradûs C auctum vnitate ; vel vt eſt vnitas ad numerum gradualem ipſius D.

Quoniam ſectio b a c m eſt vnus gradus ex quinque quos in corollario quadrageſimæ ſecundæ oſtendimus habere illam proprietatem, quam in præſenti extendere volumus ad conſequentes omnes eiuſdem ſeriei & ordinis ; ſectio b a c m erit ad primum gradum b a c t, vt vnitas ad numerum E eiuſdem b a c m gradualem. Triangulum verò rectilineum d a c, cùm ſit ſectio ſemicylindracei, eſt ad rectangulum c a d, vel c a b, vt vnitas ad binarium.Quoniam,vt ex corollario ſecundo ſuperioris liquet,portio ſemicylindracei triangulo b a e ad poſitionem plani c a b inſiſtens eſt ad ſemidicylindracei portionem inſiſtentem ſuper triangulo a d e, vt eſt figura b a c m ad triangulum c d a ; compoſitum ex duobus ſolidis iam dictis, ad portionem ſemidicylindracei iam dictam habebit porportionem quam duæ ſimul figuræ b a c m, c d a habent ad c d a. Cùm igitur b a c m ſit minutia primi gradûs b a c t, habens pro numeratore vnitatem, pro denominatore numerum E, & cùm d c a ſit minutia primi gradûs habens pro numeratore vnitatem, pro denominatore binarium, patet has minutias reductas ad communem denominatorem 2. E,eſſe inter ſe vt numeratores E & 2. Igitur duæ ſimul bacm & d c a ſunt ad d c a vt † E † 2. eſt ad † E. Igitur totum ſemidicylindraceum ad portionem inſiſtentem ſuper triangulo a e d, eſt vt † E † 2, ad † E : ac proinde portio inſiſtens ſuper triangulo a e d eſt totius ſemidicylindracei minutia cuius numerator eſt † E ; denominator verò eſt † E † 2. Semidicylindraceum autem eſt æquale cylindraceo altitudinis a b, baſeos quæ ſit trianguli c a d minutia habens pro numeratore vnitatem, pro denominatore numerum E ; ſicuti b a c m ſectio illius ſolidi ad parallelogrammum b a c t, quæ eſt ſectio totius ſemidicylindracei, eſt vt vnitas ad numerum E ; vt autem ſectio b a c m ad parallelogrammum b a c t, ita h i l λ ſectio, ad parallelogrammum h i l; ergo vt ex 28. quarti tetragoniſmicorum liquet, totum ſemicylindraceum eſt ad cylindraceum altitudinis a b, baſeos c d a, vt eſt ſectio b a c m ad parallelogrammum b a c, vel vt vnitas ad numerum E.

Rurſus quia per corollarium primum ſuperioris portio ſemidicylindracei inſiſtens ſuper triangulo a e d, ſi conuertatur in cylindraceum altitudinis e d, dat baſim quæ eſt dimidium gradûs D quæſiti ; cylindra-

ceũ,cuius altitudo d e, basis ponatur rectanguli d a c minutia habens pro numeratore vnitatem, pro denominatore numerum E, erit cylindraceum altitudinis d e; baseos æquantis quadratricem D. Minutia autem minutiæ habetur ex ductu numeratoris in numeratorem, & denominatoris in denominatorem; ergo illa minutia est rectanguli d a c, siue primi gradûs, minutia habens pro numeratore numerum E, pro denominatore numerum † E E † 2. E; hoc est, numeratorem & denominatorem partiendo per numerum E, habens pro numeratore vnitatem, pro denominatore numerum E auctum binario, quæ est minutia proposita; cùm ergo hæc minutia sit gradus quæsitus D, vt ostendimus, patet gradum D esse ad primum vt est vnitas ad numerum gradualem ipsius D.

Si igitur gradus C sit quintus ex inuentis in corollario primo superioris; erit D sextus, habebitque proprietatem propositam. Rursus si C ponatur esse sextus, erit D septimus &c. in infinitum; ergo qulibet gradus in ista serie infra primum sumptus, est ad primum vt vnitas ad numerum gradualem ipsius, quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Tres superiores propositiones huc transtulimus ex libro manuscripto vbi (*vt in fronte eius exaratum extat*) series quadratricum primi præsertim & secundi ordinis propagatur in infinitum, & traditur quadratura graduum absoluta in primo ordine: in secundo quoque, eorum, qui sedes numero pares occupant; eorum autem qui sedes numero impares obtinent, traditur quadratura hac conditione, vt nota priùs sit quadratura ipsa circuli & hyperbolæ. *Primi ordinis quadratrices eas appello quas hîc demonstratas habes; secundi ordinis eas in quibus* (Fig. *66.*) *primus gradus est figura comprehensa sub arcu circuli vel hyperbolæ centro a, axe b g descriptorum; sub semiaxe a b producto, si opus fuerit; & sub semiaxe a d coniugato, vel sub parallelis ad ipsum: secundus autem gradus est quadratrix illi primo respondens axe g b, perpendiculo a d, brachio a g; istum secundum gradum iam olim appello semihederaceam, eò quòd apud Proclum non multùm absimilem figuram legerim* κισσοειδῆ *dictam. Primum autem appellaui ordinem illum, quem hoc loco demonstrauimus, propterea quod primus ille videatur esse in quem incurrit Geometra istarum rerum indagator; nam inter figuras rectilineas parallelogramma videtur primum locum tenere, secundus verò huius ordinis gradus generationem habet perspicuam, cùm eius linea quadratrix sit ipsius parallelogrammi diameter a e. Vnde infero aliarum figurarum quadratrices lineas esse earum veluti diametros, gignuntur enim eadem prorsus lege, qua diameter in parallelogrammo, & quoties centrum grauitatis distat à puncto suspensionis a, interuallo æquante dimidium brachij a g, bipartitur ipsam figuram. Ita si ponas arcum b n a esse semicirculum diametro b a descriptum, eius prima quadratrix genita brachio g a, perpendiculo a d, diuidet bifariam ipsum semicirculum; vnde & diametri effectum quasi primarium consequetur. Nam diametrum Aristoteles in problematum sectione decima quinta dictam vult ex eo quod* μετρούμενον (*ita enim appellat rectilineum a b e f comparatum ad rectam a e*) *bifariam secetur per ipsam: verba illius hæc sunt* ἢ ὅτι διάμετρος δίχα διαιρεῖ, καθά-

περ τοὔνομα ὑποσημαίνει, an quod diameter bifariam secat, sicut & nomen ipsum subindicat. *sed quo pacto (vt hoc obiter inquiramus) id subindicat? In Ethic. quidem cap. 4. lib. 5.* δικαστὴν, iudicem *vult dictum quasi* διχαστὴν, bipartitorem *interpretati liceat : an ergo simili originatione* διάμετρος *appellabitur quasi* διχάμετρος bipertiens? *Attamen quoniam ista nominis explanatio longiùs petita & improbabilis videtur, planiùs dixeris* διάμετρον *componi ex particula ipsa* διὰ, *quæ Eustathio teste Iliad. γ. pag.* 800. *lin.* 19. διχασμὸν diuisionem in duas æquas partes *sæpe innuit. Cæterum cùm Archimedes lineæ illi quam* quadratricem *nominamus nomen non indiderit, & cùm potuisset vt ex dictis patet non incongruè appellari* diameter; *vt illius peruulgatæ vocis vim significandi non extenderemus,* quadratricis *nomen assumpsimus, postquam legimus in Proclo Hippiam scripsisse de lineis* τετραγωνιζούσαις. *Porrò eadem* quadratricis *voce aliquoties designo lineam, aliquando verò figuram, quod satis ex aliis adiunctis liquet, & quod in sectionibus conicis passim vsurpari absque vlla rerum confusione video.*

PROPOSITIO XLV.

Iisdem manentibus vt in quadragesima (*Fig. 66.*) ostendendum est quadratrici a n b vt iacet manenti, axe a b, sustentaculo f e, æquiponderare quindecimam partem quadrati f a b e.

Intelligatur ad positionem rectæ f a ipsa figura b c d a aptari limbo a n b, & figuræ e l a f prima quadratrix brachio g a, perpendiculo a f genita aptari quoque sustentaculo f e; ergo cùm vt i m recta ad m o, ita per tertiam tertij tetragonismicorum sit ipsa m o ad i l, & vt m o ad m n dimetientem quadratricis suæ, ita sit i l ad dimetientem quadratricis suæ, erit ex æquo vt i m ad m n, ita mo ad dimetientem quadratricis primæ respondentis figuræ e l a f: & alternando vt i m ad m o, ita m n ad dimetientẽ primæ illiusquadratricis: sed vt m o ad m n, ita est dimetiens primæ quadratricis respondentis figuræ e l a f, ad dimetientem secundæ quadratricis respondentis eidem figuræ; ergo alternando vt m o ad dimetientem primæ quadratricis illius, ita m n ad dimetientem secundæ: sed ita etiam ostendimus esse i m ad m n: ergo vt i m ad m n, ita est ipsa m n ad dimetientem secundæ illius quadratricis. Igitur sicut in corollario quarto octauæ libri tertij ostendimus pro simili causâ, dimidium secundæ istius quadratricis aptatum sustentaculo f e, axe a b, ad positionem rectæ f a condicta ratione æquiponderat figuræ a n b.

Restat vt ostendamus dimidium huius quadratricis esse decimam quintam partem quadrati a b, vel f a. Id verò ita ostenditur; libra g b suspensâ ex a, perpendiculo a f, brachio a g, quadratrix figuræ a b e l, siue tertij gradûs ordinis primi, est quartus eiusdem; quadratrix autem toti quadrato a b e f, est secundus gradus ordinis eiusdem: ergo si ex æquiponderante totius auferatur æquiponderans partis e l a b, restabit æquiponderans alterius partis e l a f, nempe secundus gradus primi ordinis imminutus quarto eiusdem ordinis. Sed vt primus ad secundum, ita est

ſecundus addititius ad tertium addititium, & ita quoque eſt quartus ablatiuus ad quintum ablatiuum: ergo ſecundus gradus primi ordinis imminutus quarto, habet pro quadratrice tertium gradum, imminutum quinto. Igitur quadratrix illa ſecunda eſt tertius imminutus quinto: ſed tertius eſt triens, quintus eſt quinta pars quadrati f e b a: ergo ſecunda quadratix eſt duæ decimæ quintæ partes quadrati e f a b: ergo dimidium illius eſt decima quinta pars quadrati e f a b, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Cùm iſtorum graduum, & eorum partium quadratura nota ſit, notum quoque erit, vt patet, dimidium tertij gradûs ex parte ſumpti imminutum quinti parte inter eaſdem ad rectam h g parallelas ſumptâ: hoc eſt notum erit æquiponderans portioni figuræ a n b m inter eaſdem parallelas deſignatæ.

PROPOSITIO XLVI.

Iiſdem vt in trigeſima nona manentibus (*Fig. 64.*) libræ planæ axe i L, ſuſtentaculo B t, oſtendendum toti figuræ i P V L æquiponderans eſſe quadrantem tertij termini perſpectæ progreſſionis, auctum triente ſecundi, & imminutum ſeptemdecim nouenis primi termini, ſiue quadrati c d.

Ex corollario primo ſeptimæ tertij libri ſemicuneo expãſo c i h d, cuius circulus genitor z D d, axe i n, ſuſtentaculo B t, æquiponderans eſt æquale quadrato c d. Parallelogrammo i c d n, ex eodem corollario, æquiponderat dimidium quadrati i c, ſiue quadrantis termini tertij progreſſionis perſpectæ: ergo figuræ i h d n æquiponderat octaua pars tertij termini perſpectæ, imminuta quadrato c d. Præterea ex vigeſimæ ſextæ corollario ſecundo dicylindraceum genitum ex figura c u d p, vel i F d h, & ex c d h i, ad poſitionem rectæ c i eſt æquale cylindraceo altitudinis B i, baſeos æquantis ſextantem quadrati c d: cylindraceum autem cuius altitudo i c, baſis c u d p (quæ eſt triens quadrati c d, vt ex decima octaua tertij tetragoniſmicorum liquet) eſt per reciprocationis leges æquale cylindraceo altitudinis c d, cuius baſis ſit ad c u d p, vel ad trientem quadrati c d, vt eſt i c dimidium ſecundi termini adiunctæ, ad c d radium, ſiue ad primum terminum adiunctæ. Sed vt ſecundus terminus adiunctæ ad primum, ita eſt ſecundus perſpectæ, ſiue circulus diametri z d, ad primum, ſiue ad quadratum c d: ergo cylindraceo baſeos c u d p, altitudinis c i eſt æquale cylindraceum altitudinis c d, baſeos æquantis ſextantem ſemicirculi genitoris. Igitur ſi ex hoc cylindraceo altitudinis c d dematur aliud eiuſdem altitudinis, baſeos æquantis ſextantem quadrati c d, relinquetur cylindraceum altitudinis c d, baſeos æquantis ſextantem circuli genitoris diametro z d deſcripti, imminutum ſextante quadrati c d. Denique ex trigeſima tertia conſtat æquiponderans figuræ c u d p axe c d, ſuſtentaculo G N, ita vt recta c G æquet radium c D, eſſe decimam

quintam partem quadrati c d. Cùm igitur æquiponderans figuræ ſuper axe inſiſtentis ſit dimidium tertij gradûs expoſiti & demonſtrati in corollario quarto octauæ tertij libri; patet tertium gradum ad poſitionem rectæ i c, quorum primus ſit quadratum B i n t, ſecundus i h d n, eſſe quadrantem tertij termini perſpectæ, imminutum duplo quadrati c d: tertium verò gradum cuius primus ſit idem quadratum B i n t, ſecundus figura c u d p vel i F d h, eſſe duas decimas quintas partes quadrati c d. Quoniam igitur ex methodo decimæ tertiæ libri quarti, ſi in vnum conferantur tertius ille vterque gradus, vnà cum baſi cylindracei altitudinis c d, quod æquale inuenimus dicylindraceo ſectionis F h q, dimidium illius conflati, eſt æquiponderans figuræ i F d n vt iacet manenti, axe i n, ſuſtentaculo B t; patet æquiponderans iſtud eſſe octauam tertij termini perſpectæ progreſſionis, auctam ſextante ſecundi, & imminutam ſeptemdecim decimis octauis primi, ſiue quadrati c d.

Quoniam igitur per corollarium primum trigeſimæ nonæ æquiponderans figuræ i P V L eſt duplum æquiponderantis figuræ i F d n, patet axe i L, ſuſtentaculo B t æquiponderans figuræ i P V L vt iacet manenti eſſe quadrantem tertij termini perſpectæ progreſſionis, auctum triente ſecundi, & imminutum ſeptemdecim nouenis primi, ſiue quadrati d c, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Duplum igitur huius æquiponderantis, ſiue tertius gradus reſpondens figuræ i P V L ad poſitionem rectæ i c, poſito primo i B t n, & ſecundo ipsâ i P V L, eſt dimidium tertij termini perſpectæ progreſſionis, auctum beſſe ſecundi, & imminutum triginta quatuor nouenis partibus primi termini, ſiue quadrati d c.

PROPOSITIO XLVII.

ESto vt in trigeſimâ ſextâ (*Fig.* 65.) ſemicycloides magna c d a b genita circulo a q b, diametri a b; ex c b abſciſſa ſit b z dupla rectæ a b, & deſcripta ſit parabola a h z, cuius axis a b, ordinatim applicata b z, quam in illa trigeſima ſexta oſtendimus eſſe quadratricem mixtam parallelogrammi mixti inſiſtentis ſuper arcu c d a prædiṫi altitudine d s æquante rectam b a vel b u, genitam libræ brachio b u perpendiculo b c. Eſto paræterea figura b i f z cuius latus z f æquet ſemicycloideos baſim c b: ipſa autem ſit quadratrix mixta in ſuperiore propoſitione demonſtrata, reſpondens eidem parallelogrammo mixto, ſed genita libræ brachio b r æquante rectam b a, & perpendiculo b a. Intelligatur ex iſtis figuris ſubcontrariè poſitis gigni dicylindraceum ad poſitionem plani f d t, (ſicuti in ſimillimo caſu intelligi oportuit in vigeſima ſecunda propoſitione) altitudinis bu, baſeos b m z r.

Oſtendendum eſt figuram b m z f i eſſe ad poſitionem rectæ b a, condicta ratione æqualem quadratrici ſecundæ quæ reſpondeat figuræ b i f z r, & generetur libræ p z brachio p b æquante ipſam b z, perpendiculo b u.

Compleatur parallelogrammum b a P z, vt a P æquidiſtet ordinatim applicatæ b z, & tangat parabolam a h z in a. Igitur figura a n P z h eſt ceratoides parabolica, ac proinde quadratrix quadratricis reſpondens parallelogrammo a b z P, & genita libræ o a P brachio o a æquante rectam a P, & perpendiculo a b. Igitur vt in quadrageſima propoſitione & ſequente oſtendimus, ſi figuræ b i f z eodem brachio o a vel pb latere parallelogrammi a o p b manente, gignatur prima quadratrix b x A z, reſpondens figuræ b i f z, & huius primæ quadratricis gignatur quadratrix altera b y A z, cylindraceum altitudinis b a vel b u, baſeos b y A z, erit æquale dicylindraceo genito ex ceratoide parabolica a P z h, & ex figura b i f z r. Quoniam verò dicylindraceum genitum ex b i f z r & ex a n P z h, itemque aliud ex b i f z r & ex a h z b ſunt ſimul cylindraceum genitum ex b i f z r & ex parallelogrammo a b z P, patet figuram b y A z m eſſe condicta ratione æqualem figuræ b i f z r; ac proinde figuram b y A z r eſſe condicta ratione æqualem figuræ b i f z m, & ſi habeatur quadratrix ſecunda b y A z r, auferatúrque ex b i f z r, relinqui ſpatium b m z r: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVIII.

Reuocato ſchemate propoſitionis quadrageſimæ ſextæ (*Fig.64.*) ex recta i o abſcindatur o C ipſi æqualis.

Oſtendendum eſt librâ C L ſuſpenſa ex i, perpendiculo i c, brachio C i, æquiponderans figuræ i P V L integrè ſumptæ eſſe æquale trienti ſecundi termini perſpectæ progreſſionis, deductis octo quadrageſimis quintis partibus primi, ſiue quadrati c d.

Quoniam figuræ i F d c, i P V c ita inſiſtunt ſuper baſi i c ad poſitionem rectæ i L, vt dimetiens maioris ſit dupla dimetientis minoris, ex vltima quarti tetragoniſmicorum liquet centrum grauitatis pertinens ad maiorem diſtare duplo longiùs ab axe c i, quàm diſtet grauitatis centrum i F d n. Igitur librâ grammicâ z d ſuſpensâ ex c perpendiculo c i, brachio z c æquiponderans maiori erit quadruplum eius quod æquiponderat minori; nam ſi minoris centrum transferatur in centrum maioris æquiponderabit illi duplum prioris æquiponderantis; ergo minoris duplum habens idem centrum maioris figuræ poſtulat quadruplum primi æquiponderantis. Atqui minoris duplum in centro maioris collocatum habet idem æquiponderans, quod maior figura: ergo maiori figuræ æquiponderat quadruplum minoris, brachio z c: ergo per octauam ſecundi tetragoniſmicorum maiori figuræ brachio c I duplo brachij c z, æqui-

ponderat duplum spatij, quod, brachio c z, æquiponderat minori. Id ipsum verò pari pacto ostenditur de æquiponderante ipsi quadratrici primæ: ita vt quadratrix secunda figuræ i P V c genita brachio c I, sit dupla quadratricis secundæ respondentis minori i h d c, brachio z c.

Rursus figuræ c i h d brachio c z quadratrix secunda est ex decima septima tertij duæ nouenæ quadrati c d, figuræ autem c u d p vel i F d h per trigesimam secundam est duæ quadrati c d decimæ quintæ partes: ergo per subductionem quadratrix secunda figuræ i F d c genita brachio c z est quatuor quadragesimæ quintæ partes quadrati c d. Igitur figuræ i P V c, brachio c I, octo quadragesimæ quintæ partes quadrati c d.

Præterea quoniam ex dimensione circuli Archimedea constat parallelogrammum i c d n, cuius latus c i æquat peripheriam D E d, esse æquale dimidio circuli genitoris, totum parallelogrammum i c V L erit æquale circulo diametri z d; sed istius parallelogrammi brachio c I quadratrix secunda est triens ipsius, vt ex quadragesima quinta constat, vel aliunde ex duodecima tertij tetragonismicorum adiunctâ parabolæ quadraturâ: ergo si de quadratrice secunda totius parallelogrammi dematur quadratrix secunda partis i P V c, restabit quadratrix secunda alterius partis i P V L nempe triens circuli genitoris semidiametro c d descripti, imminutus octo quadragesimis quintis quadrati c d, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Si non sumatur nisi i P T pars totius i P V L, inuenietur pari pacto quadratrix secunda illius, ex propositionibus vnde eruta est pro tota i P V L.

PROPOSITIO XLIX.

Reuocato (*Fig. 65.*) schemate propositionis quadragesimæ septimæ, figura b m z r est bes circuli geniti semidiametro a b, deductis quinquaginta duabus quadragesimis quintis partibus quadrati b a.

Quoniam Figura b i f z r est per corollarium tertium trigesimæ nonæ æqualis circulo semidiametri b a, deductis quatuor trientibus quadrati b a, figura autem b i f z m, siue quadratrix secunda figuræ b i f z r (eam enim esse eiusmodi ostendimus in quadragesima septima) est per superiorem triens eiusdem circuli, deductis octo quadragesimis quintis eiusdem quadrati: ergo per subductionis leges figura b m z r est bes circuli geniti semidiametro a b, deductis quadrati b a quinquaginta duabus quadragesimis quintis partibus, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Sicuti in vigesima secunda ostendimus si arcus c d a sit quadrans peripheriæ circularis basim cylindracei altitudinis b a, geniti ex quadratricibus mixtis subcontrariè positis & respondentibus parallelogrammo

mixto altitudinis d s æquantis rectam b a, æquare quadratricem mixtam respondentem ipsis quadratricibus mixtis insistentibus super arcu c d a, posito libræ brachio singularum secundarum quadraticum illo, quo subcontraria quadratrix prima genita fuerit. Ita hîc, & generaliter quæcunque sit curua c d a, idipsum ostendetur adhibito corollario secundo decimæ octauæ, vbi ostenditur vtrique mixtæ quadratrici primæ, vel vtrique vngulari superficiei hoc pacto sumptæ idem respondere æquiponderans, prout ibi res explicata fuit. Superest vt veniamus ad solutionem problematum ab Anonymo, cui nunc Dettonuillæus nomen est, propositorum sub initium Octobris postea quam lapsum fuit tempus præstitutum inuentioni aliorum, quatuor antè mensibus propositorum.

PROPOSITIO L.

Iisdem manentibus (*Fig.* 65.) esto semicycloideos magnæ basis c b, axis b a arcus c d a.

Ostendendum est si recta b a ita secetur in g, vt portio b g sit duo trientes totius b a, & per g agatur g d parallela basi b p, grauitatis centrum totius curuæ c d a esse in recta g d.

Quoniam parallelogrammum mixtum insistens curuæ c d a, altitudinis d s, æqualis rectæ b a, est æquale parallelogrammo a b z P, est enim c d a curua æqualis rectæ b z ex generatione quadratricis mixtæ expansæ; ipsa autem a h z b est per trigesimam sextam quadratrix expansa respondens eiusmodi parallelogrammo, libræ brachio b u, perpendiculo b c: ergo vt suspensum, siue parallelogrammum a b z P, ad æquiponderans, siue ad figuram a h z b, hoc est ex parabolæ quadratura, vt ternarius ad binarium, ita est brachium u b ad centri grauitatis respondentis parallelogrammo mixto, distantiam ab axe b p: ergo centrum grauitatis parallelogrammi mixti geminati infra & supra planum p d a b, est in recta g d: sed per decimam septimam idem est centrum grauitatis curuæ c d a, & parallelogrammi mixti illi insistentis: ergo &c.

COROLLARIVM I.

Natura parabolæ ostendit satis, si quæratur linea basi c b parallela incedens per centrum grauitatis arcûs a d, quamuis d non congruat puncto c, illam ita diuidere axis b a portionem g a, vt pars ad basim g d sit dupla reliquæ. Ista verò linea basi b c parallela incedens per grauitatis centrum curuæ c d a, non est, vt patet, inuentu difficilis, si semel constiterit, quadratricem mixtam expansam parallelogrammi mixti esse parabolam a h z b.

COROLLARIVM II.

Vides, erudite Lector, has linearum quadratrices competere per se primò rectangulis mixtis, quæ sunt superficies, ac proinde quamuis quadrataria superficies nulli primariò competat nisi superficiei suspensæ: eam tamen

tamen vtiliter transferri ſecundariò ad lineas; ſicuti ſi quis cylindracei quadratrices ſolidas vſurparet ad inueniendum centrum grauitatis baſeos (poteſt enim perinde; cùm quæ eſt proportio inter quadratrices ſolidas in cylindro vel cylindraceo, eadem ſit inter quadratrices planas reſpondentes baſi) vel è contrario ſi quadratrices baſeos planas pro ſolidis cylindri aut cylindracei vſurparet.

PROPOSITIO LI.

Iisdem manentibus (*Fig.* 65.) ex baſi c b auferatur c B æqualis beſſi rectæ b a, ac proinde æqualis rectæ b g, & per B ducatur recta B D parallela axi b a occurrens rectæ g d in D.

Oſtendendum eſt punctum D eſſe grauitatis centrum curuæ c d a vt iacet manentis.

Quoniam enim ſuſpenſum rectangulum mixtum æquale eſt rectangulo a b z P, hoc eſt bis quadrato a b; ex corollario autem tertio trigeſimæ nonæ quadratrix mixta expanſa b i f z r eſt æqualis circulo ſemidiametri b a, imminuto quatuor trientibus quadrati b a; vt ſunt duo quadrata b a, vel duo termini primi progreſſionis perſpectæ, ad circulum vel ad ſecundum terminum eiuſdem progreſſionis imminutum quatuor trientibus primi, ita erit brachium b r vel b u, hoc eſt primus terminus adiunctæ progreſſionis, ad dimidium ſecundi, imminutum beſſe primi b u. Cùm igitur ſecundus adiunctæ ſit dimidium peripheriæ circuli ſemidiametro b a deſcripti, erit quadrans peripheriæ eiuſdem: ſed peripheriæ circulorum ſemidiametris b e vel e a & b a deſcriptorum, ſunt in ratione ſemidiametrorum: ergo quadrans peripheriæ maioris æquat duos quadrantes, ſiue totum arcum a q b minoris; ſed toti a q b æqualis eſt recta b c: ergo recta b B, ſi B D tranſeat per centrum lineæ c d a, eſt ipſa b c imminuta duobus trientibus rectæ b a; ac proinde rectè ſtatuimus portionem c B eſſe beſſem rectæ b a.

COROLLARIVM.

Niſi calculus aliquo vitio nobis incognito laborat, cùm rectæ c B, b g ſint æquales, patet rectangulo mixto idem reſpondere æquiponderans tam perpendiculo c b, quàm c l, poſito brachio eodem; ac proinde centrum grauitatis eſſe in recta c D conſtituente cum recta b c angulum ſemirectum.

PROPOSITIO LII.

Iisdem manentibus (*Fig.* 65.) intelligatur c d a b circumuolui circa axem c b.

Oſtendendum eſt ſuperficiem iſtius peripherici eſſe æqualem beſſi rectanguli contenti ſub rectâ a b, & ſub recta æquante duplum peripheriæ circuli deſcripti ſemidiametro b a.

Iſtud patet ex eo quod quadratrix mixta parallelogrammi mixti geni-

ta brachio b u, perpendiculo b c (hoc eſt ſuperficies vngularis abſciſſa plano per baſim b c incedente, ex ſuperficie curua cylindracei recti cuius baſis c d a b) ad poſitionem plani ſ d t ſe habet ad ſuperficiem curuam periphericam iam deſcriptam in eadem perpetuò ratione, ſicuti in corollario ſecundo decimæ nonæ annotauimus cum Gregorio à S. Vincentio. Illa autem ratio vt patet eſt ſemidiametri d t ad ſui circuli peripheriam. Cùm igitur iſta vngularis ſuperficies expandatur in parabolam a h z b, cuius ordinatim applicata b z eſt dupla rectæ b a; & cùm iſtaparabola ſit bes rectanguli a b z, patet quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LIII.

IIſdem manentibus (*Fig.* 65.) intelligatur c d a b circumuolui circa axem a b.

Oſtendendum eſt ſuperficiem iſtius peripherici eſſe æqualem duplo tertij termini perſpectæ progreſſionis (cuius primus terminus ſit quadratum ab, ſecundus ſit circulus ſemidiametro a b deſcriptus) imminuto octo trientibus ſecundi.

Quoniam per corollarium tertium trigeſimæ nonæ quadratrix iſta ſiue ſuperficies vngularis expanſa eſt b i f z r, ipſa autem b i f z r eſt per corollarium tertium trigeſimæ nonæ æqualis ſecundo termino progreſſionis perſpectæ iam propoſitæ demptis quatuor trientibus primi: cùm aliunde radius ad peripheriam ſui circuli ſit vt primus adiunctæ progreſſionis terminus ad bis ſecundum eiuſdem progreſſionis, patet vt eſt primus adiunctæ ad bis ſecundum, ita ſecundum perſpectæ imminutum quatuor trientibus primi eſſe ad bis tertium perſpectæ imminutum octo trientibus ſecundi: tertius autem perſpectæ eſt vt patet ex initio tertij libri, quadratum rectæ b c, vel peripheriæ a q c: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LIV.

SVperficies (*Fig.* 65.) peripherica circa baſim b c deſcribi intelligatur motu figuræ a d c b, & eius centrum grauitatis ſit B.

Oſtendendum eſt rectam b B eſſe ipſam b c imminutam tredecim decimis quintis radij a b.

Iam oſtendimus in quinquageſima, per plana plano ſ d t parallela ſecari proportionaliter ſuperficiem periphericam, & ſuperficiem cuneatam vel vngularem, cuius ſingulæ perpendiculares ad baſim rectanguli mixti ſunt ſemidiametri circulorum illorum qui ſunt ſectio periphericæ ſuperficiei. Itaque hîc nobis reſtat oſtendere ſi planum plano ſ d t parallelum, incedens per grauitatis centrum vngularis illius ſuperficiei, quæ facta eſt à plano per rectam c b incedente & ſecante ſuperficiem cylindraceam, faciat in baſi ſectionem B D; rectam b B eſſe ipſam b c imminutam tredecim decimis quintis radij a b.

Quoniam superficies cunealis æquat figuram a h z b siue quatuor trientes quadrati a b, vel primi termini perspectæ progressionis; quadratrix autem eiusmodi cuneatæ est, vt ostendimus in corollario quadragesimæ nonæ, bes circuli semidiametro a b geniti, vel secundi termini, deductis quinquaginta duabus quadragesimis quintis primi. Si vt quatuor trientes primi termini perspectæ, ad duos secundi imminutos quinquaginta duabus quadragesimis quintis primi, ita fiat radius a b, vel primus terminus adiunctæ, ad quartam lineam, ista quarta erit dimidium secundi termini adiunctæ (is verò est dimidium peripheriæ circuli semidiametro a b descripti) imminutum tredecim decimis quintis radij a b. Atqui dimidium peripheriæ circuli semidiametro a b descripti est duplum rectæ c b: est enim recta c b æqualis peripheriæ b q a siue dimidio peripheriæ integræ circuli semidiametro a e descripti: peripheriæ verò circulorum sunt inter se vt semidiametri; ergo dimidium peripheriæ circuli semidiametro b a descripti, est duplum dimidij peripheriæ descriptæ semidiametro e a; vel est duplum rectæ c b. Ergo illud dimidium secundi termini adiunctæ æquat rectam b c: igitur recta b B est &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LV.

Isdem positis (*Fig.* 65.) superficies peripherica circa axem a b describi intelligatur motu figuræ a d c b, & eius centrum grauitatis sit g.

Ostendendum est si primus perspectæ progressionis terminus sit quadratum b a, & secundus sit circulus semidiametro a b descriptus; vt secundus terminus imminutus quatuor trientibus primi, se habet ad bessem eiusdem secundi imminutum quinquaginta duabus quadragesimis quintis primi; ita esse rectam u b ad b g.

Quoniam enim cunealis superficies abscissa ex cylindracei recti superficie per planum cuius cum basi sectio sit recta b a, inclinatum ad eandem basim gradibus quadraginta quinque, est suspensa axe b c, sustentaculo u l; vt est ipsum suspensum ad æquiponderans suum, ita erit recta u b ad b g. Sed dimidium suspensi quod videlicet insistit arcui c d a (qui est dimidium totius arcûs cycloideos integræ) est, per corollarium tertium trigesimæ nonæ, secundus terminus perspectæ imminutus quatuor trientibus primi; æquiponderans autem respondens illi dimidio est per quadragesimam nonam, eiúsque corollarium, bes secundi deductis quinquaginta duabus quadragesimis quintis primi; ergo vt terminus secundus progressionis perspectæ imminutus quatuor trientibus primi se habet ad bessem eiusdem secundi imminutum quinquaginta duabus quadragesimis quintis primi, ita est recta b u ad b g: ergo g est grauitatis centrum cunealis superficiei: ergo vt in superiori ostendimus, est quoque centrum periphericæ superficiei, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

In præsentis propositionis calculo, sicuti & in duabus vltimis tertij & quarti libri, pro prima & secunda magnitudine quatuor proportionalium, vsurpauimus terminos progressionis perspectæ, qui sunt figuræ planæ; loco tamen illorum possent iisdem verbis adhiberi termini adiunctæ, qui sunt lineæ rectæ. Id verò ex eo patet, quod perspectæ & adiunctæ termini ponantur progredi in eadem ratione.

PROPOSITIO LVI.

INtelligatur (*Fig. 65.*) in plano *supposito* c b a (ita enim illud vocari placuit in vndecima propositione) quælibet curua c d a, & ex eius quolibet puncto d excitata sit perpendicularis d s ad planum suppositum: per curuam c d a intelligatur moueri recta d s, vel alia illi parallela, & describere superficiem cylindraceam rectam; in ea verò superficie intelligatur quælibet figura cuius dimetiens sit d s. In plano eodem supposito secent se duæ rectæ c b, b a ad angulos rectos in b; ipsæque c b, a b sunto eductæ ab extremis curuæ punctis. Sint a b, b u æquales, & constructum sit parallelogrammum b u l c. Esto l G b u figura similis, æqualis, & similiter posita figuræ c d a b, ita vt si c b congruere ponatur rectæ l u, & b a rectæ u b, curua c d a congruat curuæ L G b; & si d t perpendicularis ad rectam c b producatur occurrens curuæ in G, & rectæ l u in H, dimetientes H G, t d sint æquales. Intelligatur præterea figura l L F u circa axem l u ita opponi figuræ l G b u, vt ordinatim applicatæ G H, H L sint æquales; ac proinde si circa axem manentem l u intelligatur circumferri l G b u, postquam iacuerit ad partes oppositas, congruat figuræ l L F u, punctúmque G puncto L. Rursus in superficie cylindracea intelligatur figura cuius dimetiens sit d π, & ita se habens ad figuram cuius dimetiens d s, vt sicut est H t ad t d, ita sit dimetiens d s, ad d π; vt figura dimetientis d π sit axe c b, sustentaculo l u; quadratrix alterius figuræ cuius dimetiens d s; de qua quadratrice actum est in corollario primo decimæ nonæ. Vt autem ad positionem plani s d t sustentaculo l u sine errore vllo aptetur, intelligi debet figura b G l L F esse basis cylindracei recti, & in superficiem illius, ad positionem plani s d t, ita transferri quadratrix dimetientis d π, vt medietas eius d R transferatur in G M, altera autem medietas in L N; vt duarum g M, L N supra & infra planum suppositum æquo interuallo prominentium, centrum grauitatis sit H. Per b agatur b T parallela perpendiculari d s.

Oſtendendum eſt duas ſimul ſuperficies dimetientium G M, L N ad poſitionem plani ſ d t æquiponderare condicta ratione ſuperficiei cuius dimetiens ſ d, libræ planæ axe c b, perpendiculo plano T b c.

Iſta eſt veluti appendix vigeſimæ octauæ propoſitionis libri quarti, vbi planam libram definiuimus ſimillimâ methodo, poſtulauimúſque magnitudines ſibi ita reſpondentes hinc & inde ad axis b c partes oppoſitas, æquiponderare ſibi mutuò; id verò etiam nunc pro iſta appendice poſtulamus. Cùm enim figura dimetientis d π, & figura limbo b G I L F inſiſtens & quadratrix ſuſtentaculo l u aptata habeant ſimiles & æquales baſes, habeantque inſuper ad poſitionem plani ſ d t æquales dimetientes, non poſſunt non eſſe condicta ratione æquales. Igitur cùm quadratrix cuius dimetiens d π, & ſuſpenſa figura cuius dimetiens d s, habeant eandẽ baſim c d a, habebunt quoque eandem æquiualenter baſim cùm æquiponderans figura limbo b G I L F inſiſtens, tum ſuſpenſa dimetientis d s, illi reſpondens; ergo cùm aliunde æquidiſtãtes dimetientes ſuſpenſæ figuræ & aptatæ ſuſtentaculo l u, ſint reciprocè vt H t brachium libræ grammicæ H d, ad longitudinem t d, idémque eueniat quodcunque axis c b punctum ſit t, veroſimillimum eſt ſuperficiem ſuſpenſam, & ſuperficiem ita aptatam ſibi inuicem æquiponderare ad poſitionem plani ſ d t; hoc autem quod veroſimillimum eſſe iam diximus, repoſitum volumus inter poſtulata. Qua in re doleo (vt hoc obiter occaſione data dicam) Recentiores nonnullos peccare, dum ſimiles analogias pro demonſtrationibus venditant; quod ſi pergant facere pacatiſſimam Antiquorum Geometriam turbabunt iurgiis atque contentionibus; & quæ ſola ſcientiarum humanarum fuerat tota demonſtratio, fiet partim opinio, partim fides humana; partim coniectura; quod quidem (ni fallor) in hac ſchola tam monſtrum ſapit, quàm quod in Logica partim hircus partim ceruus fingitur, vt de hircoceruis & chimæris diſputari poſſit. At verò quoties aliquid inter poſtulata ponitur, nulla poteſt eſſe controuerſia, quandoquidem qui illud poſtulat, nihil aliud contendit quàm eo dato cætera Geometricè iferri.

COROLLARIVM.

Recta d s ad planum ſuppoſitum c b a perpendicularis ponatur æqualis quadranti peripheriæ circuli ſemidiametro d t deſcripti; eadem perpendicularis intelligatur manens in plano ſ d t curuari in quadrantem peripheriæ centri t, ita vt ſuperficiei ita incuruatæ centrum grauitatis ſit V; id verò ſimiliter factum intelligatur in omnibus erectis d s, vbicunque ſumatur punctum d. Cùm recta t d ad t V maneat in vna eademque ratione, quodcunque axis c b punctum ſit t; manifeſtum eſt æquiponderans aptatum ſuſtentaculo l u, & reſpondens erectæ d s, ad æquiponderans quod eidem ita incuruatæ reſpondet, ſe habere, vt ſe habet recta t d ad t V, vel vt quadrans peripheriæ circularis ad radium ſuum; hanc enim

esse proportionem rectæ d t ad t V, ostendimus in vigesima prima propositione. Igitur æquiponderans superficiei periphericę genitę ex ita incuruata & incumbente in d t, erit ad æquiponderans cuneatæ superficiei, cuius dimetiens est d s, sicut est recta t V ad t d, vel radius ad quadrantem suæ peripheriæ. Igitur, cùm vt demonstrat Gregorius à S. Vincentio libri noni propositione septuagesima quarta, incuruatio ista non impediat quominus figura incuruata sit æqualis erectæ, quando arcus c d a est circularis, & cùm eadem ratione istud ipsum appareat, quando non est circularis; patet istis duobus iuxta modum antè præscriptum aptatis spatiis eidem sustentaculo l u, axe b c, æquiponderantia esse inter se vt ipsa spatia: sunt ergo inter se vt quadrans peripheriæ circularis ad suum radium. Istorum spatiorum aptatorum sustentaculo l u vnum vocetur *maius*, illud videlicet quod æquiponderat figuræ erectæ; alterum *minus*, quod curuatæ. Per grauitatis centrum figuræ erectæ geminatæ ducatur recta d g æquidistans basi b c, complens parallelogrammum g d t b; vt est quadrans peripheriæ circularis ad radium suum, ita ponatur recta t d, ad t φ ex ipsa t d abscissam, & compleatur parallelogrammum p t φ Y. Quoniam in recta d g ponitur grauitatis centrum erectæ, & ipsi erectæ æquiponderat maius spatium axe c b; patet vicissim maiori spatio æquiponderare spatium æquale erectæ eodem pacto aptatum sustentaculo g d. Igitur si sustentaculum g d mutetur in Y φ, illíque pari modo aptetur æquiponderans maiori; istud æquiponderans, per octauam secundi tetragonismicorum, ad illud quod sustentaculo g d aptatum fuit, se habebit vt recta t d ad t φ, hoc est, vt quadrans peripheriæ circularis ad suum radium. Igitur cùm vt quadrans peripheriæ circularis ad radium, ita quoque sit spatium *maius* ad *minus*; si spatium *maius* aptatum sustentaculo l u conuertatur in *minus*; patet æquiponderans illi ita conuerso aptatum sustentaculo Y φ, esse ad æquiponderans, eidem Y φ aptatumante conuersionem, vt est radius ad quadrantem peripheriæ circularis: sed ita etiam est erecta figura siue spatium aptatum sustentaculo g d ad spatium aptatum ante conuersionem sustentaculo Y φ; ergo *maiori* conuerso in *minus*, hoc est, *minori* ad sustentaculum l u aptato spatium aptatum sustentaculo φ Y æquiponderans est æquale erectæ figuræ: sed eidem erectæ figuræ est æqualis conuexa & curuata figura, eadémque curuata ponitur æquiponderare illi eidem *minori* spatio vt iacet manenti. Igitur cum duorum spatiorum æqualium, & eidem vt iacet manenti seorsum æquiponderantium, grauitatis centrum sit in eodem sustentaculo; vnius autem istorum æquiponderantium centrum grauitatis sit ex constructione in recta φ Y, in eadem quoque recta erit centrum conuexæ & incuruatæ superficiei.

Cæterùm quod de proportione interuallorum quibus centra cuneatæ superficiei, & periphericæ illius geminatæ distant à rectâ b c, assumit vt certum Dettonuillæus sub finem epistolæ ad D. Carcaui scriptæ, pag. 23. assumit quidem, sed non demonstrat. Nos verò demonstrationem no-

ſtram poſtulato illo fatemur niti quod in præſenti propoſitione expoſuimus, necnon & alio quod in corollario iſto indicauimus, nempe ſuperficiem curuatam eſſe æqualem erectæ: ſi enim foret inæqualis, demonſtratio nulla exiſteret. Simillimum iſti eſt quod in trigeſima quarti libri demonſtrauimus.

PROPOSITIO LVII.

Iſdem manentibus (*Fig.* 65.) eſto c d a b ſemicycloides magna, & circa baſim c b intelligatur, vt in quinquageſima, generari ſuperficies peripherica circumductu figuræ c d a b; conſideretur autem eius pars quæ ad plani T b c partes a iacet, & in recta g D ad baſim b c parallela iaceat grauitatis centrum eiuſmodi peripheriæ.

Oſtendendum eſt rectam b g eſſe quatuor quintas partes rectæ, quæ ad totam b a ſit, vt radius ad quadrantem peripheriæ ſuæ circularis.

Primaria ſuperficies cuneata cunei cuius acies c b, extenditur in parabolicam figuram a h z b, cui axe b z, ſuſtentaculo l u, æquiponderant duæ quintæ partes ipſius, ac proinde quatuor quintæ partes ipſius ſunt tertius terminus, quorum primus a b z P, ſecundus ipſa a h z b ad poſitionem rectæ a b. Iſtam porrò cuneatam ſuperficiem expandi in parabolicam figuram a h z b conſtat ex trigeſima ſexta; ex qua etiam conſtat rectas t d, d s, h r eſſe æquales, ac proinde vt eſt H t, vel b u, ad t d vel d a, vel r h; ita eſſe ipſam d s, vel r h, ad dimetientem ſuæ quadratricis: ſed ita eſt r h ad duplam dimetientis reſpondentis ſuæ quadratrici genitæ axe b z ſuſtentaculo l u ad poſitionem rectæ a b: ergo cuneatæ ſuperficiei inſiſtentis ſuper arcu c d a æquiponderans axe c b, ſuſtentaculo l u eſt quatuor quintæ partes ipſius cuneatæ ſuperficiei. Vt igitur ſuſpenſum ad quatuor ſui quintas partes, ita eſt brachium u b ad diſtantiam centri cuneatæ ſuperficiei geminatæ ab axe b c; ergo illud centrum cuneatæ diſtat ab axe c b quatuor quintis partibus rectæ b a. Cùm igitur, per præcedentis corollarium, vt quadrans peripheriæ circularis ad radium ſuum, ita ſint quatuor illæ quintæ partes radij ad rectam b g, patet ipſam b g eſſe quatuor quintas partes rectæ ad quam a b recta ſit vt quadrans peripheriæ circularis ad ſuum radium, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LVIII.

Iſdem manentibus (*Fig.* 65.) circa axem b a intelligatur circumductu ſemicycloideos magnæ c d a b deſcribi ſuperficies peripherica; conſideretur autem eius portio quæ ad plani T b a partes c iacet, & in recta B D ad axem a b parallela, iaceat grauitatis centrum eiuſmodi periphericæ ſuperficiei.

Oſtendendum eſt vt eſt circulus ſemidiametro b a deſcriptus, vel

vt secundus terminus progressionis perspectæ, imminutus quatuor trientibus primi termini, vel quadrati b a, ad dimidium tertij termini, auctum besse secundi, & imminutum triginta quatuor nouenis primi, siue quadrati b a; ita rectam, quæ ad radium b a sit vt ipse radius ad quadrantem peripheriæ, esse ad rectam b B.

Ex superioris progressu patet vt superficies curua cunei geniti ductu plani transuersi per rectam b a, insistens arcui c d a, est ad æquiponderans suum, axe b a, sustentaculo r n latere quadrati a b r n, genitum; ità esse rectam b r vel b a, ad b t rectam posito quòd t V parallela axi b a incedat per grauitatis centrum cuneatæ superficiei geminatæ. Ex eiusdem methodo patet vt quadrans peripheriæ circuli est ad suum radium, ita esse rectam b t ad b B. Vt est quadrans peripheriæ ad radium suum, ita b r ponatur esse ad b I: ergo quoniam ita quoque est recta b t ad b B, erit alternando vt b r ad b t, ita b I ad b B: sed b r ad b t est vt superficies cuneata ad æquiponderans, ergo ita quoque est recta b I ad rectam b B.

Rursus qnoniam superficies cuneata in hoc casu expanditur in superficiem b i f z, & illi est æqualis, ipsa autem b i f z est, per corollarium tertium trigesimæ nonæ, æqualis circulo semidiametri b a imminuto quatuor trientibus quadrati b a; æquiponderans verò illi insistenti super arcu c d a est ex superioris methodo spatium inuentum in corollario quadragesimæ quartæ, nempe (si ponatur primus perspectæ terminus quadratum b a, & secundus sit circulus semidiametro b a descriptus) dimidium tertij termini perspectæ, auctum besse secundi, & imminutum triginta quatuor nouenis primi: ergo vt secundus terminus perspectæ, imminutus quatuor trientibus primi se habet ad dimidium tertij, auctum besse secundi, & imminutum triginta quatuor nouenis primi, ita est recta b I ad b B, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LIX.

PRoponitur in casu vno calculus octo problematum quorum solutionem Anonymus ab Europæ Geometris exegit sub finem anni 1658. *Eius prouocatio relata habetur suprà in scholio quarto vltimæ propositionis libri quarti.*

Reuocetur schema propositionis trigesimæ sextę (*Fig.* 65.) & in eo c d a b sit semicycloides magna, cuius basis b c, circulus genitor a q b, descriptus diametro a b, centro g.

Primò quæritur totius curuæ (cuius dimidium est c d a) centrum grauitatis. *Obtinetur per quinquagesimam propositionem præsentis libri.*

Recta b a ita diuidatur in g, vt b g sit bes totius b a. Dico g esse grauitatis centrum limbi integri cycloideos magnæ.

Secundò

Secunò quæritur grauitatis centrum curuæ c d a. *Istud habetur ex quinquagesima prima superiore.*

Ex recta c b abscindatur c B æqualis rectæ b g, vel duobus trientibus axis b a; completo parallelogrammo g b B D, aio punctum D esse grauitatis centrum curuæ c d a.

Tertiò circa axem c b intelligatur circumuolui curua c d a, & gigni superficies: quæritur dimensio istius superficiei. *Datur ex quinquagesimæ secundæ methodo.*

Dico superficiem istam esse æqualem bessi rectanguli contenti sub recta a b, & sub recta æquante duplum peripheriæ circuli semidiametro b a descripti.

Quartò circa axem b a intelligatur circumuolui curua c d a, & gigni superficies; quæritur dimensio istius superficiei. *Illam exhibet quinquagesima tertia.*

Aio superficiem istam esse æqualem duplo tertij termini perspectæ progressionis (cuius primus terminus sit quadratum a b, secundus sit circulus semidiametro a b descriptus) imminuto octo trientibus secundi.

Quintò quæritur grauitatis centrum superficiei totius suprà descriptæ circa manentem c b, motu curuæ c d a. *Habetur ex quinquagesima quarta.*

Ex recta c b abscindatur c B æquans tredecim partes decimas quintas axis b a. Aio punctum B esse grauitatis centrum quæsitum.

Sextò quæritur grauitatis centrum superficiei totius suprà definitæ circa manentem a b, motu curuæ c d a. *Habetur ex quinquagesima quinta.*

Rectæ b a dupla sit a u, & vt secundus terminus progressionis perspectæ, definitæ in quarti quæsiti solutione, imminutus quatuor trientibus primi se habet ad bessem eiusdem secundi imminutum quinquaginta duabus quadragesimis quintis termini primi, ita fiat recta u b vel b a ad b g abscissam ex b a. Dico punctum g esse grauitatis centrum postulatum.

Septimò intelligatur ex puncto b erigi b T perpendicularis ad planum c b a, & plano T b c superficies motu curuæ c d a circa manentem c b descripta diuidi in duas partes, quarum quæ ad punctum a vergit hìc consideratur, eiusque centrum grauitatis quæritur. *Habetur ex quinquagesima septima propositione.*

Ex recta b a rescindatur b g quatuor videlicet quintæ partes rectæ quæ ad totam b a sit vt radius ad quadrantem peripheriæ suæ circularis; retineatur punctum B inuentum in quæsito quinto, & compleatur parallelogrammum g b B D. Aio punctum D esse centrum quæsitum.

Octauò intelligatur plano T b a superficies motu curuæ c d a circa manentem a b descripta diuidi in duas partes, quarum eam quæ ad punctum c spectat, hic contemplamur, eiusque centrum grauitatis inquirimus. *Obtinetur ex quinquagesima octaua superiore.*

Vt secundus terminus progressionis illius perspectæ, imminutus quatuor trientibus primi termini, vel quadrati b a, se habet ad dimidium tertij termini, auctum besse secundi, & imminutum triginta quatuor nouenis primi, siue quadrati b a, ita recta, quæ ad radium b a fit vt ipse radius ad quadrantem peripheriæ, fiat ad rectam b B. Maneat punctum g repertum in quæsito sexto, & compleatur parallelogrammum g b B D. Aio punctum D esse centrum quod quærimus.

COROLLARIVM.

Calculum octo problematum absoluimus in vno casu totius semicycloideos magnæ; ex illo verò facile poterit ad alios casus transitus fieri, si quis diligens calculator rem aggrediatur, & methodum singularum propositionum à quinquagesima inchoando, accuratè obseruet. Porrò ad ista omnia soluenda non inutile erit opus retexendo annotare quæ nobis necessaria fuerint. Primò quidem (data cùm opus fuerit quadratura circuli) distantiam centri grauitatis curuæ c d a à basi c b & ab axe a b obtinuimus in quinquagesima & in subsequente, ex cuneatis superficiebus expansis a h z r b, b i f z r. Secundò in quinquagesima secunda & quinquagesima tertia ex iisdem superficiebus cuneatis habuimus dimensionem superficierum periphericarum circa basim, & circa axem descriptarum. Tertiò in quinquagesima quarta & quinquagesima quinta ex figura b m z r cognita assequuti sumus centra grauitatis earundem periphericarum superficierum circa basim & axem genitarum. Quartò demum ex duplo æquiponderantis superficiei cuneatæ a h z r b, axe b z, sustentaculo l u; itemque ex duplo æquiponderantis superficiei alteri cuneatæ b i f z r axe b z sustentaculo a P reperimus distantiam centri grauitatis dimidiarum superficierum ab axe, & à basi. Vnde liquet ad solutionem problematum istorum, inueniendam esse dimensionem rectæ c d a, quadraturam figurarum a h z r b, b i f z r, b m z r, & æquiponderantium figuræ quidem b a h z r axe b z, sustentaculo l u; figuræ verò b i f z r axe b z sustentaculo a P. Manifestum quoque est methodum esse generalem cuiuscunque modi sit curua c d a, dummodo quadraturâ figuræ c d a b positâ, inueniatur recta æqualis curuæ c d a, & quadratura figurarum & æquiponderantium iam dictorum. Quapropter longè difficilius est in singulis curuarum generibus inuenire illas dimensiones & quadraturas, quàm generaliter pronuntiare quid præstandum sit: istud enim ex methodo adhibita in vno genere curuarum apertè patet.

PROPOSITIO LX.

Nonnulla alia, quæ demonſtrantur in præſenti libro, ſummatim indicantur.

Primò quidem in propoſitione ſecunda calculus datur ſolidi cuiuſdam, ad cuius generationem conueniunt ſpiralis linea & conus.

Secundò in ſeptima, octaua, nona eiúſque corollario oſtenditur Veterum more quælibet curua continua eſſe æqualis rectæ lineæ inter duas alias rectas interceptæ.

Tertiò in decima demonſtratur, conuolutæ & euolutæ figuræ methodo, proportio coni ad cylindrum, & ſuperficiei coni recti ad baſim eiuſdem, eſſe illa ipſa, quæ ab Archimede demonſtrata extat.

Quartò in vigeſima prima & vigeſima ſecunda datur calculus centri grauitatis arcuum circuli, & peripheriarum ſphæricarum.

Quintò in vigeſimæ tertiæ corollario habetur triangulorum cylindricorum centrum grauitatis, vnà cum grauitatis centro ſectoris ſphærici à D. Paſcalio propoſiti in datis ad nos literis.

Sextò *ſcalarij* cuiuſdam dimenſionem & centrum grauitatis tradimus in trigeſima ſecunda propoſitione.

Septimò in quadrageſima quarta propoſitione exhibetur quadratura abſoluta gradûs cuiuſlibet in certâ quadam ſerie deſignati.

Octauò in propoſitionis quinquageſimæ corollario ſecundo oſtenditur, cùm nulla linea habeat per ſe primariò qudratricem figuram (nulla enim eſt ratio figuræ ad lineam) illi tamen vtiliter ſeruire quadratricem parallelogrammi mixti : in ſcholio verò quadrageſimæ quartæ nomen & origo primaria quadratricum paulò diſtinctiùs expenduntur.

Nonò methodus libræ planæ quam in elementis noſtris excogitauimus, ad ſuperficies curuas extenditur in quinquageſima ſexta propoſitione.





DE CYCLOIDE

LIBER SEXTVS.

Vbi nostra de Cycloide methodus unà cum Dettonuillanâ paulò accuratiùs expenditur; traditur methodus calculi pro coronâ Cycloidicâ; generatio cycloideos magnæ, diligentiùs examinatur; adiungitur denique appendicula de motu grauium accelerato.

PRÆFATIO.

INVENTIONIS tanta in omnibus disciplinis est laus, vt Scriptores ad illam communi omnes studio aspirent; & vt libri illi, qui nihil noui docent, frustra edi, verè magis quàm fastidiosè passim à viris doctis dicantur. Negari quidem nequit quin ætate, qua viuimus, plurima cùm in aliis scientiis, tum in mathematicis præcipuè, reperta extent: sed istud etiam inficari nemo potest, non pauca euulgari quotidie, quæ vix quicquam noui contineant præter ipsum aliquando nomen. Certò tamen apud omnes harum inuentioni rerum deditos constat, nonnumquam euenire vt quod vnus iam reperit; alter, cùm nihil de istius inuentione vnquam audierit, in id pariter incidat, eámque rem in vulgus pro sua emittat, existimetque à se aliquid antea inauditum proferri. Methodum Dettonuillanam cum nostra illa quam in Elementis tetragonismicis dedimus, & qua in istis vsi sumus, prima huius in libri parte comparare instituimus, vt res per se obscuræ comparatione elucescant; & vt hoc ipsum, quod iam diximus, certo certiùs constet, accidere posse vt duo, quisque suo marte, diuerso licet tempore & loco, eandem rem extundant.

Quarti libri tetragonismicorum elementorum propositionibus vigesima prima, & vigesima secunda ante decem & ampliùs annos repertis, statim vidimus illis subjici quadraturam coronæ vel annuli; quod in secunda præsentis libri parte faciemus manifestum, assumptâ in exemplum coronâ cycloidicâ, cuius primùm dimensionem, tum centrum grauitatis; deinde eius superficiei dimensionem, & grauitatis centrum dabimus. Serò, quod ægrè ferimus, venerunt in manus nostras Reuerendi P. Tacquet *libri quatuor cylindricorum & annularium*; cùm enim editi sint anno 1651. non nisi labentis istius anni mense Augusto ad nos delati sunt. Opus censemus absolutissimum, atque merito suo nunquam interiturum, eiúsque Autori qui primus hac de re suas lucubrationes vulgauit, istam coronam debitam esse agnoscimus; neque verò alia de causa mentionem nostri illius inuenti nunc facimus, quàm vt methodi a nobis adhibendæ in istorum calculo & demonstratione, origo & caput demonstretur; ille etenim principiis longè diuersis, probatissimis tamen vtitur. Quanquam licet eandem ambo teneremus generalem methodum, possem ego paticulatim de cycloidica corona, quam ille non tetigit, hæc scribere; imò & de circulari, quod ad centra grauitatis tam solidorum, quàm superficierum, de quibus ille nihil egit. Cæterò si dum scholium duodecimæ primi libri exarabam, nota mihi fuissent huius Autoris *cylindrica & annularia*, non omisissem narrare vno eodémque anno 1651. prodiisse in lucem *cubaturam* cunei etiam hyperbolici, & à Reuerendo P. Tacquet in libro illius Operis primo, & à me editam in Elementis, quorum quarto libro, propos. 25. coroll. 4. pro vno hyperbolæ casu calculum etiam exhibeo. Anni 1651. iam memorandi occasio oblata monet me vt quod non ita pridem didici, non omittam hîc dicere, illo ipso anno *quadraturam circuli, ellipseos, & hyperbolæ ex dato portionum grauitatis centro, Autore eruditissimo D. Christiano Hugenio* emissam prodiisse è prælo Batauico; quo ipso titulo nostri Elementorum libri cùm prænotentur, est quod gaudeam socium me tunc talium Virorum in iis cogitandis & euulgandis extitisse, quæ ante illud tempus irreperta latuerant. Quadratricis methodus, quam sine socio, quem equidem sciam, tunc protuli, hoc videbatur exigere, vt mihi aliquando adiungeretur Scriptor illi commendandæ idoneus; id verò nunc tandem contigisse manifestum fiet ex prima præsentis libri parte.

PROPOSITIO PRIMA.

QVidin noſtra methodo ſit ſumma quadratorum, cuborum, quadratoquadratorum, & reliquorum in infinitum, quorum nomen deriuetur ex ſerie numerorum coſſicorum, ſiue denominatorum, quos Algebra inuenit.

Iſta numerorum nomina, tradit & explicat inter alios Clauius libri de Algebra ſcripti capite ſecundo; ea verò hîc recenſere omnia minimè neceſſarium putamus; ſatis enim nobis eſt poſt numerum abſolutum, proximè ſequi *radicem*, tum *quadratum*, *cubum* deinde, tum *quadratoquadratum* &c.

Eſto iam (*Fig.* 68.) parallelogrammum quodcunque a d f c, cuius latera oppoſita a d, c f producta contineant quatuor figuras d h f e, g m l i, n t o q, ſ r y p, inſiſtentes rectis d f, g l, n o, ſ y, ita vt ad poſitionem rectæ a d, quæcunque b r parallela rectæ a d ducatur, occurrens figurarum perimetris in b, e, h, i, m, q, t, p, r; rectæ b e, e h, i m, q t, p r (& ita in infinitum quotcunque addantur aliæ figuræ) ſint continuè proportionales. Hanc ſeriem & progreſſionem figurarum appellare ſoleo *gradualem*, ideoque ſingulas in octauæ tertij libri corollario appellaui *gradus*; primam, primum; ſecundam, ſecundum &c. quo etiam nomine vſus ſum in quadrageſima quarta prioris libri. Vt autem cum numeris ita conferantur, vt eorum nomina iam dicta eis congruant; intelligamus quamlibet numerorum progreſſionem Geometricam ab vnitate incipientem ita componi cùm gradibus, vt vnitati reſpondeat primus gradus; ſecundo termino quem Algebriſtæ vocant *radicem* reſpondeat ſecundus; tertio reſpondeat tertius, qui ab iiſdem dicitur *quadratus numerus*; quarto reſpondeat tertius, qui appellatur *cubus*; quinto quartus, qui dicitur *quadratoquadratus*. Manifeſtum eſt hanc eſſe concordiam inter gradus & terminos progreſſionis, vt ſicut ſi radix multiplicetur in ſe, hoc eſt, ſi vt vnitas ad radicem, ita fiat ipſa radix ad tertium numerum; tertius eſt quadratus: ita cùm vt b e quaſi vnitas, ad e h quaſi radicem; ita ſit ipſa e h ad i m, rectangulum quod gignitur ex ductu primæ b e in tertiam i m, eſſe æquale quadrato rectæ e h. Si ergo intelligatur dicylindraceum cuius baſis ſit d h f, cui *radix* numeralis reſpondet; ſectiones autem ad planum d h f perpendiculares ſint quadrata e h, manifeſtum eſt ex vndecima quarti tetragoniſmicorum, cylindraceum altitudinis æquantis rectam a d baſeos g m l i, eſſe ad poſitionem rectæ a d, condicta ratione æquale dicylindraceo illi cuius ſectiones ſunt quadrata h e. Igitur non abſurdè appellari poteſt cylindraceum baſeos g m l i, altudinis a d, *ſumma quadratorum* reſpondentium figuræ d h f, quaſi radici ad poſitionem rectæ a d.

Præterea quoniam in numeris ſi vt vnitas reſpondens gradui primo b e, ad radicem reſpondentem ſecundo, ita fiat quadratus numerus reſpondens tertio ad quartum, iſte quartus vocatur cubus; & ex ductu vnita-

tis in cubum gignitur idem numerus, qui ex ductu radicis in quadratum numerum; rectangulum verò quòd fit ex extremis nempe ex ductu primæ b e in quartam q t, est æquale rectangulo quod fit ex mediis videlicet ex secunda e h in tertiam i m; patet cylindraceum altitudinis b e vel a d, baseos m t o q esse æquale dicylindraceo genito ex e h, i m gradibus respondentibus radici & quadrato: ergo non malè vocetur cylindraceum altitudinis d a, baseos m t o q, *summa cuborum.* Simili de causa, cylindraceum altitudinis d a baseos s r y p vocari possit *summa quadratoquadratorum:* quia videlicet ex ductu rectæ b e in p r, gignitur spatium æquale illi, quod ex ductu rectæ e h, cui radix respondet, in q t sedem cubici numeri: ex ductu autem radicis in cubum gignitur quadratoquadratus numerus. Igitur ostendimus quid in nostra methodo appellari possit *summa quadratorum, cuborum* &c. nihil enim est aliud quam cylindraceum altitudinis a d, baseos tertij quarti &c. graduum.

COROLLARIVM I.

Ex demonstratis patet non ideo mutari methodum aliquam, quòd retentis rebus alia imponantur nomina; methodus enim his vestita nominibus eadem est cum illa, rectéque illi congruit illud Poëtæ *rebus idem, titulo differt.* Methodus itaque *indiuisibilium* quam vocant, nescio qua de causa, si nihil aliud aduehat in Antiquorum demonstrandi modum, nihil magni momenti præstat, nec de eo multùm laborare debemus. Sicuti nec curandum est quod multiplicari recta in rectam, vel in figuram dicatur; hoc enim nihil est aliud quam voces primò institutas pro numeris transferre ad quantitatem continuam; nam etiam Euclides libri septimi initio, numerorum alios planos, alios solidos appellauit, lateraque illis attribuit, traducendo hæc nomina ex quantitate continua ad discretam. Porrò in istis, gradum A, multiplicari per gradum B, nihil est aliud quàm sumi gradum C, qui tot in ista serie sedibus distet à gradu B, quot distat gradus A à gradu primo dimetientis b e. Nam ad positionem rectæ a d dicylindraceum genitum ex A ducto in B, est condicta ratione æquale cylindraceo genito ex primo in quartum C. Sicuti si primus sit vnitas, & A, B sint numeri; numerus A multiplicabitur in B, si vt vnitas ad A, ita fiat B ad C. Cùm igitur primus gradus repræsentet vnitatem, rectè instituta fuit operatio inter gradus, quæ respondeat multiplicationi numerorum. Hîc verò inculcandum duximus nos isto loquendi modo nolle gradus inter se esse proportionales; sed eorum dimetientes ad positionem rectæ a d sumptas. Dimetientes verò alicuius figuræ, vocamus rectas intra perimetrum ipsius figuræ accommodatas, & parallelas vni cuidam designatæ; quam vocis vim hîc iterum exposuisse, fortasse iuuabit.

COROLLARIVM II.

Istud hîc maximè attendi debet, si quis summam cuborum exempli causa quærat, hoc est quartum gradum, solui quidem vtcunque & facilè, dicendo esse secundum gradum multiplicatum per tertium: sed non

planè solui ad mentem inquirentis, & ad vsum rei quæsitæ intentum. Quæritur enim rotundè exempli causa si d h f e ponatur parua cycloides cuius axis e h, vt determinetur rectilineum æquale quarto gradui.

COROLLARIVM III.

Nos in præsenti propositione posuimus primum gradum esse parallelogrammum, quia illa hypothesis vtilissima est ad negotium quod tractare instituimus; potest tamen cum opus fuerit poni quælibet alia figura. Præterea sicuti in superficiebus contemplati sumus eiusmodi seriem graduum, ita possumus illam considerare in solidis si enim d h f e ponatur basis solidi cuiuslibet geniti, ad positionem rectæ a d, ex ipsa basi ducta in figuram quamlibet d z f e, series eadem solidorum continuabitur, si reliquis gradibus consequentibus altitudo d z f e addatur; eorúmque sectiones ad planum a d f rectæ, basium b e, e h, im &c. erunt proportionales. Abstineo tamen ab illo fusco Arabum cogitatu, satis nunc vsitato ab iis qui indiuisibilium methodo ingredi se profitentur, *magnitudinem genitam ex multiplicatione primi solidi in quartum, esse æqualem magnitudini genitæ ex multiplicatione in se duorum solidorum mediorum*: istud enim crudius est quam vt concoqui possit à stomacho cui cibus ad hunc diem fuit Euclidis, Archimedis & consequentium Græcorum Geometria simul, & Philosophia. Quapropter si quid veri iste loquendi modus continet, reducatur, quæso, ad aliquid intra fines triplicis dimensionis quantitatis continuæ collocatum; quod sanè exigit candor cogitationis Europeæ.

PROPOSITIO II.

Iisdem manentibus (*Fig.* 68.) tertius & quartus gradus inseruiunt proximè ad inuentionem solidi peripherici, geniti circumductu figuræ secundæ d h f e circa basim d f; & ad inuentionem interualli quo centrum grauitatis eiusdem semiperipherici distat à basi d f.

In superiore ostendimus cylindraceum altitudinis a d, baseos g m l i, quæ est tertius gradus, esse æquale dicylindraceo cuius sectiones sunt quadrata e h, basis d h f e: atqui istud dicylindraceum ad periphericum est vt quadratum circumscriptum circulo ad ipsum circulum, vt in tertij octaua, & nona ostendimus; ergo si vt quadratum circumscriptum ad circulum, ita fiat recta d a ad d u, patet cylindraceum altitudinis du, baseos g m l i esse æquale quadranti peripherici iam descripti: ergo tertius gradus proximè conducit ad inueniendum solidum altitudinis d u, quod æquale sit dicylindraceo cuius sectiones sunt quadrata e h, quod erat vnum ex demonstrandis.

Rursus quoniam in corollario octauæ tertij ostendimus libræ planæ axe d f, sustentaculò a c, æquiponderans solido cuius sectiones sunt quadrata e h, esse cylindraceum altitudinis d a, baseos æquantis dimidium quarti gradûs n t o q: in sexta autem eiusdem libri ostendimus bessem huius æquiponderantis esse æquale spatio quod iisdem manentibus æquiponderat

ponderat quadranti peripherici: ergo triens quarti gradus eſt baſis cylindracei altitudinis d a, quod æquiponderat quadranti peripherici, ergo duobus quadrantibus peripherici, hoc eſt ſemiperipherico quod ad recte d f partes h iacet, æquiponderat iiſdem manentibus cylindraceum altitudinis d a, baſeos æquantis beſſem quarti gradûs.

Præterea quoniam b c recta ad d x diſtantiam centri grauitatis ſe habet vt ſuſpenſum ſemiperiphericum ad æquiponderans; illud autem ad iſtud ſe habet vt baſis g m l i, quæ eſt tertius gradus, ad beſſem baſeos m t o q, quæ eſt quartus gradus; igitur cùm vt tertius gradus ad beſſem quarti, ita ſit a d recta ad d x diſtantiam centri, apertum eſt ſi tertius & quartus gradus reducantur ad rectilinea nota, ea proximè conducere ad inuentionem diſtantiæ d x, quod erat ſecundò propoſitum.

COROLLARIVM I.

Hinc apertè patet quod in corollario ſecundo ſuperioris monuimus, ad hoc vt methodus inueniendi diſtantiam d x cenſeatur plenè tradita, requiri vt figuræ n t o q, ſiue quarto gradui, ſiue ſummæ cuborum, inueniatur rectilineum æquale; & aliud figuræ g m l i ſiue tertio gradui, ſiue ſummæ quadratorum. Quod ſi adhuc multiplicatio aliqua reſtet facienda per aliquem gradum, problematis ſolutionem plenam nondum eſſe datam. Nam iuxta explicationem traditam harum vocum, ex multiplicatione oritur deſcenſus ad alium gradum inferiorem, qui aliquando eſt difficillimus inuentu, licet proximè ſuperior ſit rectilineo noto æqualis. Dettonuillæus tamen aliquando multiplicationem ita accipit vt per illam tranſitus fiat ad magnitudinem alterius dimenſionis, exempli cauſa ex figura d h f e per rectam a d multiplicatam, intelligit gigni ſolidum baſeos d h f e, altitudinis d a. Optandum eſſet vt omnes Geometræ vterentur Antiquorum vſitatis loquendi modis, nec vllum excogitarent, niſi neceſſitate cogente; ita enim eueniret, vt res melius intelligerentur, nihil Lectorem remorante vocum nouitate.

COROLLARIVM II.

Aduertendum eſt iſta ſerie non exhiberi figuram planam æqualem radici, ſiue ſecundo gradui d h f e, ideóque inueniendam eſſe methodum illius gradûs quadrandi, qui eſt veluti baſis reliquorum. Iſtud qua ratione ſtatim aſſequuti fuerimus, vbi propoſita ab Anonymo fuere problemata, conſtat ex libello tunc edito viginti de cycloide propoſitionum, qui eſt primus huius Operis, nempe per quadraturam cuneati, ſiue vngularis ſolidi vnius, & per quadraturam alterius dimidiati, vt monemus in corollario decimæ libri eiuſdem. Videndum nunc nobis eſt quo pacto id Gregorius à S. Vincentio & Dettonuillæus inuenerint.

PROPOSITIO III.

ESto (*Fig. 69.*) circulus b c n m centro a deſcriptus, cuius diametri b n, c m ſecent ſe ad angulos rectos: ſumptus ſit in qua-

drante b d c, quilibet arcus b p (etiamsi punctum p congruat puncto c) & per p ducta sit p o parallela rectæ b a : arcui p d b intelligatur insistere superficies cylindrica recta, ita vt perpendiculares punctis d insistentes æquent applicatas d i ad semidiametrum a c. Istam superficiem esse cuneatam vel vngularem monstrauimus in octauâ secundi libri propositione; eamque esse æqualem rectangulo c a o ostendisse diximus P. Gregorium à S. Vincentio propositione 45. & 54. libri noni quadraturæ circuli, editi anno 1657. Istud ipsum demonstrat Dettonuillæus in suo illo de cycloide libro quem præsenti anno vulgauit, *tractatûs de sinibus propositione prima.*

Nunc ostendendum suscipio eadem methodo id vtrumque præstitisse, & in hoc solùm esse discrimen, quod postquam statutum est fundamentum sufficiens ad id concludendum celebri illa Antiquorum methodo, quæ procedit per reductionem ad impossibile, Gregorius à S. Vincentio id toto illorum Antiquorum & Geometriæ apparatu præstiterit; Dettonuillæus verò rem contraxerit, intelligendamque Lectori reliquerit; quod solent Recentiores aliqui iam præstare sine vllo veritatis damno, dummodo constet cætera, quæ ad id necessaria sunt, rectè esse constituta.

Gregorius à S. Vincentio propositionem trigesimam libri noni iam laudati monet esse Pappi vigesimam secundam in Collect. Mathemat. ea verò demonstratur, quantumuis exigua sit recta e d e tangens in puncto d, si ex e demittantur perpendiculares e r, rectangulum contentum sub ordinatim applicata d i & sub tangente e e esse æquale rectangulo contento sub radio a c & sub recta r r. Ex eo autem quod (vbicunque sumatur punctum d, & quamlibet parua sit recta r r) id perpetuâ lege euincatur, sequitur cætera posse in circulo apparari ad concludendum more Antiquorum; sicuti ab illa trigesima septima ad quadragesimam quintam apparatum istum Geometricè explicat Gregorius. At verò Dettonuillæus ita succinctè rem tractat, vt nullius mentione facta assumat in Lemmatium, propositionem quam ad Pappum referendam esse diximus, & sine qua quod propositum fuit ostendi non posset illâ saltem methodo. *Ducendo*, inquit, *ab omnibus punctis d tangentes d e, quarum qualibet tangat sibi proximam in punctis e, & demittendo perpendiculares e r: patet vnumquemque sinum d i multiplicatum per tangentem e e, æqualem esse vnicuique distantiæ r r multiplicatæ per radium a b.* Equidem hoc loco non semel suspexi huius Autoris acrem ingenij vim, qua statim vidit id, quod Gregorius à S. Vincentio deriuasse se à Pappo candidè fatetur: imprimis verò admiratus sum eius fœlicitatem in inueniendo illo ipso quadraturæ superficiei illius cylindricæ problemate scitu dignissimo, eadem prorsus viâ, quam Gregorium te-

nuiſſe conſtat iam ab annis vndecim; tot enim fluxere ex quo eſt editum illius volumen. Nam ſi illam viam à Gregorio antè fuiſſe factam agnouiſſet, id pro ſuo candore nullatenus diſſimulaſſet.

Gregorius quidem quadrat illam ſuperficiem cylindricam nondum expanſam, ſed adhuc arcuatam; Dettonuillæus autem conſiderat illam iam expanſam: attamen aſſumit æquales eſſe expanſam & contractam, neque id probat: quapropter potuiſſet id quoque aſſumi à Gregorio, ſi expanſam voluiſſet quadrare. An autem ſint æquales expanſa & contracta diximus in ſcholio illius octauæ propoſitionis ſecundi libri, & in corollario propoſitionis vigeſimæ libri quinti ſuperioris.

PROPOSITIO IV.

INtelligatur (*Fig.* 69.) curua quælibet p d b in plano p o a, intercepta inter parallelas rectas d o, b a, quas ſecet recta o a; intelligatur ſuper recta o a inſiſtere figura quædam ad planum l a b recta, & ſuper curuâ p d b inſiſtere altera, ita reſpondens illi quæ ſuper o a erigitur, vt quæcunque duo plana parallela rectæ b a, & recta ad planum c a b ſecent duas illas figuras, portiones earum inter illa interceptæ, ſint inuicem æquales; quantumlibet earum ad planum c a b perpendiculares, plano eidem parallelo reſpondentes ſint inæquales. Super eadem a o vel ſuper curuâ p d b intelligatur alia quælibet figura inſiſtere perpendiculariter.

Oſtendendum eſt ſi poſtuletur & concedatur ſingulas iſtarum duarum figurarum multiplicatas ad poſitionem rectæ b a per tertiam aliquam gignere æqualia ſpatia; ſummam quadratorum, cuborum, & quadratoquadratorum eſſe rectè aſſignatam à Dettonuillæo propoſitionibus ſecunda, tertia & quarta *tractatûs ſinuum.*

Aduertendum eſt licet iſtud non poſtuletur à Dettonuillæo; poſtulari tamen aut demonſtrari debere, vt rationes eius cogant. In methodo, quam indiuiſibilium dicunt, iſtud ego deprehendo à Geometria alienum, quod paſſim & tacitè vſurpantur propoſitiones tanquam euidentes & certæ, quæ neque ab vllo adhuc demonſtratæ ſunt, nec monentur Lectores vim demonſtrandi fundari in vno quod tamdiu poſtulandum ſit, quouſque demonſtretur; vel certè quod ita euidens ex ſe ſit, vt inter principia per ſe nota corollari debeat.

Iſto ergo poſtulato & conceſſo, ſit vt in propoſitione ſuperiore p d b arcus circuli aſſumptus, & illi inſiſtat ſuperficies cuneata, ita vt ex puncto d perpendicularis in planum c a b excitata ſit æqualis ſinui i d: ſuper recta a c conſtructum ſit quadratum inſiſtens eidem plano c a b. Igitur ex ſuperiore propoſitione duæ iſtæ ſuperficies ita ſe habet vt earum portiones interceptæ inter quælibet duo plana parallela ad rectam h l, & recta ad planum c a b, ſint æquales: ergo per poſtulatum iſtud, ſi rectæ c a

insistere intelligatur quadrans circularis centro a descriptus, & per istum quadrantem multiplicentur duæ illæ figuræ, prodibit æquale vtrinque spatium; & ratione figuræ insistentis rectæ o a, illud spatium est cylindraceum altitudinis a b, baseos o p d b a, vt patet, cùm figura insistens rectæ o a sit parallelogramma rectangula. Porrò illa multiplicatio debet ita intelligi vt sicut radius a c est ad dimetientẽ figuræ insistentis super recta a o cadentem perpendiculariter in rectæ o c punctum i; ita fiat dimetiens quadrantis circularis respondens puncto i, ad quartam eidem puncto i insistentem perpendiculariter ad planum c a b. Quapropter cùm radius a c æquet dimetientem figuræ parallelogrammæ insistentis super recta a o; patet quartam figuram ex hac multiplicatione genitam super basi a o esse æqualem portioni quadrantis circularis super eadem a o erecti. In curua autem p d b illa multiplicatio ita debet concipi, vt sicut radius a c est ad dimetientem figuræ insistentis super curua p d b cadentem perpendiculariter in curuæ p d b punctum d; ita fiat dimetiens figuræ insistentis super curuâ, respondens puncto d, ad quartam eidem puncto d insistentem perpendiculariter ad planum c a b. Figura itaque cuius basis est curua p d b, dimetiens verò est ista quarta iam reperta, est æqualis alteri figuræ cuius basis est a o, dimetiens verò est quarta illa proportionalis antè reperta. Istæ verò figuræ vtrinque prodeuntes ex generatione vel multiplicatione iam exposita habent vt patet proprietatem quam præsens propositio requirit. Vocentur *figuræ coniugatæ primæ generationis*. Figuræ autem vnde generantur vocentur *coniugatæ radices, basium rectæ & curuæ*.

Porro figuræ illæ coniugatæ primæ generationis cùm habeant proprietatem quam requirit postulatum, si intelligantur rursus insistere, vna quidem curuæ p d b vnde ortum habet, altera verò rectæ o a vnde prodiit, & intelligantur pari prorsus modo multiplicari per eandem figuram o p d b a (quæ est eadem cum illa portione quadrantis circuli insistentis super radio c o, interceptâ inter parallela plana per o d, a b rectas ducta) prodibit æqualis vtrinque figura coniugata secundæ generationis. Cùm itaque figura quæ primò in rectâ o a prodiit, sit ipsa o p d b a, & ponatur multiplicari in se ipsam, prodibit secundò ratione figuræ insistentis super o a, tertius gradus, cuius primus ad positionem rectæ a b sit quadratum b a c, secundus sit quadrans circularis: ac proinde si intelligatur alius ordo graduum quorum primus sit parallelogrammum mixtum altitudinis æquantis rectam a b, baseos curuæ p d b, secundus sit cuneata vel vngularis superficies illi insistens, eueniet mirabili prorsus duplicis istius seriei affinitate, vt primus gradus illius æquet secundum istius; secundus tertium; tertius quartum, & ita deinceps progressu quantocunque. Cæterùm gradus omnes primæ illius seriei (data quadratura circuli pro illis qui paribus numeris computantur) quadrauimus in libello ea de re nondum edito vt in scholio quadragesimæ quartæ quinti superioris libri

monuimus; in editis verò tertium & quartum quadramus, vt constat ex quadragesima secunda eiusdem libri quinti.

Superest vt ostendamus Dettonuillæum rectè statuisse de summis quadratorum, cuborum, & quadratoquadratorum dato hoc postulato. Ait enim summam quadratorum esse æqualem figuræ o p d b a multiplicatæ per radium a b, quod patet ex iam demonstratis, cùm sit æqualis parallelogrammo insistenti super a o multiplicato per portionem quadrantis circularis insistentis super c a, illa autem portio, vt diximus, sit ipsa o p d b a: ergo summa quadratorum est rectè constituta ab illo Autore, dato præsenti postulato

Præterea idem Dettonuillæus ait summam cuborum esse æqualem summæ figuræ o p d b a multiplicatæ per quadratum radij b a; quod manifestum est ex iam demonstratis; est enim æqualis tertio gradui primæ seriei, ille autem gignitur ex multiplicatione o p d b a per quadratum radij b a, hoc est, parallelogrammi insistentis super recta a c. Hîc tamen annotari debet, quod in illo corollario secundo primæ propositionis diximus; istos nimirum soluendi problemata modos dare locum vlteriori solutioni problematum, antequam ad postremam rei propositæ exequutionem perueniri possit.

Denique ille idem Autor asserit summam quadratoquadratorum esse æqualem summæ figuræ circularis o p d b a cubicè sumptæ, & multiplicatæ per radium o a. Figura enim circularis o p d b a cubicè sumpta est æqualis cylindraceo altitudinis æquantis radium, baseos quæ sit quartus gradus primæ seriei: ergo demonstratis consonat assertio Dettonuillana; sed, vt ad vltimam rei decisionem veniatur, eget vlteriore solutione, vt iam annotauimus; neque ex huius solutionis inopia vitio vllo laboraret eius liber; ea enim ex eius tractatu *solidorum circularium* erueretur: ergo &c. quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Istud ego postulatum pro præsenti cycloideos causâ facilè concedo, adductus ad id conuenientiâ quam deprehendi inter meas problematum eorundem solutiones, quas in tertio libro tradidi, & inter eas quæ ex hoc postulato euincuntur. Porrò meæ illæ solutiones nullatenus pendent ex illo postulato, vt examinanti patebit. Quod si postulatũ sit verum in cycloideos causâ, non apparet ratio cur in vniuersum admitti non poßit.

PROPOSITIO V.

SI postuletur, iisdem manentibus (*Fig. 69.*) vt duæ illæ figuræ quarum vna insistit curuæ p d b, altera rectæ o a manentes vt iacent, habeant centrum grauitatis in eodem plano ad planum c a b recto, & parallelo rectæ h l; concessio illius nihil pugnabit cum demonstratis aliunde à nobis, in istis de cycloide problematis.

Ista consonantia liquet ex vigesima secunda superioris libri; ibi enim ostendimus cuneatæ istius superficiei hinc & inde arcubus c d b, c g n, in-

ſiſtentis ad oppoſitas partes plani c a b, ac proinde & ſuperficiei ſphæricæ deſcriptæ motu ſemicirculi b c n circa c a manentem, centrum grauitatis eſſe in puncto quod bifariam ſecat radium a c. Id verò liquet ex poſtulato præſenti; namquadrati inſiſtentis ſuper recta c a, & alterius ad partes oppoſitas inſiſtentis ſuper eadem recta c a, centrum grauitatis eſt vt patet, in eodem puncto, quod bifariam ſecat radium a c. Ita quoque, cùm ibidem oſtenderimus, ſi ſumatur peripheria intercepta inter planum per a b ductum, & inter aliud per biſectionem rectæ a c, quorum vtrumque ſit rectum ad planum c a b; centrum grauitatis eſſe in biſectione portionis radij c a, interceptæ inter illa plana: patet id ad vnguem congruere iam demonſtratis ex illo poſtulato: ex quo illud generale obtinetur; *Centrum grauitatis portionis ſuperficiei ſphæricæ interceptæ inter duo qualibet plana dicto iam modo parallela, eſſe in biſectione portionis radij a c, interceptæ inter eadem plana.* Ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Poſtulatum, vt cernis, eſt *centrum vtriuſque ſuperficiei vt iacet manentis, eſſe in eodem plano ad planum c a b recto & parallelo ad rectam a b*: ſed ſi hoc ipſum centrum grauitatis in eadem ſectione plani paralleli, & figuræ inſiſtentis ſuper curua retineri velis, poſtquam figura illa expanſa fuerit; longè errabis, nec poſtulato iſto tuum errorem iure excuſare poteris.

COROLLARIVM II.

Iſtud poſtulatum poteſt demonſtrari ex ſuperiore; nam ambæ ſuperficies habent centrum in eodem illo plano; ſi, cùm ſint figuræ æquales, habeant quadratrices ſiue ſpatia æquiponderantia æqualia, libræ planæ axe o d; habent autem quadratrices æquales ex quadrageſimâ ſuperioris libri, ſi ad poſitionem eiuſdem plani multiplicata per triangulum quodcunque o u a rectilineum, dent æquale ſpatium; atqui ex ſuperiore dant æquale ſpatium; ergo ſuperiore poſtulato ſemel conceſſo, non poteſt negari iſtud.

PROPOSITIO VI.

Noſtra quadratricum generatio proponitur, explicatur, conferturque cum Dettonuillana.

Eſto (*Fig. 66.*) in ſchemate quadrageſimæ ſuperioris libri b c d a quælibet figura ad poſitionem rectæ a d inſiſtens baſi b a; eſto quoque, vt ibidem præſcriptum fuit, figura a n b m ita genita vt ſicut g a ipſi b a æqualis ſe habet ad a m quamlibet portionem abſciſſam ex g a producta, ita ſit m o dimetiens figuræ b c a d parallela rectæ a d, ad m n dimetientem figuræ a n b m, quam quadratricem primam iam olim appellamus; & ita quoque ſit m n ad m r dimetientem figuræ a r b m, quam ſecundam quadratricem appellare ſolemus.

Oſtendimus in ſeptima ſecundi tetragoniſmicorum, librâ grammicâ

g b ſuſpenſâ ex a, perpendiculo a d, brachio g a, æquiponderans aptatum puncto g eſſe æquale quadratrici a n b m: ſimiliterque æquiponderans quadratrici primæ, eſſe æquale quadratrici ſecundæ a r b m; & ita de tertia comparata ad ſecundam; deque quarta ad tertiam; & ſic deinceps. Oſtendimus autem illud methodo Archimedeâ per reductionem ad impoſſibile; ideóque in antecedentibus præparauimus quæ neceſſaria erant, ad iſtud concluſionis genus. Si quis verò nunc temporis quæ tantùm ſunt neceſſaria ad illum deducendi modum aſſumat, vel etiam interpolet, & reliquum apparatum, veluti ſyrma Geometriæ longius, præcidat, inferatque illud ſpatium æquiponderans eſſe æquale quadratrici; cuius etiam nomen immutet; næ ille exiguam operam Geometriæ præſtet, & probrum ſibi multum potiùs quam laudis quicquam creet.

Quoniam verò vt g a brachium ad a m; ita eſt m o ad m n; & ita eſt m n ad m r; patet primò rectangulum ſub extremis g a, m n eſſe æquale rectangulo ſub mediis a m, m o, vel q m, m o; ac proinde, poſito quod triangulum a b e ſtet rectum ſuper plano b a d, cylindraceum altitudinis g a, baſeos a n b, eſſe æquale dicylindraceo q m o, progenito ex triangulo e a b & ex figura a d c b, ad poſitionem rectæ a d. Patet ſecundo Dettonuillæi *ſummam triangularem* reſpondentem figuræ a d c b inchoando ex puncto a, eſſe dicylindraceum illud: nam in prima proprietate tractatûs ſcripti de *proprietatibus ſummarum ſimplicium, triangularium, & pyramidalium* pag. 1. monet ſummam rectangulorum a m in m o nihil aliud eſſe quàm ſummam triangularem omnium m o (hoc eſt figuræ a d b m) initio ſumpto ex a. Hoc ipſum diſertè docuerat in epiſtola ad D. de Carcaui pag. 16. ipſum etiam ſolidum dicylindraceum q m o, quod æquiualet cylindraceo altitudinis g a, baſeos m n, appellare ſolet eodem nomine ſummæ triangularis. Perſpicis apertè, Lector, nomen *ſummæ triangularis* eſſe quidem nouum, cogitationem tamen rei illi nomini ſubiectæ noſtram tunc ſaltem fuiſſe, cum libros tetragoniſmicos ante decem ferme annos ederemus: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

In lineis Dettonuillæus eodem pacto explicat ſummas iſtas, nimirum per quadrataria ſpatia parallelogrammorum illis inſiſtentium; ſicuti ſummas in planis figuris explicuit per quadrataria ſpatia cylindraceorum illis inſiſtentium, quod fieri poſſe oſtendimus in quinquageſimæ propoſitionis libri quinti corollario ſecundo; id tamen non eſſe neceſſarium niſi pro lineis; quod, cùm aliunde rei difficultatem augeat, nunquam vſurpamus, vbi dantur quadrataria ſpatia eiuſdem cum ſpatio ſuſpenſo generis. Cur enim ad aliud genus recurramus, ſi neceſſitas nulla ad id cogat. Dettonuillæus tamen perpetuò adhibet magnitudines alterius generis; vnde fit vt pro ſolidis trinæ dimenſionis excogitet quædam ſolida quaternarum dimenſionum.

PROPOSITIO VII.

QVadratricum nostrarum subcontrariarum proprietas declaratur illa ipsa, quam summis suis triangularibus subcontraiis Dettonuillæus adscribit.

Propositione nona secundi libri tetragonismicorum ostendimus (*Fig. 66.*) si ex g b auferatur b u ipsi a b æqualis, ita vt tres rectæ, g a, a b, b u sint æquales, quadratricem respondentem brachio b u esse ipsam b c d a n, hoc est ipsam a d c b imminutam quadratrice subcontraria a n b m. Inde verò fit, si per centrum grauitatis figuræ a d c b ducatur m o parallela perpendiculo a d, vt est quadratrix brachij g a, nempe a n b m, ad quadratricem brachij b u, nempe ad b c d a n; ita esse longitudinem a m ad m b. Nam ex lege libræ demonstrata ab Archimede, vt a m recta ad rectam a g; ita æquiponderans aptatum puncto g, ad figuram suspensam a d c b: ita pariter vt brachium b u vel g a ad longitudinem b m; sic est eadem figura suspensa ad æquiponderans aptatum puncto u, hoc est ad figuram b c d a n: ergo ex æquo, vt recta a m ad m b, ita est quadratrix genita brachio g a, ad quadratricem genitam brachio b u; hoc est, ita est triangularis summa initio sumpto ab a ad triangularem summam initio facto à b. Dettonuillæus rectam a b vocat *libram*, & longitudines a m, m b appellat *brachia*; vnde in epistola ad D. Carcaui pag. 9. asserit summam triangularem incipiendo à puncto b, esse ad summam triangularem cuius initium sumatur à puncto a, vt brachium b m ad brachium m a. Ecce miram concordiam cogitationum antiquarum & recentium; en vt duo homines de eadem re cogitabundi sæpe sæpius in eadem inuenta conueniant, esto in nominandis & appellandis illis discrepent: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

QVid Dettonuillæus nomine *summarum pyramidalium* intelligat, & quid inuentis, quæ ante se extabant, addat.

Quod in corollario sextæ superioris monuimus, hic iterum & paulò fusiùs nobis censemus narrandum. Tria sunt tam apud Physicos quàm Geometras genera magnitudinis siue ποσότης, (quam in Scholis *quantitatem* appellamus) Linea, superficies, & corpus. Linea est vnius dimensionis, siue vt ait Euclides longitudo latitudinis expers; superficies pari pacto definietur longitudo & latitudo absque profunditate; corpus denique triplici illa dimensione est præditum, longitudine, latitudine, & profunditate. Rerum per se natura exigere videtur, vt quadratrix lineæ, sit linea; superficiei, superficies; solidi, solidum. Quia tamen lineæ quadratrix nulla in eodem genere excogitari potest, mutuò illam accipit à secundo genere, nempe à superficie parallelogrammâ rectilineâ, vel mixtâ, vt explicatum fuit in quinquagesimæ superioris libri corollario secundo.

cundo. Nos pro lineis curuis mutuati ſumus quadratrices aliunde, quia illas in eodem genere non reperimus; at verò pro ſuperficiebus & ſolidis, natiuas eis & congenitas intra idem genus aſſignauimus.

Reciproca libræ lex, qua vt ſuſpenſum a d c b (*Fig. 66.*) ad quadratricem a n b m, ita eſt baachium g a ad a m diſtantiam, qua figuræ a d c b centrum grauitatis diſtat à perpendiculo a d, non habet locum, quoties ſuſpenſum & quadratrix eius, ſunt generis diuerſi; ſicuti enim punctum rationem nullam habet ad lineam, ita neque linea ad ſuperficiem; neque ſuperficies ad ſolidum trinæ dimenſionis; neque iſtud ad aliud quaternæ, aut quinæ &c. dimenſionum; ſi quis illas capiat cogitando. Quadratrix tamen diuerſi generis non erit continuò repudianda veluti prorſus inutilis; nam quoties ſuperiori *quantitatis* generi ſimul & inferiori eadem proprietas competere demonſtratur, toties quod in ſuperiori demonſtratum fuerit, locum habebit in inferiore. Ita cùm oſtenderimus parallelogrammi mixti hanc eſſe proprietatem vt ſi per grauitatis eius centrum ducatur recta parallela lateribus, punctum in quo ſecabitur planum baſeos curuæ, ſit grauitatis centrum eiuſdem curuæ; non inutiliter quæritur quadratrix parallelogrãmi mixti; & ſatis ſpecioſè, vt patet, iſta quadratrix dicitur pertinere ad lineam curuam; quamuis enim non propriè pertineat, commodatur tamen illi ad præſentem vſum. Simili prorſus pacto euenire poteſt vt per quadratrices proprias ſolidorum inueniantur centra grauitatis baſium; nam ſi per centrum grauitatis cylindracei cuiuſlibet duxeris rectam parallelam rectæ cuius motu ſuperficies illius cylindracea deſcripta fuit, punctum in quo iſta parallela ſecat baſim, eſt eiuſdem baſeos centrum grauitatis; poteſt itaque per quadratrices ſolidi cylindacei haberi centrum grauitatis baſeos, & eatenus quadratrix ſolidi poterit inſeruire baſi. Pari prorſus pacto ſi baſis iſta, verbi cauſa, a d c b non tantùm multiplicetur in rectam p a (quod accidit iuxta iſtum Recentiorum loquendi modum quando ponitur baſis cylindracei habentis altitudinem a p) ſed in quadratum, vel cubum, &c. rectæ a p, ſolido inde genito quaternæ vel quinæ vel ſenæ &c. dimenſionis, reſpondebit quadratrix baſeos a n b (quæ eſt propria quadratrix figuræ a d c b, genita brachio g a, perpendiculo a d) multiplicata in quadratum, vel cubum &c. rectæ eiuſdem a p. Vnde liquet ſi baſeos a d c b multiplicatæ in quadratum a p habeantur mutuatæ quadratrices illæ quas ſubcontrarias diximus in propoſitione ſeptimâ, & iſtæ ſubcontrariæ habeant baſes multiplicatas in idem quadratum a p; ex earum ratione, obtineri, (ſi recta m o tranſeat per greuitatis centrum baſeos a d c b) rationem rectarum a m, m b, vt ex illa ſeptima liquet. Non igitur inutiles ſunt, dummodo ſuſpenſum & quadratrix iſta reuocentur ad ſolida earundem (quotcunque illæ fingantur) dimenſionum; nam cùm ſuſpenſi baſis fuerit a d c b, baſis quadratricis illius erit quadratrix a n b m noſtrâ methodo reperta. Quorſum, inquies, illa ſolida tot ſupra ternarium dimenſionum, ſi eorum

tantummodo baſes quæruntur? numquid ſatius foret illa adeo obſcuræ fabricationis corpora prætermittere? Reſpondeo ſatius quidem foret, ſi aliter & commodiore machina veritas è puteo illo veterum fabulis celebratiſſimo extrahi poſſet; ſed qui Algebriſmum in Geometriam introduxerunt, illóque vtuntur ad veritatem indagandam, non poſſunt quin ſæpe iſtis ſolidis vtantur in progreſſu demonſtrationis; quod in curſu demonſtrationis eiuſmodi eſto illis cōceſſum, dummodo, cum ad metas eius peruentum fuerit, reductione omni peracta, res redeat ad quadratrices ſimplices & natiuas, quas ſolas noſtra methodus parit. Solida iſta ὑπερϛερεοδιαςάτικα, (hanc vocem nouam in re noua deſignanda fingere liceat) quorum baſes ſunt quadratrices noſtræ ſecundæ, Dettonuillæus Algebriſmi iſtius ſectator, vocat *ſummas pyramidales*. Hinc autem manifeſtum fit, ſi nobis notæ olim fuerint iſtæ ſecundæ quadratrices, notas pariter fuiſſe ſummas pyramidales Dettonuillanas, ſaltem quod ad earum nucleum attinet excretum à reiectaneo putamine. Sed veniamus ad rem propoſitam, liceatque nobis in præſentis propoſitionis demonſtratione eiuſmodi ſolidis, quæ ſuperant τρίτην διάςασιν, more Dettonuillano, vti.

In epiſtola ad D. de Carcaui pag. 16. docet expreſsè (*Fig. 66.*) bis ſummam pyramidalem ordinatarum m o initio ducto a b a, eſſe æqualem ſummæ ſolidorum effectorum ab iiſdem ordinatis m o ductis ſigillatim in quadratum a m; vnde patet iſtud ſolidum eſſe quartæ dimenſionis; ſubiungit verò ſtatim neminem offendi debere hac quarta dimenſione, cùm reduci poſſit ad vnam ex tribus notis & receptis apud omnes.

Quoniam autem ex generatione à nobis traditâ primæ & ſecundæ quadratricum, vt eſt g a recta ad a m, ita eſt ordinata m o ad m n; & ita quoque eſt ordinata m n ad m r; ergo vt g a recta ad a m rectam, ita eſt a m in m o, ad a m in m n; cùm a m in m o, & a m in m n ſint eadem altitudine a m prædita, ac proinde rationem habeant baſium m o, m n; quæ eſt ipſa rectarum g a, a m. Igitur habemus quatuor magnitudines proportionales prima eſt recta g a, ſecunda eſt recta a m, tertia eſt rectangulum a m in m o, quarta rectangulum a m in m n, vel illi æquale g a in m r, cùm vt recta g a ad rectam a m, ita ponamus eſſe m n rectam ad m r rectam. Ergo ſolidum genitum ex prima g a & ex extrema g a in m r, hoc eſt ſolidum g a in g a in m r, eſt æquale ſolido genito ex ſecunda & tertia, hoc eſt, ſolido ex a m in a m in m o; hoc eſt ſolido genito ex m o in a m quadratum. Igitur ſolidum quartæ dimenſionis genitum ex m r in g a quadratum, eſt æquale ſolido genito ex ordinata m o in a m quadratum.

Quoniam igitur ſumma pyramidalis Dettonuillana cuius initium ſumatur à linea a d eſt, vt ipſe ſtatuit, dimidium ſolidi geniti ex ordinatim applicata m o in quadratum a m, patet eſſe quoque dimidium ſolidi geniti ex m r ordinatim applicata ſecundæ quadratricis in quadratum g a; quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM I.

Quoniam Dettonuillæus eo loco vbi ex professo tradit naturam summæ pyramidalis constituit eam esse dimidium summæ ordinatarum m o in quadratum a m initio facto ab a, idemque admonet sub finem tractatûs solidorum circularium, & passim alibi; quod affirmat in prima proprietate tractatûs *de summis simplicibus, triangularibus, & pyramidalibus* pag. 2. *summam pyramidalem omnium m o initij a d, esse summam omnium m o in m a quadratum*, emendari debet, ne pugnantia in eodem libro scripserit.

COROLLARIVM II.

Hinc sequitur præterea nomen summæ pyramidalis fuisse quidem antea inauditum, rem tamen ipsam reductione peracta, nihil aliud fuisse quàm dimidium quadratricis secundæ m r ductum in quadratum g a; illud autem dimidium ita sumi debet vt omnes ordinatæ m r bifariam secentur limbo diuidente quadratricem a r b m in duas partes æquales.

COROLLARIVM III.

Patet ex demonstratis cùm quadratrix secunda ad positionem rectæ a d sit ad primam vt est prima ad radicem; ipsam secundam esse quadratricem primam respectu primæ; ac proinde cùm ordinatæ omnes m n inchoando ab a, habeant summam triangularẽ siue cuneum quadratarium, æqualem cylindraceo altitudinis p a, vel b e, baseos a r b m; manifestum est summam triangularem rectangulorum contentorum sub ordinata m n & sub perpendiculari ex m excitata ad planum b a d, æquante altitudinem a p, esse æqualem omnibus m r ductis in quadratum a p. Ergo cùm omnes m n ductæ in altitudinem a p sint summa triangularis omnium m o, vt ostendimus in superiore, apertum est summam triangularem summæ triangularis omnium m o, esse summam illam quam Dettonuillæus *pyramidalem* appellat. Cùm igitur, mathematicè demonstratum sit, summam triangularem summarum triangularium ad m o ordinatam attinentium gigni ex m o in quadratum a m; non video qua ratione istud concordet cum pronuntiato Dettonuillæi in epistola illa pag. 15. *summam pyramidalem esse summam triangularem summarum triagularium*, nihilominus tamen *non esse nisi dimidium ordinatarum m o in quadratum a m.*

COROLLARIVM IV.

Non tamen inde inferre vllus debet negari à nobis quod Dettonuillæus affirmat *triangulares numeros hanc habere proprietatem Vt duplum eorum imminutum numero exponente, sit æquale quadrato numeri ipsius exponentis*; concedimus enim id lubenter; imò addimus non fuisse confugiendum ad triangulares numeros, vt ostenderet summam eorum ad Geometrica ista applicatam esse dimidium quadrati a m; id enim in Geometria clarissimum est ipsis tyronibus, nempe triangulum a m q esse dimidium quadrati a m vel m q, quoties a b e f est quadratum. In Geometria quoque illud certum est, triangula a m q, esse inter se vt rectas l m; ac proinde ipsa

etiam quadrata a m esse inter se vt rectas l m. Id tamen nihil obstat, vt demonstrauimus, quominus omnes m o ductæ in quadratum a m æquent summam triangularem summæ triangularis omniũ m o. Sed hac controuersia seposita, sumamus quod magis constanter asseritur à Dettonuillæo, *summam pyramidalem* eam esse quæ æqualis est dimidio summæ factæ ex m o ordinata in quadratum a m; vel ex dimidio quadratricis secundæ a r b m per nostram methodum inuentæ, & ex quadrato a b. Hæc secunda quadratrix vocetur *summa pyramidalis nostra methodi*, vt distinguatur à summa *pyramidali Dettonuillana*.

PROPOSITIO IX.

Qvadratricum nostrarum in solidis, superficiebus & lineis, altera proprietas & generatio demonstratur.

Iisdem manentibus (*Fig. 66.*) intelligatur recta b e esse perpendicularis ad planum b a d, & æqualis rectæ a b. Cylindraceum altitudinis b e, cuius basis sit quadratrix prima a n b æquale esse cuneato solido cuius basis sit figura a d c b m, altitudo verò triangulum a e b, ostendimus in quarti tetragonismicorum libri propositione vigesima prima. Porrò cuneatum solidum siue vngulare, vt definiuimus ibidem, est portio cylindracei (quod perspicuitatis maioris causa ponimus esse rectum) intercepta inter basim a d c b, & inter planum e a d. Potest quidem cylindraceum non esse rectum; potest quoque inclinatio plani e a d esse alia; sed illa omnia satis intelliguntur, si istud cuneatum, quod *primarium* appellamus, rectè cogitetur.

Præterea ostendimus in vigesima secunda eiusdem quarti libri ipsum cuneatum esse dimidium solidi dicylindracei, cuius hæc est proprietas, vt sectiones eius omnes parallelæ plano e b a, vel p a b, sint quadrata quorum latera sint rectæ intra figuram b c d a accommodatæ ad positionem rectæ b a. Cuneatum istud solidum in cylindro contemplatus est & quadrauit primus, quem sciam, noster Gregorius à S. Vincentio initio libri noni per propositiones octoginta: in cylindraceo verò cuius basis sit parabola, idem Gregorius à propositione octogesima per consequentes viginti quatuor summa eruditione: in cylindraceo denique cuius basis sit hyperbola, quinam illum in parallelepipedum verterint, narrauimus in præfatione libri præsentis. Istud solidum vocauit Gregorius *Vngulam*; Dettonuillæus in Gallico scripto *Vngulettum vel Vnglettum*; Andreas Tacquet *portionem cylindricam*; Nos *cuneum*, *vel cuneatum solidum*. Istud autem solidum cuneatum esse ad positionem plani p a d vel e b A ęquale condicta ratione cylindraceo baseos b a n, altitudinis a p vel b e, ostendimus in vigesima quinta, & vigesima sexta quarti tetragonismicorum, necnon in quadragesima superioris libri. Vnde patet vtrumque appellari posse quadratricem figuram solidam cylindracei habentis basim a d c b, altitudinem a p; ex quo fiat vt si planum q m o ponatur duci per centrum gra-

uiratis cylindracei, vt est brachium g a ad longitudinem a m, ita sit cylindraceum ad quadratricem figuram solidam alterutram, & ita quoque sit basis b c d a cylindracei suspensi ad basim a n b m figuræ quadratricis eadem altitudine præditæ.

Quadratrix solida cuneata, siue vngulare corpus baseos b a d c comprehensum inter plana e a b, e a d & superficiem cylindricam basimque b a d c, intelligatur secari plano ad basim parallelo; ita vt in plano e a b ad planum b a d recto faciat sectionem q M parallelam rectæ a b, & per q intersectionem rectarum ea, q M ducto plano ad planum p a d, vel e b A parallelo, eius sectiones cum planis e a b, b a d sint rectæ q m, m o parallelæ rectis e b, a d. Patet sectionem vngularis istius solidi, siue quadratricis cuneatæ solidæ effectam plano per q M ducto æquidistanter basi b a d c, esse similem, æqualem & similiter positum baseos b a d o c b portioni o c b m: Atque hæc est proprietas quæ demonstranda erat in solida quadratrice cuneata, vnde eius generatio tradi potest.

Simillima autem intelligi potest (*Fig.* 57.) in quadratrice parallelogrammi mixti b l m e c h; eius enim quadratrix b i e c h, talis est vt quocunque per i plano ad suppositum planum b h c o parallelo secetur, sectio illa sit parallela, similis, æqualis, & similiter posita arcui h c. Quod non minus verùm est si b h c non sit curua sed recta: ergo in superficiebus & solidis ostendimus proprietatem alteram quadratricis, ex qua ipsius generatio peti possit, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Hinc patet Dettonuillæum pronuntiasse quidem in tractatûs *de trilineis & vngulettis* propositione septima, summam quadratorum trilinei esse æqualem duplo summæ triangularis eiusdem trilinei inchoatam à puncto a; sed id problema longè antea vulgatum fuisse.

COROLLARIVM II.

Cùm ex vnguletto siue vngula aut cuneo habeatur solidum periphericum, & vngula sit quadratrix figura solida cylindracei iam descripta; quadratrix autem apud nos sit quod Dettonuillæo dicitur summa triangularis & pyramidalis; patet causa cur in problematum de periphericis solutione toties apud Dettonuillæum mentio fiat vngulettorum & summarum triangularium, aut pyramidalium; & cur quæ per vngletta soluuntur, solui etiam posse asserantur per summas triangulares & pyramidales.

COROLLARIVM III.

Patet tertiò quadratrices primas solidas reductas ad cylindraceum habêre suum cuneum vngularem, qui sit quadratrix solida secunda cuneata; & isti quadratrici cuneatæ secundæ respondere pariter æquale solidum cylindraceum altitudinis eiusdem a p, baseos a r b m, quæ est quadratrix secunda baseos b c d a attinentis ad cylindraceum primum. Hoc verò pa-

cto pergere possumus ad tertias, quartas &c. quadratrices, vt ex demonstratis liquet.

PROPOSITIO X.

AD proprietatem suprà expositam quadratricum, exiguntur Dettonuillanæ definitiones *summæ triangularis*, *& pyramidalis*.

Ponendum est, quod suprà monuimus, Dettonuillæum superficiei b a d c assignare solidum pro summa triangulari, sicuti & rectæ superficiem; vnde fit vt solido excogitet summam triangularem quaternæ dimensionis. Istud in Epistola ad D. de Carcaui pag. 17. expresse docet ex lineis videlicet attinentibus ad summã triangularem linearum, confici superficiem; & ex superficiebus quibus componitur summa triangularis superficierum, constitui solidum; atque ex solidis pari methodo sumptis gigni summam pyramidalem. Istas porrò summas (*Fig. 66.*) ita extruit: summa triangularis superficiei a d c b incipiendo ab a, vel à recta a d, est solidum insistens super basi b a d c, cuius hæc est proprietas, vt si secetur plano q m o ad planum p a d recto, & incedente per rectam m o parallelam rectæ a d, eius sectio sit æqualis figuræ b c o m. Istud solidum esse æquale cuneato solido vel cuneatæ quadratrici solidæ superioris propositionis, interceptæ inter plana e a b, e a d, b a d, & sumptæ secundum sectiones parallelas basi b a c d, nunc contendo. Nam sectio quæ est in plano ad basim b a d c parallelo, ducto per q M rectam, est per constructionem æquale portioni b c o m ex basi b c d a per planum q m o abscissæ ad partes b; ergo cùm rectæ a b, a e secentur proportionaliter per planum q m o, & huius plani cùm illis solidis sectiones ponantur æquales; ita tamen vt sectio à plano per q M ducto effecta in solido superioris propositionis sit inclinata ad planum d a e inclinatione anguli b a e; sectio verò à plano q m o effecta in solido præsentis propositionis sit perpendicularis ad planum b a d c: ergo est æquale, si ob inclinationem tantum minui debeat solidum superioris propositionis, quantum augetur propter basim in plano e a d constitutam & comprehensam sectione cylindraceæ superficiei & rectis a d, a e. Atqui ista basis ad basim b a d c est vt recta e a ad a b (istud enim probatur vt in cylindro perfecto) ex inclinatione verò illa fit vt solidum ita inclinatum sit ad aliud quod iisdem sectionibus perpendiculariter erectis ad basim constaret, sicut est recta eadem b a ad e a: ergo quantum crescit ob maiorem basim, tantumdem decrescit ob inclinationem: manet igitur æquale; & summa pyramidalis superficiei b c d a respondens, initio facto ab a b, est æqualis quadratrici cuneatæ solidæ superioris propositionis.

Similiter si ad figuræ b a c d axem b a ordinatim applicatæ omnes a d, m o &c. concipiantur produci & ex illis ita productis intelligantur abscindi rectæ æquales arcubus d c b, o c b, & sic de aliis, gignetur figura quam incipiendo ab a d Dettonuillæus appellat summam pyramidalem curuæ

dcb, & quam nos in definitionibus decimæ ſextæ quinti libri ſuperioris appellauimus *quadratricem mixtam expanſam.* Noſtra verò quadratrix reperta ex methodo ſuperioris, cùm ſit *quadratrix mixta conuoluta*, quam definiuimus, & cùm in corollario quinquageſimæ ſecundæ eam oſtenderimus eſſe æqualem expanſæ; patet ſummam triangularem reſpondentem lineis curuis eſſe illam ipſam quam nos quadratricem mixtam rectanguli mixti nominauimus.

Quoniam igitur Dettonuillæus initio epiſtolæ ad D. Carcaui pag. *6.* & *16.* definitionem ſummæ triangularis pro lineis & ſuperficiebus tradit per proprietatem in præſenti propoſitione expoſitam, eaque ipſa competit figuris quadratricibus repertis in ſuperiore propoſitione, patet noſtras quadratrices figuras non niſi nomine diſcrepare à ſummis triangularibus & pyramidalibus Dettonuillanis. Atque adeo cùm proprietas alia ſummarum iſtarum quam in ſexta propoſitione expendimus quadret quoque noſtris quadratricibus, vndecunque euidens eſſe ſummas illas Dettonuillanas quantum ad rem & vſum præcipuum attinet, & notas fuiſſe Geometris, & libris iam ante aliquot annos editis conſignatas, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Summas pyramidales non attigi hîc ſpeciatim, eo quod ſimilem generationem habeant, vt ipſe Dettonuillæus diſertè admonet pag. illa 17. *Ita pariter* inquit, *ſumma pyramidalis earundem ordinatarum m o* (Fig. *66.*) *gignit planum, compoſitum ex totidem ſolidis, quot ſunt portiones in axe a b inter ſe æquales; quæ quidem ſolida formantur ſingula per ſummas triangulares particulares, quarum ſumma tota conſtituit ſummam pyramidalem. Nam earum ſumma pyramidalis ſumitur in hunc modum. Primò ſumptâ ſummâ omnium triangulari, quæ vnum ſolidum conficit modo iam explicato; tum reliquarum excepta prima omnium ſumitur ſumma triangularis, eaque efficit aliud ſolidum &c. & ita quot erunt diuiſiones in axe, tot erunt ſolida, quorum ſingula cum multiplicata fuerint per particulam vnam earum in quas diuiſus fuerit axis, dabunt totidem plano-plana eiuſdem altitudinis, quæ omnia ſimul complent plano-planum de quo agimus.* Cernis plano-planum eſſe Dettonuillæo ſolidum quaternæ dimenſionis, & in illius generatione eandem ſeruari methodum, quæ tradita eſt pro ſummis aliis que trinam dimenſionem non excedunt. Si quid itaque difficultatis extraordinariæ experimur in huius ſolidi generatione, id oritur ex dimenſione illa quadruplici, quam cum noſtra methodus, noſterque intelligendi modus non ferant, non eſt mirum quod illam ſpeciatim perſequi detrectemus, præcipuè cùm de eiuſmodi ſummæ cum quadratricibus noſtris comparatione ſatis egerimus in octaua, ibique vſurpato loquendi & demonſtrandi more Dettonuillano, oſtenderimus rei iſtius medullam nihil aliud continere præter quadratrices noſtras ſecundas. Quod ſi ſummas pyramidales curuæ lineæ contemplemur, illæ erunt cuneata ſolida trium dimenſionum; quia cùm ipſæ lineæ ſint vnius dimenſionis, earum ſumma triangu-

laris erit duorũm ; ſumma verò pyramidalis, trium tantùm iuxta leges huius generationis à Dettonuillæo præſcriptæ ; iuxta quam patet cylindri ſuummam triangularem eſſe debere quaternarum dimenſionum ; & pyramidalem, quinarum.

PROPOSITIO XI.

SVmma cuborum definita in propoſitione prima præſentis libri eſt tripla ſummæ pyramidalis ſub finem corollarij proximè ſuperioris deſcriptæ.

Reuocetur ex tertio libro ſchema propoſitionis octauæ (*Fig.* 25.) in quo deſcribitur a h g b figura comprehenſa rectis a b, b g & quacunque linea a h g, ita vt omnes parallelæ ad rectam a b ex ipſa a h g demiſſæ in rectam b g cadant inter b & g ; omnes item parallelæ ad rectam b g ex ipſa a h g demiſſæ in rectam b a, cadant inter b & g, & non ſecent lineam a h g niſi in vno puncto Libra a c ſuſpensâ ex b perpendiculo b g, brachio b c poſuimus deſcribi quadratricem ſecundam b x a o figuræ b g h a; præterea poſuimus ſeriem graduum ad poſitionem rectæ b a, quorum primus ſit parallelogrammum b c e g, ſecundus figura b a h g, tertius figura c ſ e d, quartus figura c t e d, quæ vt ex prima propoſitione huiuſce libri liquet eſt ſumma cuborum, ſicuti quadratrix ſecunda b x a o eſt ſumma pyramidalis ſub calcem corollarij quarti ſuperioris definita. Quoniam in illa octaua propoſitione tertij libri oſtendimus quartum gradum eſſe triplum quadratricis ſecundæ ; quartus verò gradus in hoc libro appellatur *ſumma cuborum* ; ſecunda verò quadratrix nominatur ſumma pyramidalis ; patet ſummam cuborum eſſe triplam ſummæ pyramidalis, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Noſtra illa demonſtratio eſt Geometrica, & prorſus cogit ad aſſenſum ; ſi tamen placet rem calculo experiri in exemplis facilibus, pone primò figuram b a h g eſſe quadratam, & ſimilem æqualemque figuræ b c e g, quartus gradus in hoc caſu erit æqualis ipſi quadrato, ac proinde quartus gradus erit tres trientes quadrati b g vel b a. At prima quadratrix erit triangulum quod eſt dimidium quadrati b a h g, ſicuti ex 42. ſuperioris libri conſtat, ſecunda verò quadratrix erit ceratoides parabolica ex eadem illa propoſitione, illa verò ceratoides per quadraturam parabolæ, eſt triens quadrati b g : ergo in hoc caſu quartus gradus eſt triplus ſecundæ quadratricis.

Secundò pone lineam a h g eſſe rectam, & a b g h eſſe triangulum rectangulum, cuius latera a b, b g ſint æqualia & comprehendant angulum rectum. Ex 44. libri quinti ſuperioris conſtat quartum gradum eſſe ęqualem quadranti vel tribus vnciis quadrati b g, nam ſecundus eſt æqualis dimidio, tertius trienti, quartus quadranti. Præterea prima quadratrix trianguli b a g initio ducto ab a, brachio æquante rectam a b, eſt vt iam diximus,

diximus, æqualis trienti quadrati a b, & secunda quadranti eiusdem quadrati; ergo cùm initio ducto à puncto b secunda quadratrix sit ex decima ipsum suspensum b a h g auctum secunda quadratrice initij a, & imminutum duplo primæ quadratricis initij a, patet secundam quadratricem initij a esse dimidium quadrati b a auctum quadrante eiusdem & imminutum duobus eiusdem trientibus, hoc est compensatione facta, esse vnciam vnam quadrati a b g: sed quartus gradus est æqualis tribus eiusmodi vnciis: igitur quartus gradus in isto etiam casu est triplus secundæ quadratricis, ac proinde summa cuborum est tripla summæ pyramidaliis.

COROLLARIVM II.

Dettonuillęus ait in tractatu de trilineis & vnglettis *summã cuborum* esse æqualem sextuplo *summæ pyramidalis*. Cuius pronuntiatum vt verum sit, intelligere debet nomine *summæ cuborum* solidum aliquod quartæ dimensionis; cùm nomine *summæ pyramidalis* designet solidum eiusdem generis; nec possit esse æqualitas nisi inter ea quæ eidem generi supponuntur. Si igitur intelligat per summam pyramidalem dimidiũ secundæ quadratricis b x a o multiplicatum per quadratum rectæ b g; & per summam cuborum designet quartum gradum c t e d ductum in quadratum rectæ eiusdem b g; verissima est eius assertio. Sed quid ipse velit, cùm liquidò mihi non constet, suspenso hîc incedo gradu; dubium verò istud de mente Dettonuillæi fecit, vt de mea dubitari noluerim, ideóque huc reuocarim, quamuis aliis verbis, propositionem illam.

PROPOSITIO XII.

Reducatur ex tertio libro schema propositionis vigesimæ (*Fig.* 32.) vbi duæ quælibet rectæ b a, a c secant se ad normam, & ad positionem rectæ a c insistit rectæ b a figura quæcunque b i c a, & eadem b i c a ad positionem rectæ b a insistit rectæ a c iuxta cautiones superioris propositionis. Intelligitur solidum cuius sectiones sunt quadrata rectæ h i parallelæ ad rectam b a, æquidistantia plano x a b recto ad planum b a c; intelligitur præterea aliud solidum cuius sectiones parallelæ plano x a c sunt quadrata rectæ f i parallelæ ad rectam a c. Ex rectis a c, a b abscinduntur e a, a e inter se æquales.

Ostenditur in illa vigesima propositione solido sectionis quadratæ genito ad positionem plani x a c æquiponderare, brachio d a, idem spatium quod solido alteri, brachio e a; hoc est quadratarum spatium siue triangulares summas vtriusque solidi esse easdem. Istud demonstrat quoque Dettonuillæus tractatu de *trilineis & vnglettis* propositione quinta pag. 5.

Propositionem præsentem huc reuocandam esse duximus duabus de causis, quarum prima est quod eius methodus sit generalis, & vtilissima

nobis fuerit ad ſolutionem problematum propoſitorum obtinendam. Altera cauſa eſt quòd cùm calculum noſtrum initio præſentis anni edidiſſemus (ſtatim videlicet vt accepimus primas epiſtolæ ad D. Carcaui quatuor pagellas e prælo recentes, & ad nos miſſas ſeorſum ab aliis poſtea cudendis) appendicem hiſtoriæ ſuæ addidit Dettonuillæus 20. Ianuarij 1659. qua vitioſum eſſe noſtrum calculum quæſiti potiſſimum ſexti contendebat. Reſpondimus extemplo vitium illud eſſe Typographi, & emendari ſatis potuiſſe ex comparatione quinti quæſiti cum ſexto, cùm ex methodo huius propoſitionis vigeſimæ, in vtroque quæſito ſecundus numerus proportionalis qui repræſentat æquiponderans ſiue quadratarium ſpatium, eſſe debeat idem, & de facto ſit idem vtrobique pro primo caſu tractato, pro altero autem verba repræſentantia ſecundum numerum ſint vtrobique etiam eadem, niſi quod in ſexto quæſito pro *quintuplum* ex quæſito quinto aduocandum, adſcriptum fuit *quadruplum*. En reſponſionis noſtræ ipſa verba.

ANTONII LALOVERÆ *Societatis* IESV *reſponſio ad nouiſſimam Hiſtoriæ Cycloideos appendicem.*

Solidi circa axem circumductu totius ſemicycloideos geniti centrum grauitatis in *Quæſito* noſtri iam editi Calculi ſexto non rectè conſignatum fuiſſe obiicit Autor Hiſtoriæ Cycloideos in Appendicula recenti. Ad quod reſpondeo emendato voculæ vnius errato, tolli anſam carpendi calculum centri illius difficillimum. Nam in quæſito ſexto ſi pro voce *quadruplum* legas *quintuplum* reſtitutos habes primarij iſtius casûs numeros. Ita autem legi oportere liquet ex vigeſima propoſitione tertij libri primo quoque die edendi, vbi demonſtratur in quæſitis quinto & ſexto ſecundos quatuor proportionalium numeros eſſe vtrobique eoſdem; quod & à nobis obſeruatum eſſe liquet ex nuda calculi inſpectione. Nam in quæſito quinto ſecundus numerus primi casûs eſt *quadrans tertij auctus quatuor trientibus ſecundi, & imminutus ſexdecim nouenis primi*: ſecundus verò numerus ſecundi caſus eſt *quintuplum tertij imminutum centum viginti & octo nouenis primi*, qui numeri iiſdem verbis reſumpti iacent in ſexto quæſito caſtigatâ illa voculâ. Cæterò iſtud erratum prouidentia Numinis prorſus ſingulari eueniſſe agnoſco: nam Autor illius Hiſtoriæ eo deprehenſo calculum ſaltem iſtum, quia ſpurium illum eſſe credidit, de meo eſſe concedit, alioquin repugnaturus.

Lubens accipio quod dat; plurimúmque etiam gaudeo centri calculum alterius à me editum illi probari; nam meæ illum eſſe inuentionis, clarius eſt quàm vt ſeriò negari poſſit. Cùm autem difficultatis apex, de ſententia etiam Aduerſarij, ſit in calculo centri ſemiſolidorum; ille, ſi vitio caret, ſimilia errata (ſi quæ forte irrepſerint in aliorum minùs difficilium ratiocinia) ſatis ſuperque purgabit, ſaltem vſquedum prodeant (quod breui nec vti ſperamus inutiliter fiet) noſtri de Cycloide libri, ad

quorum methodum calculus à nobis euulgatus exigatur à computandi peritis, & ſi opus fuerit etiam caſtigetur. Toloſæ 15. Februarij 1659.

Hæc tunc reſpondi, nunc verò addo vnum quod mihi exciderat dum falſam illam Anonymi de me criminationem repellerem. Doctos homines quæſiſſe ſæpe cauſam cur Dettonuillæus vbi reprehendiſſet calculum noſtrum in duobus omnium difficillimis caſibus, illos non emendarit ſubſtituendo veros ex ſuo rationario abaco depromptos. Sicuti enim vnum & idem non ſunt agnoſcere vitium quadraturæ circuli, & illam minimè fucatam apud ſe habere; cùm Archimedes docuerit Poſteros methodum vitij detegendi, nec tamen quadraturam ipſam germanam vſpiam dederit: ita in præſenti negotio euenire facilè poteſt. Certè nos in tertij libri propoſitionis vltimæ ſcholio primo tradidimus modum non vnum explorandi numquod calculis iſtis de Cycloide initis vitium ſubſit; nec continuò, ſi ille modus verus eſt, confecimus cætera longè difficillima.

Porrò quamuis in illa reſponſione ſignificarim tetragoniſmum circuli mihi à me inuentum videri, abſit vt inde velim inuentæ eiuſmodi quadraturæ laudem mihi arrogare; vel ſi quis ante me illam poſthac in lucem prompſerit, auſim illius laudis minuendæ causâ iactare, apud me ſolutum iam extitiſſe problema illud vſque à naſcentis Geometriæ temporibus ſedulò quæſitum. Expertus enim noui multa credi reperta, quæ ab ipſo etiam Inuentore, dum ſupremâ diligentia examinantur, comperiuntur eſſe falſa. Quamuis verò non comperirentur eſſe falſa; inuentionis tamen lex æquiſſima id præſcribit, vt illi qui primus propalam poſuerit alicuius rei diu perquiſitæ ſolutionem, nemo obſtrepat hac voce, *ego in ſcriniis iamdiu occultabam inuentum illud*. Ita enim obuiam itur mille laudis alienæ detractionibus; ignauúmque fucorum pecus procul arcetur ab aluearibus, ne prædatitio laborioſarum apicularum melle ditetur.

PROPOSITIO XIII.

DEclaratur quo pacto ex vna quadratrice data, & ex data ſuſpenſa magnitudine eruantur aliæ quadratrices, vndecunque ſuſpenſio fiat.

De hoc Dettonuillæus agit in tractatu *ſummarum ſimplicium*, *triangularium*, *pyramidalium*; quem aliis examinandum, & in praxim reducendum relinquimus; nobis enim id non planè licuit. Iamdiu demonſtrauimus in ſecundi libri tetragoniſmicorum decima propoſitione (*Fig. 66.*) ſi figura a d c b, poſtquam ſuſpenſa fuit ex a perpendiculo a d, brachio a g, ponatur ſuſpendi ex x per receſſum ab ipsâ, brachiumque par retineatur, & perpendiculum priori parallelum, quadratrici primæ a n b m addi oportere ſpatium, quod ad ſuſpenſum a d c b ſit, vt recta a x ad a g, ad hoc vt fiat quadratrix pro ſuſpenſione ex puncto x. Quòd ſi intelligatur per acceſſum ſuſpenſio fieri ex m, reliquis ſeruatis; vt fiat æquiponderans reſ-

pondens huic ſuſpenſioni, oportere demi eidem quadratrici a n b m ſpatium, quod ad a d c b ſit, vt acceſſus a m ad a g.

Præterea quoniam in ſeptima oſtendimus figuræ ſuſpenſæ a d c b m quadratricem reſpondentem brachio b u, eſſe ipſam a d c b m imminutam prima quadratrice a n b m; quadratrix quoque reſpondens ipſi a n b m, brachio eodem b u, erit ipſa prima quadratrix a n b m imminuta quadratrice ſecunda a r b m. Cùm ergo toti b c d a m æquiponderet figura ipſa b c d a m imminuta quadratrice prima a n b m: ipſi autem b n a m æquiponderet ipſa b n a m, demptâ ſecunda b r a m, ſi de æquiponderante toti a d c b m dematur æquiponderans parti a n b m, relinquetur æquiponderans alteri parti a n b c d, nempe figura a d c b m imminuta duplo primæ quadratricis a n b m, & aucta quadratrice ſecunda a r b m. Igitur cùm a n b c d ſit quadratrix prima totius a d c b m poſito brachio b u, & ipſi a n b c d æquiponderet ipſa a d c b m dempto duplo primæ quadratricis a n b m, & addita ſemel quadratrice ſecunda a r b m, patet poſito brachio b u figuræ a d c b m quadratricem ſecundam eſſe ipſam a d c b m, dempto duplo primæ quadratricis a n b m, & addita ſemel quadratrice ſecunda a r b m. Non multum abſimili methodo poſſemus inuenire ſecundam quadratricem ex ſecundâ datâ a r b m, vbicunque ſtatuatur ſecunda ſuſpenſio, ſed illud ſatis conſtat ex noſtris principiis olim demonſtratis, iſtudque ſufficit præſentis libri inſtituto.

Hoc tamen omitti non debet ex octaua ſecundi tetragoniſmicorum iſtas quadratrices haberi, ſi brachium a g mutetur in quodlibet aliud a x; nam vt recta a x ad a g, ita reciprocè eſt æquiponderans brachij a g ad æquiponderans brachij a x. Illud quoque obiter dico ex prima quinti tetragoniſmicorum conſtare methodum inueniendi æquiponderans quocunque perpendiculo per a ducto, & ſuſpenſione ex a factâ, ſi detur æquiponderans figuræ adcb brachio a g perpendiculo a d, & eidem æquiponderans aliud brachio f a perpendiculo a b. Ergo &c. quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XIV.

VSus libræ planæ à nobis inuentæ & expoſitæ in vigeſima octaua quarti libri tetragoniſmicorum iterum inculcatur, oſtenditúrque quibus illum verbis Dettonuillæus expreſſerit.

Libra plana, prout à nobis propoſita fuit in quarto libro iam laudato, inſigne præſtat officium, dum quadratricem ad poſitionem perpendiculi in librâ grammicâ inueniendam, docet reperire ad poſitionem ipſius libræ grammicæ quæ ad rectos angulos ſecat ipſum perpendiculum. Porrò iſtud perpendiculum conuertitur in axem ipſius libræ planæ, prout eo loci explanata iſtius noſtri inuenti methodus docet: nec fruſtrà illud eſſe credideris: aliquando enim non ſolùm compendioſiùs per illam inueni-

tur quadratrix vel summa triangularis: sed necessariò etiam, cùm non rarò nulla occurrat via illam inueniendi per libram grammicam.

Cæterùm Dettonuillæus hoc ipsum vsurpat demonstrando summam triangularem esse æqualem singulis sectionibus parallelis libræ grammicæ multiplicatis in sua brachia, siue in distantiam suorum grauitatis centrorum à perpendiculo eiusdem grammicæ libræ, quod in axem libræ conuertitur. Vide ipsum tractatu de trilineis propositione 13. & 14. & de arcubus circuli propositione 18. vide etiam quæ scripsimus in corollario quadragesimæ quartæ libri superioris. Res ergo ante Dettonuillæum non erat incomperta, sed illis nominibus non denotabatur; ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XV.

An methodus qua Dettonuillæus vtitur & quam à se inuentam profitetur extiterit ante ipsum, visque illius agnita fuerit.

Quæ hactenus præsenti libro demonstrauimus quemlibet cogunt fateri eiusmodi methodum antea cognitam & in vulgus editam fuisse. Ne quis verò putet vim illius methodi à nobis iam olim vulgatæ, incognitam tunc nobis ipsis fuisse, indicamus corollarium secundum vigesimæ tertiæ quarti libri, vbi ita scripsimus de quadratario spatio quod ex vngulari vel cuneato deduximus *præsens theorema planam viam facit ad plurima problemata abstrusa pariter & vtilia*: quod in corollario primo decimæ nonæ primi libri huius Operis inculcauimus; in corollario verò tertiò eiusdem propositionis agentes de proportione quam habent peripherica genita circumductu quodam sectionis conicæ ab Archimede intentato, diximus *eius inuentionem alia via esse difficillimam, nec adhuc quantum recordamur ab vllo inuentã*: & paulò post asseruimus, pari pacto assignari posse proportionem innumerorum eiusmodi periphericorum ex parabolæ circumuolutione natorum, *ad quam si clauso isto tramite tentes ire, mirum est si aliud inueneris præter dumeta & sentes densissimas, quæ te cœco inextricabilique errore impediant*. Mirabilem verò esse quadraturam *cunei* vel vngulæ satis nuper indicauimus in scholio duodecimæ propositionis primi libri, qui seorsum ab aliis prodiit anno superiore: sed longè antè illud prænuntiaueramus in tetragonismicorum librorum quarti propositione vigesima sexta, in cuius scholio hæc verba exarata extant, quibus innuimus tunc, quousque nos in quadraturæ instituto progressos esse existimaremus: *neque exiguum profecisse nos putamus dum ad cunei noti præsentem quadraturã Deo dante peruenimus, hoc enim est veluti dimidium facti iam habere*. Quod si aliis ista iam semel inuenta facilia iudicentur, id nihil detrahit de inuentionis difficultate, siquidem quid non est aditu facile, postquam ad illud semel explanata patet via?

Stet itaque istam methodum si eius originem altiùs repetamus deductam esse ab Archimedeis inuentis; si eius amplificationem, eam longè ante Dettonuillæi literas de Cycloide, agnitam & publici iuris factam

esse; si eius vtilitatem, maiorem certè eam esse quàm credi primo aspectu possit, ad ea quæ ad hunc vsque diem irreperta latuerant, inuenienda. Huc pertinet quod Dettonuillæus de hac methodo agens pag. 4. *Historiæ Cycloideos* scribit de se ipso. *Tunc ego ipse mihi pro dimensione & centro grauitatis solidorum, superficierum tam planarum quàm curuarum, nec non linearum curuarum eas excogitaui methodos, quibus pauca admodum posse se subducere iudicaui.* Quæ quidem huius Autoris verba non tantùm prædicant quanti apud ipsum momenti sit illa methodus, verùm indicant etiam ipsum sibi ascribere inuentionem illius. Sed quam certum est posse illum esse inuentorem istius methodi absque vllius alterius Geometræ auxilio, tam certum quoque est ipsum non posse nunc dici primum illius inuentorem, postquam manifestum sit decem fermè antè annis elementa tetragonismica, quibus continetur, in lucem prodiisse. Ex quo patet quàm cautè quisquis aliquid de suo inuenit promere debeat vocem illam Vatis.

Primus *ego ingredior.* ——

—— *Opus hoc de monte Sororum*
Detulit intactâ *pagina nostra* viâ.

Ergo &c. quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XVI.

QVid de methodo *indiuisibilium* quam Dettonuillæus in suo opere sequi se profitetur sentiamus, præcipiuè si cum methodo Antiquiorum comparetur.

Primò quidem nomen ipsum *Geometriæ indiuisibilium*, quod ab annis circiter viginti auditur inter Geometras, improbaui in secundâ appendice Elementorum tetragonismicorum sub finem; vbi scripti, cur magnus ille Caualerius suam methodum debuerit appellare *Geometriam indiuisibilium* potiùs quàm *diuisibilium*, à me nesciri. Post hæc scripta gauisus sum in meam sententiam conuenisse C. V. Ismaëlem Bullialdum in libro de lineis spiralibus proposit. 42. *obiter hîc notabimus*, inquit vir ille insignis, *tam perperam ac improprio nomine indiuisibilium methodum, nouum suum artificium appellauisse Caualerium, quàm subtili ac mirabili sagacitate, profundaque mentis indagine illud inuenisse. Nulla enim quantitas est indiuisibilis. Debuerat Caualerius animaduertisse artificium eiusmodi, aliud nihil esse, quàm eiusdem mensuræ, vel eiusdem proportionis, per omnes duarum positarum magnitudinum partes, continuam similemque in infinitum applicationem. Ita vt appositè magis illam excellentissimam methodum ὁμοιοσυμμετρίαν appellauisset quàm* indiuisibilium.

Secundò si Geometria indiuisibilium ea sit in qua quidlibet assumi possit, absque vlla demonstratione, tanquam certum; ea omnibus Geometris improbanda iure meritò iudicabitur: lege (si lubet) quæ in quadragesimæ quartæ progressu scripsimus hac de re. Quod si non assumat nisi certa apud omnes, vel nisi vt *postulata*; non erit eatenus contemnenda. Præterea si in demonstrationibus quæ fiunt *per reductionem ad impossibile*

omittat tractum illum longiorem quidem; sed antiquæ Geometriæ maiestate dignissimum, cuius in tertia propositione meminimus; nihil inde probri contrahet, præsertim cùm id posse fieri iam demonstratum sit à Bullialdo in opere cui titulus, *exercitatio circa demonstrationes per inscriptas & circumscriptas figuras*, & ante ipsum à Gregorio à S. Vincentio libro 2. de progressionibus Geometricis; nec non ab Andrea Tacquet in Elementis Geometriæ: curandum tamen est vt omnia rectè præparentur, sicuti annotauimus in tertia illa propositione. Denique si in modo demonstrandi admisceat illam quam, vocant Speciosam Algebram, adhibendo regulas multiplicationis, diuisionis, additionis, & subductionis, res adhuc obscurior euadet, faciléque fieri poterit vt problema solutum putetur, cùm adhuc solutionem desideret. Nisi enim purgetur ab illis solidis quaternæ dimensionis, & aliarum omnium supra trinam excurrentium, solutio problematis Geometrici non est perfecta: quapropter hoc illam nomine nolim accusare nisi ad summum obscuritatis & Arabismi non necessarij.

Tertiò si methodus indiuisibilium vocetur illa quæ, demonstrata in genere linearum, transfert ad genus superficierum; & in isto probata traducit ad solidorum supremum genus; non potest dici veritatis secura, nisi in iis quæ per methodum Antiquorum demonstrari possunt; ita in illa tunc appendice scripsimus, itáque etiam nunc censemus cum Reuerendo P. Andrea Tacquet, libro primo *Cylindricorum & annularium* prop. 12. & libro secundo propositione secunda in scholiis; vbi rectè appellat illam methodum *per heterogenea*, antiquam verò *per homogenea*. Nam illa, id quod magnitudinibus vnius generis, verbi causa, lineis competere demonstratum fuerit, transfert in magnitudines alterius generis, nempe in superficies; quod sanè consequens non est, & si quando cohærentia ista duo appareant, id propterea tantùm fit, quòd ex propriis eiusdem generis principiis idem illud consequamur. Istæ verò omnes cautiones etsi accuratè obseruentur, in confesso adhuc est apud eos etiam qui illa vtuntur, methodum Antiquiorum esse Reginam cui ista famulari teneatur: vnde Dettonuillæus in Epistola quam præmisit tractatui *de æqualitate lineæ spiralis cum parabolica*, ait se illam demonstraturum methodo Antiquorum, reiectâ illâ *indiuisibilium*, *vt res in posterum firma stet*, *& citra vllius controuersiæ motum*. Hinc verò apertè constat quam fallantur illi qui iactant solam methodum indiuisibilium esse nunc in pretio, & audent etiam scribere *nunc demonstrationes lineares sperni à summis quibusque viris*. Id enim falsum est, cùm Geometria antiqua dignitatem suam apud omnes retineat, & Algebræ etiam speciosæ ita domina sit, vt eam regat fere in omnibus. Quot enim sunt quæ ex mera Geometria passim aduocantur in subsidium ancillæ istius? Ergo &c. quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XVII.

AN quæ hodiè ſoluuntur problemata ſint difficiliora iis quæ olim ſoluta ſunt a Principibus Geometris. Nonnulla præterea narrantur ad hiſtoriam horum problematum pertinentia.

Huius examinis anſam præbuit nobis Autor epiſtolæ ad Dettonuillæum quæ præmittitur eius de Cycloide ſeu de *rotatrice*, vel *rotatricula* Operi, ibi enim ſuam de hac quæſtione mentem ita explicat. *Quamuis ſi ingenij magnitudinem æſtimes, nullus fortaſſe Antiquiorum ſuperarit Archimedem; indubitatum tamen eſt, ſi difficultas problematum pendatur, hodierna longè difficiliora eſſe antiquis. Vt manifeſtum erit comparanti figuras vniuſmodi, & vt ita dicam vniformes, quas Archimedes contemplatus eſt, cum figuris quæ hodie conſiderantur à Geometris, præcipuè verò ſi conferantur cum cycloide & eius ſolidis, cum ſcalario, & cum aliis ſuperficiebus ſolidiſque, quorum omnium Tu ſolerter detexiſti proprietates; vt nulla extiterit ætas adeo apta examinandis problematum difficillimis. Cæterum nullius eorum quæ Tu vt difficilia propoſueras vidimus adhuc ſolutionem, licet viderimus eorum quæ iam ante denuntiaras eſſe faciliora, nempe inuentionem centri grauitatis lineæ curuæ & dimenſionem ſuperficierum, quibus ſolida illa continentur, quam D. VVren miſit ad nos literis datis 12. Octobris, & D. de Fermat ſuis etiam in literis, vbi methodum pulchram admodum & generalem pro dimenſione ſuperficierum peripheri-carum tradit. Sed nullam prorſus vidimus ſolutionem difficillimorum illorum Geometriæ ænigmatum, videlicet* centri grauitatis ſolidorum, & ſemiſolidorum, eorumque ſuperficierum. *Aliis equidem potius quàm Tibi (tua enim modeſtia id vetat) ſincerè dixerim quanta inde iudicata ſit difficultas tuorum problematum, & quarum ingenij virium is qui ea ſoluerit.*

Hactenus ille; ego tamen primò planè aſſentior Gregorio à S. Vincentio qui in propoſitione 18. lib *de progreßionibus Geometricis* ita ſcribit. *Sed hæc in gratiam antiquitatis dicta ſint, quam venerari omnes deberent: illius enim ſæculi virorum labores & ingeniorum parta hucuſque non vidi à Recentioribus adæquata* Hæret enim menti memoria auiculæ illius quæ, vt ſapienter fingitur, dorſo æquilæ incumbens defertur ad nubes vſque, inde verò niſu proprio vehentem ſe alitem ſuperuolitat, quaſi primas ſublimis volatûs partes illi prærceptura: ſed merito penſandum eſt, num tanto ſuperuolet, quanto ab ima terra fuit euecta.

Secundò fateor non pauca hac ætate reperta eſſe quæ Archimedis æuo ignota fuerunt, vel non ita elucidata. In hoc numero pono Algebram ſpecioſam quam magni facio, ipſamque etiam, ſi placet, Geometriam *indiuiſibilium*; dummodo ambæ ſtipendia mereantur ſub Antiqua, ſolidaque Geometria, & illam ab Arabiſmo quodam inextricabili puriſſimam ſeruent. Sed quod mihi ad inuentionem multò potentiùs videtur, eſt libra inſtaurata: negari enim non poteſt quin illius vſus hoc noſtro ſæculo inſtauratus, & non pacum amplificatus fuerit; quod vtique luculentiùs patebit, ſi inde prodeat quadratura illa circuli & hyperbolæ, quam diu

parturit

parturit mens nostra, nec dum tamen aut parit, aut partam euulgat.

Tertiò non nego quin Cycloideos cogitatio pertineat tota ad præsens nostrum sæculum, & quin proposita circa illam problemata sint mirum in modum difficilia, etiam si tententur ab eo qui principiis libræ non vulgaribus sit instructus: sed an tanto interuallo nunc superes communem Geometrarum industriam promendo eorum solutionem, quanto Archimedes superauit suæ ætatis captum Geometricum, iure merito dubitetur: vt enim illa problemata fuerunt à Dettonuillæo totius Europæ Geometris summis proposita; statim ego qui longè absum ab eorum ordine, primum huius operis librum inueni, & intra præscriptos tres menses reliquorum omnium solutionem excogitaui. Quod autem exigui homo ingenij tam citò repererit, quis dicat in tanta Geometrarum nostræ ætatis luce abstrusum & reconditum, quam quod maximè?

Quartò postea quam primum librum in lucem dedimus, misimusque Romam, Parisios, Lugdunum &c. Anonymus, cùm sine discrimine omnia problemata proposuisset *præstantissimis toto orbe Geometris*, nec distinxisset quæ à Tyronibus, quæ à Magistris illis & summè doctis Viris exigeret, mussitauit tamen per suos, istud quod nos primi dederamus carêre difficultate: postquam verò fluxit tempus quod soluendis quæstionibus suis præscripserat, tresque alij insuper menses, in prima Dettonuillani libri fronte, hoc est, in epistola illa cuius fragmentum iam relatum est, exaratum conspeximus, *non fore necessarium vt Dettonuillæus fusius exponat problemata illa quæ tanquam facilia proposuisset, sed quæ vt difficilia, hoc est centra grauitatis solidorum & semisolidorum Cycloideos, eiusque partium tam circa axem quàm circa basim, quibus ipse in primis literis præmium pecuniarium annexum esse voluisset.* At vbinam, & quando tanquam facilia illa proposuit? & cur de facilibus atque obuiis interrogauit *præstantissimos toto orbe Geometras?* nempe illa omnia facilia illi fuerunt, vbi dubitare non potuit quin à nobis, qui magni Geometræ profectò non sumus, inuenta essent.

Quintò idem ille Autor (vt sub calcem quarti libri monuimus) initio huius anni quatuor primas pagellas suæ ad D. de Carcaui epistolæ adhuc è prælo madidas seorsum misit, monens reliquorum editione prælum distineri. Ibi cùm legissemus omnium casuum calculum primo quoque die ex Typographi officina proditurum, vnius verò numeros interim exhiberi, prompsimus ex tempore nostros casuum omnium calculos, & typis cusos ad Geometras insignes misimus Parisios, Romam, Lugdunum & ad alias Europæ Vrbes primarias: miramur verò etiam nunc calculos illos ex illa officina tunc non prodiisse, cum integer liber inde emissus est. Nec satisfecit Dettonuillæus in tractatu generali *rotatricis* vel *rotatriculæ* (quam nos cycloidem magnam hactenus appellauimus) dum, vbi visus sibi ipse est tradidisse methodum soluendi problemata à se anno superiore proposita, tractatum clausit his verbis. *Facile erit toti orbi per methodum iam traditam inuenire calculum omnium casuum.* Ego certè id facile non reperi vn-

quam ex quo ille liber venit in manus meas, quod totum adſcribi mearum ingenij virium imbecillitati velim: & hanc eſſe cauſam cur ab illius laude cumulata abſtineam. Hoc certò affirmo, magnam lucem ex illo calculo, ſi omiſſus non fuiſſet, deriuandam fuiſſe in ipſam Autoris methodum; plurimúmque dolere me ſubreptam mihi facultatem eſſe comparandi mei calculi pro ſingulis caſibus cum Dettonuillano; id enim ſine vllo dubio præſtitiſſem in reliquis, ſicuti in vno illo quem dedit, iam ab huius anni initio præſtiti.

Sextò tacere non debeo Antimum Farbium; euulgato noſtro calculo, ſuum de Cycloide Opuſculum edidiſſe Romæ, quod è prælo recens R.P. Bauguillius quarto menſis Martij anni labentis 1659. ad nos beneuolè miſit, redditúmque fuit vno poſt menſe, nempe tertio Aprilis. Suſpexi ſubtilitatem ingenij illius eximam, ægreque tuli non licuiſſe illi impendere ſe inquiſitioni centrorum grauitatis pro ſolidis omnibus & ſemiſolidis: ex animo autem complexus ſum & veneratus ſingularem illam Viri humanitatem, qua & viginti noſtras propoſitiones ſuperiore anno Romam miſſas, & calculum initio præſentis poſtea tranſmiſſum legere non ſolùm non contempſit, ſed iam lecta ſibi etiam mirificè probari teſtatus perurbanè ſæpiuſque eſt noſtro Bauguillio.

Decimò ne actum agam, plura ad hanc hiſtoriam attinentia ſi te iuuant, vide ſcholia appoſita ſub finem primi libri; decimæ propoſitionis libri ſecundi; vltimæ propoſitionis libri tertij & quarti; vigeſimæ tertiæ libri quinti; & quæ in duodecima præſentis ſcripſimus.

DEFINITIONES.

SIt (*Fig.* 70.) circulus, b e d f cuius diametri b d, e f ſecent ſe ad normam in centro c; in axe d b producto ſumptum ſit quoduis punctũ a, & per a ducta ſit a h parallela axi e f. Circa axem a h manentem intelligatur moueri planum h a d in quo eſt peripheria circuli b e d f; ſuperficies quam peripheria b e d f motu ſuo deſcribit vocatur à nobis *corona annularis*, vel *annulus*. Si loco circuli b e d f ponatur ellipſis, gignetur corona elliptica, ſi parabolæ ſegmentum ſint e b f, e d f, appellanda erit *parabolica*; ſi ſegmenta ſint hyperbolica, vel cuiuſcunque alterius figuræ, inde nomen aduocandum illi erit; methodus enim huius quadraturæ eſt generalis, vt patebit. *Semicoronam interiorem* voco eam quæ deſcribitur motu figuræ e b f c; *exteriorem* verò, quæ gignitur motu figuræ e d f. Poſuimus autem rectam a h nec ſecare nec tangere figuram e b d f, ad hoc vt corona *internè aperta* gignatur: nam ſi tangat illam, fiet corona ſine foramine, quam *clauſam* appellamus. Quod verò circuli vel annuli nomen magnam habeant in ſignificando affinitatem liquet ex eo quod ad illam allu-

dendo Poëta ſcripſerit, *Maiore quiſquam circulo coronetur*. Cæterùm hęc corona ſi rectè attendatur nihil eſt aliud, quàm differentia duorum periphericorum circa manentem rectam a h deſcriptorum motu figurarum h e d f X, h e b f X, quarum latera h e, X f æquidiſtant rectæ b d, & conſtituunt parallelogrammum h e f X; periphericorum illud vocetur *maius*; iſtud *minus*. Itaque cùm ex methodo tradita in tertio huius Operis libro obtineamus calculos ſingulorum periphericorum; indidem conſtabit eorum differentia, quam nominamus *coronam*.

PROPOSITIO XVIII.

Pono (*Fig.* 70.) r d s eſſe ſuperiorem partem ſemicycloideos paruæ, cuius baſis r c, axis c d, & illi ad partes oppoſitas ſuper eadem baſi reſpondere alteram ſuperiorem partem ſemicycloideos paruæ r b s, cuius axis b c erit æqualis axi c d. Pono præterea rectam a c habere rationem numeri ad numerum, & rectam a c non eſſe minorem ipſa b c. Ex puncto c excitata ſit c l perpendicularis ad planum e c d, æqualis ipſi c d.

Oſtendendum eſt coronam integram eſſe æqualem cylindraceo altitudinis c l, baſeos æquantis tot octonarios circulorum deſcriptorum diametro b d, quot vnitates continet numerus reſpondens rectæ a c. Ita vt ſi ex recta b c auferantur b o, o p, p q, q a, & ita deinceps in infinitum, corona clauſa, nempe quando a congruit puncto b, æquet cylindraceum altitudinis c l, baſeos æquantis vnum octonarium circulorum; ſi a congruat puncto o, duos octonarios; ſi puncto p, tres; ſi puncto q, quatuor, & ita conſequenter ſecundum progreſſionem arithmeticam.

Per b, d, o, p agantur b i, d x, ou, p z parallelæ ad rectam a h vel c r; ponatur circa rectam b i generari corona clauſa motu figuræ d r b s. Libræ planæ axe c r ſuſtentaculo b i æquiponderans cycloidi paruæ r d s eſt quadrans circuli genitoris b e d f per primi libri decimam ſextam; ergo per decimam ſecundi tetragoniſmicorum ſi axis c r mutetur in b i, & ſuſtentaculum b i in o u, æquiponderans eidem ſuſpenſo erit ipſum ſuſpenſum ſemel ſumptum, ſed auctum æquiponderante prioris ſuſpenſionis. Ratio verò cur ſemel ſumatur eſt quia receſsûs b c interuallum æquat longitudinem brachij b o, quapropter cum receſſus erit c o, ſumetur bis; cum c p, ter; cum c q, quater &c. ſemper verò augebitur æquiponderante primæ ſuſpenſionis. Similiter ſemicycloidi paruæ r b s axe r s, ſuſtentaculo d x, æquiponderans eſt quadrans circuli genitoris; ergo per nonam ſecundi tetragoniſmicorum, ſi axis c s mutetur in b i, & ſuſtentaculum d x in o u, æquiponderans ſemicycloidi paruæ r b s erit ipſa ſemicycloi-

des r b s semel sumpta, sed imminuta parte æquiponderante; perpendiculo autem o u erit eadem r b s bis sumpta, detracto æquiponderante eodem; perpendiculo autem p z, ter sumpta, dempto eodem &c. ipsa verò semicycloides æquat bis quadratum b c per duodecimam primi libri.

Rursus completis parallelogrammis b c r i, b c s t, i t m u, u m n z, quoniam axe i t, sustentaculo u m, æquiponderans parallelogrammo r s t i est dimidium ipsius parallelogrammi; ipsum verò dimidium æquat, per tertiam libri primi, dimidium circuli genitoris; æquiponderans toti figuræ i r d s t erit tres quadrantes circuli genitoris aucti duobus quadratis semidiametri b c; vel si progressionis perspectæ ponatur primus terminus quadratum b c; secundus verò termius sit b e d f circulus, æquiponderans istud erit tres quadrantes secundi termini perspectæ progressionis, & insuper bis primus terminus. Æquiponderans autem figuræ i r b s t erit tres quadrantes secundi termini, deducto bis primo.

Ad rectam c l æqualem radio c d recta c y sit vt circulus ad quadratum suæ diametri, vel, sicut initio tertij libri ostendimus, vt quadrans secundi termini perspectæ progressionis ad primum terminum. Igitur per methodum decimæ octauæ primi libri, periphericum maius est cylindraceum altitudinis c y, baseos æquantis octuplum eius quod æquiponderat figuræ i r d s t, axe i t, sustentaculo u m: periphericum verò minus est cylindraceum altitudinis eiusdem c y, baseos æquantis octuplum æquiponderantis figuræ i r b s t, iisdem positis. Quoniam igitur corona est differentia periphericorum, si ex basi cylindracei maioris auferatur basis cylindracei minoris, residua fiet basis cylindracei æquantis coronam, & præditi eadem altitudine c y. Leges porrò subductionis postulant vt quoniam in basi minoris cylindracei sunt quadrantes addititij tres secundi termini, & in basi maioris totidem etiam addititij, se se elidant & nihil remaneat ex æquiponderante primæ suspensionis factæ axe r s; quod, vt patet, est generalissimum, quæcunque sit figura r d s b, modo parallelæ ad rectam b d, secentur bifariam occursu rectæ r s, ac proinde sint ordinatim applicatæ ad ipsam r s. Quia verò basis cylindracei minoris habet duplum primi termini sed ablatiuum, basis autem maioris habet illud ipsum sed addititium, patet ex subductionis Algebricæ præscripto, relinqui quatuor primos terminos addititios, hoc est, suspensum b r d s, quod æquale per primi duodecimam est quadruplo quadrati b c, hoc est, quadruplo primi termini. Igitur cùm si ex æquiponderante totius i r d s t auferatur æquiponderans partis i r b s t relinquatur æquiponderans alterius partis r d s b; patet compendiosiùs (quæcunque sit figura r b s d, habens proprietatem suprà dictam) obtineri basim cylindracei æquantis coronam, si inueniatur æquiponderans figuræ r d s b; quæ cùm habeat grauitatis centrum in recta r s, æquiponderans illius, axe b i, erit semel suspensum; axe o u, bis; axe z p ter &c. octuplum autem istius æquiponderantis erit basis quæsita.

Habemus ergo ex iſta libræ noſtræ methodo coronam genitam figura qualibet r d ſ t, eſſe æqualem cylindraceo altitudinis c y, baſeos quæ ad octuplum figura r d ſ b ſuſpenſæ ſit vt c o diſtantia axis cuiuſlibet u o, ad o p diſtantiam axis & ſuſtentaculi, quæ in iſtis omnibus ponitur eſſe æqualis dimidio rectæ b d. Quoniam igitur in cauſa præſenti figura r b ſ d eſt quadrupla quadrati b c, vel eſt quater primus terminus, patet coronam clauſam genitam reuolutione figuræ b r d s eſſe æqualem cylindraceo altitudinis c y, baſeos æquantis triginta duos primos terminos; genitam deinde circa o u & apertam vtrinque interuallo rectæ o b, bis triginta duos; genitam deinde circa p z & apertam vtrinque interuallo rectæ p b, ter triginta duos; & ſic deinceps.

Denique quoniam vt eſt l c recta ad c y, hoc eſt, vt primus terminus progreſſionis perſpectæ ad quadrantem ſecundi, ita ſunt triginta duo primi termini ad octo ſecundos patet ex reciprocationis lege cylindraceum altitudinis c l vel c d, baſeos æquantis octo ſecundos terminos, vel circulos genitores, eſſe æquale cylindraceo altitudinis c y, baſeos æquantis triginta duo primos terminos: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Propoſitionis methodum eſſe generaliſſimam patet; concordiam autem eſſe omnimodam cum demonſtratis à R. P. Andrea Tacquet, examinatori cuilibet planum erit. Vnde confirmatur principiorum libræ veritas, eorúmque compendioſa methodus admirationem perito cuique Geometræ non vulgarem facit.

COROLLARIVM II.

Si b e d f ſit circulus, coronæ clauſæ æquale erit cylindraceum altitudinis c y, baſeos æquantis ipſum circulum ſiue ſecundum progreſſionis perſpectæ terminum octies ſumptum; ergo per reciprocationis leges iſta corona clauſa erit æqualis cylindraceo altitudinis c l, baſeos æquantis octo quadrantes tertij termini, ſiue duos terminos tertios perſpectæ progreſſionis: & ſi gignatur circa manentem o u, bis duos illos terminos; ſi circa p z, ter; &c.

PROPOSITIO XIX.

Iſdem manentibus pro parua cycloide (*Fig. 70.*) periphericum maius genitum motu figuræ i r d ſ t circa manentem b i, intelligatur diuiſum bifariam à plano incedente per rectam b t, & parallelo ad planum l c r; in præſens verò conſideretur pars illa quæ ad partes d iacet, & eſto A grauitatis centrum partis illius; quod, vt patet, iacebit in recta b d. Intelligatur præterea progreſſio perſpecta cuius primus terminus ſit, vt ſuprà, quadratum b c, ſecundus, circulus b e d f.

Oſtendendum eſt, vt tres decimæ ſextæ partes tertij termini perſpectæ progreſſionis, auctæ dimidio ſecundi, ſunt ad vndecim nouenas primi, auctas ſecundi quinq; vnciis, ita eſſe rectã b c vel b o, ad b A.

Quoniam ex decima nona tertij libri axe b i, perpendiculo plano per b i ducto, æquidiſtanter plano l c r, ſuſtentaculo m u, æquiponderans portioni peripherici, quæ ſuper baſi i r d b & infra ipſam inſiſtit, eſt cylindraceum altitudinis c l, baſeos æquantis quatuor nouenas quadrati c d; æquiponderans ſoli portioni quæ inſiſtit ſuper baſi i r d b erit cylindraceum eiuſdem altitudinis, baſeos æquantis duas nouenas quadrati b c: ergo ex ſexta eiuſdem libri, æquiponderans dicylindraceo, cuius ſectio ſit quadratum habens pro latere ordinatim applicatam ad baſim c r, eſt tres ſemiſſes prioris æquiponderantis; ac proinde eſt cylindraceum eiuſdem altitudinis, baſeos æquantis tres nouenas, vel trientem quadrati c d. Igitur ex corollario quarto octauæ libri eiuſdem, duplum huius baſeos, nempe bes quadrati c d, eſt ad poſitionem rectæ b c quartus gradus, quorum primus eſt parallelogrammum dimetientis b c, ſecundus figura c d r. Præterea ſi in alia ſerie primus gradus ponatur parallelogrammum dimetientis b c; ſecundus verò componatur ex primo & ex figura c d r, ex corollariis poſtremis decimæ tertiæ tertij libri liquet tertium gradum huius ſecundæ ſeriei eſſe primum, auctum bis ſecundo primæ ſeriei, & ſemel tertio eiuſdem & ſeriei: quartum verò ſecundæ ſeriei eſſe primum, auctum ter ſecundo primæ, ter tertio primæ, & ſemel quarto eiuſdem primæ.

Rurſus primæ ſeriei primus terminus, eſt rectangulum i b c r, ſiue dimidium circuli b e d f; ſecundus i r d b eſt æqualis quadrato c d ratione portionis r d c, ex duodecima primi; & dimidio circuli b e d, ratione parallelogrammi i b c r; tertius eſt æqualis quadranti circuli b e d f, nempe duplo æquiponderantis reperti in decima ſexta primi; quartus denique eſt bes quadrati b c. Igitur in ſecunda ſerie quartus gradus eſt vndecim trientes primi termini progreſſionis perſpectæ, quam in ſuperiore aſſumpſimus, & ſimul quinque quadrantes ſecundi termini. Ergò axe i t, ſuſtentaculo u m, perpendiculo plano per t i ducto æquidiſtanter plano l c r, æquiponderans dicylindraceo genito ex figura i r d b t ad poſitionem plani l d c genito, eſt per corollarium quartum octauæ tertij libri, æquale cylindraceo altitudinis b c, baſeos æquantis dimidium iſtius quarti gradûs, nempe baſeos æquantis vndecim ſextantes primi termini, auctos quinque octauis ſecundi progreſſionis perſpectæ. Ergo per ſextam eiuſdem tertij, cylindraceum altitudinis b c, vel c l, baſeos æquantis beſſem baſeos poſtremò conſignatæ, eſt æquale ſpatio quod iiſdem manentibus æquiponderat peripherici parti ſuper baſi i r d b inſiſtenti; eiuſmodi autem bes eſt vndecim nouenæ primi termini, auctæ quinque vnciis ſecundi perſpectæ progreſſionis.

Præterea per methodum traditam habemus tertium gradum in secunda serie esse primum primæ seriei auctum bis secundo & semel tertio eiusdem seriei: ergo tertius in secunda serie gradus est tres quadrantes secundi termini, aucti duplo primi: igitur figuræ i r d b iisdem positis æquiponderat dimidium eiusdem spatij; ergo ex methodo decimæ nonæ primi libri, portio peripherici insistens super basi i r d b est æqualis cylindraceo altitudinis c y, baseos æquantis duplum æquiponderantis vltimò collecti. Igitur dicylindraceum istud est æquale cylindraceo altitudinis c y, baseos æquantis tres quadrantes secundi termini auctos duplo primi; & cùm ex demonstratis initio vigesimæ quintæ libri tertij recta l c ad c y sit vt secundus terminus perspectæ ad primi quadrantem, per reciprocationis legem est æquale cylindraceo altitudinis c l, baseos æquantis tres decimas sextas tertij termini, auctas dimidio secundi. Suspensum igitur ad æquiponderans est, vt basis cylindracei istius ad basim cylindracei illius, quod ostendimus esse eiusdem altitudinis c l, & æquale spatio æquiponderanti.

Quoniam igitur vt suspensum ad suum æquiponderans, ita ex lege libræ est brachium o b ad b A; patet o b ad b A esse vt sunt tres decimæ sextæ partes tertij termini auctæ dimidio secundi, ad quinque vncias secundi auctas vndecim nouenis primi: sed quod accidit in suspenso assumpto, nempe in quadrante totius suspensi propositi, contingit quoque in quatuor quadrantibus siue in toto, vt patet: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

COmpleatur iisdem manentibus pro circulo (*Fig.* 70.) parallelogrammum e f H D, & intelligatur circa D H manentem circumuolui figura D e d f H, gignique periphericum, cuius dimidium vt in superiore contemplamur: planum per A ductum æquidistanter plano l c r, transeat per grauitatis centrum dimidij illius peripherici.

Ostendendum est rectam o b vel b c ad b A esse, vt decima sexta pars tertij termini progressionis perspectæ suprà expositæ, aucta quinque semunciis secundi termini, est ad primum, auctum quinque decimis sextis secundi.

Istud ostenditur methodo eadem, qua superior: nam figuræ D e d b libræ planæ axe b D, sustentaculo o u æquiponderant quinque vnciæ primi termini, & insuper semiquadrans secundi: ergo cylindraceum altitudinis c y, baseos duplæ, nempe æquantis quinque sextantes primi, auctos quadrante secundi, æquat dicylindraceum genitum ex figura D e b d ad positionem plani l c d: ergo peripherici portio quæ insistit super basi D e d b est cylindraceum altitudinis c y, baseos eiusdem; vel per reciprocationis le-

ges, altitudinis c l, vel c d, baſeos æquantis decimam ſextam partem tertij termini, auctam quinque ſemunciis ſecundi.

Rurſus in prima ſerie primus terminus eſt æqualis quadrato b c e D; ac proinde eſt æqualis primo progreſſionis perſpectæ termino; ſecundus eſt e d c, nempe quadrans ſecundi termini progreſſionis eiuſdem; tertius ex ſecunda quarti tetragoniſmicorum eſt bes primi; quartus ex corollario vigeſimæ octauæ quarti libri præſentis Operis eſt tres vigeſimæ quartæ partes ſecundi; igitur quartus gradus in ſecunda ſerie mixta, erit ter primus, auctus quindecim decimis ſextis ſecundi. Quoniam igitur quarti dimidium eſt tres ſemiſſes termini primi progreſſionis perſpectæ, aucti quindecim trigeſimis ſecundis ſecundi: huius verò dimidij bes eſt primus auctus quinque decimis ſextis ſecundi, patet id in quadrante ſuſpenſi propoſiti verum eſſe quod probandum ſuſcepimus: ergo id pariter verum eſt in toto, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXI.

Iſdem manentibus pro cycloide parua (*Fig.* 70.) circa axem i t manentem intelligatur circumuolui figura i r b ſ t, & gigni periphericum, cuius dimidium ad partes d iacens contemplamur in præſens; eſto A grauitatis centrum eiuſdem.

Oſtendendum eſt rectam o b vel b c eſſe ad b A, vt tres decimæ ſextæ partes tertij termini progreſſionis eiuſdem perſpectæ, deducto dimidio ſecundi, ſunt ad quinque ſecundi vncias, ſubductis vndecim nouenis primi.

Iſtud oſtenditur eodem pacto quo decima nona ſuperior, poſita ſemel doctrina quam in corollariis decimæ tertiæ tertij libri tradidimus; quia enim in ſecunda ſerie primus gradus ponitur parallelogrammum i b c r, ſecundus verò figura figura i r b, hoc eſt † primus terminus primæ ſeriei – ſecundus eiuſdem ſeriei; tertius in ſecunda ſerie erit † primus primę ſeriei – bis ſecundus eiuſdem primæ † tertius ſemel: quartus verò † primus – ter ſecundus † ter tertius – ſemel quartus eiuſdem primæ ſeriei. Igitur cùm in decima nona ſuperiore oſtenderimus hos gradus primæ ſeriei, methodúmq; eos transferendi in calculum præſentem, ſi quis illi inſiſtens ſupputet caſum propoſitum, inueniet ſuſpenſum eſſe cylindraceum altitudinis c l, vel b c, baſeos æquantis tres decimas ſextas partes tertij termini progreſſionis ſuprà conſtitutæ, deducto dimidio ſecundi: æquiponderans autem eſſe cylindraceum eiuſdem altitudinis, baſeos æquantis quinque vncias ſecundi, ſubductis vndecim nouenis primi: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXII.

Iſdem manentibus pro circulo (*Fig.* 70.) circa axem D H manentem intelligatur circumuolui figura D e b f H, & gigni peri-

phericum,

phericum, cuius dimidium ad partes d iacens contemplamur in præsens: esto A grauitatis centrum eiusdem.

Ostendendum est rectam o b vel b c esse ad b A, vt quinque semunciæ secundi termini, imminutæ parte decima sexta tertij termini progressionis perspectæ sunt ad primum imminutum quinque decimis sextis secundi.

Præsens propositio eodem prorsus pacto ostenditur, positâ semel vigesimâ, quo superior est demonstrata ex decima nona; itaque ne longum sit referre superuacanea; missa ea facimus, & vsitata clausula inferimus id esse demonstratum, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIII.

Iisdem manentibus pro cycloide parua (*Fig.* 70.) intelligatur duci planum per t i æquidistanter plano l c r, & per illud diuidi corona cycloidica in duas partes, quarum quæ ad partes d spectat, habeat centrum grauitatis in puncto A; eiusmodi enim centrum patet esse in recta b d.

Ostendendum est rectam b o vel b c ad b A esse, vt terminus secundus progressionis eiusdem perspectæ est ad viginti duas nouenas primi.

Quoniam ex methodo decimæ octauæ hæc corona est periphericum maius subducto minore, coronæ dimidio illi æquiponderans erit ipsum maioris æquiponderans deducto æquiponderante minoris. Rursus quoniam in propositionibus proximè antecedentibus, secundus terminus proportionalis est basis æquiponderantis parti quartæ totius suspensi peripherici, ille terminus quater sumptus dabit basim cylindracei altitudine c l prædìti, & æquantis spatium æquiponderans toti suspenso peripherico. Cùm igitur pro cycloide propositio decima nona det vndecim nouenas primi termini auctas quinque vnciis secundi, & propositio vigesima prima det illas easdem quinque vncias secundi imminutas illis iisdem vndecim nouenis primi; & cùm ex decimæ nonæ basi debeat auferri vigesimæ primæ basis, residua fiet basis æquans viginti duas nouenas primi termini, cuius quadruplum erit basis quæsita nempe octoginta octo nouenæ primi termini. Cùm igitur, per decimam octauam, coronæ dimidium quod contemplamur sit æquale cylindraceo altitudinis c l vel c d, baseos æquantis quater secundum terminum, vel viginti quatuor sextantes termini secundi; & cùm suspensum ad æquiponderans sit vt basis ista ad basim illam; vt autem suspensum ad æquiponderans, ita sit brachium b o ad b A, patet rectam b o vel b c ad b A esse vt quadruplum secundi termini ad octoginta octo nouenas primi: vel vt est terminus secundus ad viginti duas nouenas primi; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Notandum eſt in quocunque cuiuſlibet figuræ caſu partes deſumptas ex propoſitionibus 19. & 21. quæ addititiâ notâ præditæ ſunt per ſubtractionem ſe ſe conſumere; nec reſiduum fieri niſi duplum alterius partis addititium.

PROPOSITIO XXIV.

Iſdem manentibus (*Fig.*70.) pro circulo intelligatur planum per ti duci vt ſuprà, & diuidere coronam ex circulo genitam in duas partes, quarum quæ ad d ſpectat, conſideretur in hac propoſitione: punctum A ſit grauitatis centrum partis eiuſmodi.

Oſtendendum eſt rectam o b vel b c ad b A eſſe vt eſt tertius terminus perſpectæ progreſſionis ad quatuor terminos primos.

Methodus ſuperioris propoſitionis inſeruit demonſtrationi præſentis. Si igitur ex baſi reperta in vigeſimâ pro æquiponderante maioris peripherici auferatur baſis vigeſimæ ſecundæ pro æquiponderante peripherici minoris, relinquitur duplum primi termini progreſſionis perſpectæ; quadruplum huius reſidui ſunt quatuor termini primi. Sed ex corollario decimæ octauæ tota corona habet pro baſi duos tertios terminos; ergo dimidio coronæ tribui debet vnus tertius terminus: vt igitur vnus tertius terminus ad quatuor terminos primos, ita eſt recta b c ad b A, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXV.

Iſdem manentibus (*Fig.* 70.) ſuperficies coronæ genitæ ex ſuperiore parte cycloideos magnæ eſt æqualis ſpatio quod ad ſexdecim circulos genitores ſit vt diameter quadrati ad latus eiuſdem.

Recta r s ponatur baſis ſuperioris partis cycloideos magnæ r d s, & in ea ſumptum ſit quoduis punctum V, per quod ducta ſit P T complens parallelogrammum P b d T, occurrens limbis b r, d r in R, S. Patet ordinatim applicatas V R, V S eſſe æquales; æquales igitur ſunt P R, ST, ac proinde duæ ſimul P R, P S æquant totam P T, vel b d. Cùm igitur P S ſit ſemidiameter ſectionis peripherici maioris factæ per planum parallelum plano l c d incedens per rectam P T; P R verò ſit ſemidiameter ſectionis factæ in peripherico minore, patet duorum iſtorum circulorum peripherias ſimul eſſe æquales peripheriæ circuli ſemidiametro P T deſcripti. Ergo ſuperficies coronæ non tantum cycloidicæ, ſed cuiuſlibet alterius nominis, eſt ad parallelogrammum mixtum altitudinis b d inſiſtens ſuper curuâ r d s, vt peripheria circuli ad ſemidiametrum.

Quoniam igitur curua r S d in ſuperiore parte cycloideos magnæ eſt per trigeſimam ſextam ſuperioris libri, æqualis rectæ, quæ media ſit inter c d & octuplam ipſius c d; tota linea r d s erit media inter c d & rectam quæ ad ipſam c d ſit longitudine vt 32. ad 1. vel quæ ad quadruplam

rectæ c d sit, vt diameter quadrati ad eiusdem latus. Rectangulum igitur sub b d & sub curua r d s, (hoc est parallelogrammum mixtum) est æquale rectangulo sub c d & sub recta quæ ad octuplam rectæ c d sit, vt diameter quadrati ad latus eiusdem.

Quoniam igitur hoc spatium est ad superficiem periphericam vt semidiameter circuli ad peripheriam eiusdem, vel vt primus terminus adiunctę ad bis secundum, patet periphericam superficiem huius coronę esse æqualem spatio quod ad sexdecim circulos genitores sit vt diameter quadrati ad latus eiusdem, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Cùm in antecedentibus supputauerim coronam genitam ex paruæ cycloideos parte superiore, hîc magnæ partem superiorem computare coactus fui, nempe quia parallelogrammum mixtum in parua cognitum non habeo, sicuti in magnâ; neque qui me id doceat adhuc inueni vllum.

PROPOSITIO XXVI.

Iisdem vt in proximè superiore, pro circulo manentibus (*Fig.* 70.) superficies coronæ circularis est æqualis quadruplo termini tertij progressionis perspectæ.

Per superioris methodum, inueniri debet parallelogrammum mixtum, cuius basis sit e d f altitudo b d; illud verò ex tertia primi libri est bis circulus e d f b, siue bis terminus secundus progressionis perspectæ. Secundò ex eadem methodo vt est primus terminus adiunctæ progressionis ad bis secundum, ita est parallelogrammum mixtum ad superficiem quæsitam; ergo cùm parallelogrammum mixtum æquet duos terminos progressionis perspectæ, & perspectæ ratio sit eadem cum ratione adiunctæ, patet superficiem illam coronalem æquare quatuor terminos tertios progressionis perspectæ, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam in priore propositione ostendimus si superficies coronalis secetur quocunque plano ad planum l c d parallelo, sectionem esse æqualem peripheriæ circuli semidiametro b d descripti; liquet eiusmodi superficiei centrum grauitatis ad positionem plani l c d iacêre in plano ducto per centrum grauitatis parallelogrammi mixti. Est enim hæc superficies, quod ad istud pertinet, simillima superficiei parallelogrammi mixti intercepti inter eadem plana ad positionem eandem intercipientia portionem superficiei illius, cuius centrum grauitatis quæritur.

PROPOSITIO XXVII.

Reuocetur (*Fig.* 65.) schema propositionis quinquagesimæ septimæ libri prioris, & in eo punctum g bifariam secet rectam a b, ita vt g congruat centro e, & figura d a g sit semicycloideos magnæ pars superior. Intelligatur circa axem c b manentem circumuo-

lui figura t d a b, & superficiei quam describit curua d a consideretur ea portio quam ad partes a relinquit planum T b c: Ponatur autem similis & æqualis superficies ad rectæ a b partes z, vt eius centrum grauitatis iaceat in recta a b.

Ostendendum est, si ex b a abscindatur b E, quæ contineat octoginta sex centesimas partes rectæ ad quam radius b a sit sicut quadrãs peripheriæ circularis ad suum radium, punctum E esse grauitatis centrum superficiei illius compositæ.

Libræ planæ axe g h, sustentaculo b z, patet ex methodo quinquagesimæ septimæ suprà laudatæ æquiponderans figuræ parabolicæ a g h esse duas quintas partes ipsius, quæ cùm sit bes rectanguli a g h, eiusmodi æquiponderans erit quatuor decimæ quintæ partes rectanguli a g h. Ergo si b u secetur bifariam in μ, per recessum axe t b, sustentaculo μ G, parallelo ad axem b t, æquiponderans eidem figuræ parabolicæ erit quatuor decimæ quintæ partes rectanguli a g h, auctæ suspensi siue rectanguli eiusdem besse, hoc est, erit quatuordecim decimæ quintæ rectanguli a g h. Rursus rectangulo b g h r, iisdem positis, æquiponderat dimidium ipsius, cùm b μ, b g rectæ ponantur æquales: ergo toti figuræ b a h r axe br, sustentaculo u l æquiponderat dimidium illius æquiponderantis ex octaua secundi tetragonismicorum: primo igitur gradu posito parallelogrammo t H u b ad positionem rectæ u b; secundo, figurâ b a h r; tertius æqualis erit duplo æquiponderantis aptati sustentaculo u l; ac proinde erit ipsum æquiponderans aptatum sustentaculo μ G, videlicet octoginta sex sexagesimæ rectanguli a e h. Præterea quoniam figura a b r h, ratione partis a g h continet bessem rectanguli a g h, vel g b r h; addita altera parte g b r h, tota figura a b r h continet quinque trientes rectanguli a g h, vel centum sexagesimas partes illius rectanguli.

Quoniam igitur ex methodo illius quinquagesimæ septimæ, figura a b r h est certo quodam modo ibi præscripto æqualis portioni cuneatæ superficiei insistenti super arcu d a; & æquiponderans illi ita insistenti est idem cum tertio gradu suprà relato; insistens figura ad æquiponderans axe b t, sustentaculo u l erit vt centum sexagesimæ partes rectanguli a g h, ad octoginta sex easdem partes; erit ergo vt 100. ad 86. Per methodum igitur eiusdem propositionis si recta b E contineat octoginta sex centesimas partes rectæ, quæ ad b a sit vt radius ad quadrantem peripheriæ circularis eodem radio descriptæ, erit E grauitatis centrum peripheriæ propositæ, prout erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam adiunctæ progressionis secundus terminus est, ex definitionibus traditis initio tertij libri, dimidium totius peripheriæ circularis, quadrans totius peripheriæ erit dimidium secundi termini adiunctæ, & primus erit radius b a: ergo cùm vt secundus adiunctæ ad primum, ita

ſit primus ad ſecundum ſubadiunctæ, patet rectam ad quam radius b a ſit vt dimidium ſecundi adiunctæ ad primum, eſſe duplam ſecundi termini ſubadiunctæ, poſito primo b a; ergo b E eſt 172. centeſimæ partes ſecundi termini ſubadiunctæ.

PROPOSITIO XXVIII.

Iisdem manentibus (*Fig.* 65.) recta t d producta occurrat tangenti a o in λ; circa axem a o manentem figura a d λ comprehenſa arcu d a, & rectis a λ, d λ, intelligatur volui, & deſcribere ſuperficiem cuius dimidium hîc ſpectamus, illud ſcilicet quod planum per a λ ductum æquidiſtanter plano T b c, relinquit ad partes b. Intelligatur altera ſuperficies ſimilis, æqualis & ſimiliter poſita ad axis b a partes z, vt grauitatis centrum ſuperficiei compoſitæ ſit in recta a b.

Oſtendendum eſt, ſi ex recta a b reſecetur a θ æqualis ſexaginta centeſimis partibus ſecundi termini ſubadiunctæ, punctum θ eſſe grauitatis centrum ſuperficiei periphericæ.

Figuram a h n eſſe æqualem vngulari ſuperficiei quam planum per a o ductum abſcindit ex cylindracea ſuperficie quam lineæ d s æquidiſtans deſcripſit incedendo per limbum d a, patet ex corollario primo decimæ octauæ quinti libri, vbi oſtendimus duas cuneatas ſubcontrarias eſſe ſimul æquales parallelogrammo mixto: ergo cùm parallelogrammo mixto æquale ſit expanſum a b r n, & cuneatarum vni æqualis ſit expanſa a h r b; alteri cuneatæ æqualis erit expanſa a g h n. Ex methodo autem quinquageſimæ ſeptimæ libri ſuperioris liquet ſi ex b a abſcindatur a Q ipſi æqualis, & agatur Q S æquidiſtans rectæ a n, bis æquiponderans figuræ a h n vt iacet manenti, axe a n, ſuſtentaculo Q S, eſſe æquale ſpatio quod cuneatæ iſti figuræ æquiponderat iiſdem poſitis. Cùm igitur h a n ſit triens rectanguli a g h, vt ex quadratura parabolæ liquet, cuneata ſuperficies erit æqualis trienti rectanguli a g h. Rurſus quoniam ad poſitionem rectæ a b ſi primus gradus ponatur rectangulum a g h, & ſecundus triangulum rectilineum a h n, tertius eſt figura parabolica a h n, vt patet ex libri prioris quadrageſimæ primæ propoſitionis methodo; ex quadrageſima quarta eiuſdem libri quintus gradus erit æqualis quintæ parti rectanguli a g h, & dimidium quinti gradûs æquiponderabit tertio, axe a n, ſuſtentaculo ducto per dimidium rectæ a Q: ergo dimidium huius dimidij æquiponderabit eidem tertio, ſuſtentaculo Q S; ergo dimidium quinti gradûs, ſiue decima pars rectanguli a g h æquiponderat cuneatæ figuræ. Igitur ſuſpenſa figura ad æquiponderans ſpatium eſt vt triens ad decimam partem, vel vt 100. ad 30. & ſi vt 100. ad 30. ita dupla ſecundi termini ſubadiunctæ de quo agit corollarium ſuperioris, ſit ad a θ; erit, per ſimilem methodum ſuperioris, θ centrum grauitatis ſuperficiei propoſitæ. Igitur cùm vt 50. ad 30. vel vt 100. ad 60. ita ex conſtructione ſit ſe-

cundus terminus ſubadiunctæ ad rectam a θ; patet quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam figura b a h r eſt æqualis quinque trientibus rectanguli a g h, & ceratoides parabolica a h n eſt æqualis vni trienti; apertum eſt ſuperficies ſuperioris & præſentis propoſitionis eſſe vt quinarium & vnitatem; ſunt enim æquales illis figuris, ſingulæ ſingulis.

PROPOSITIO XXIX.

ESto (*Fig.* 70.) r d s & r b s pars ſuperior cycloideos magnæ, cuius circulus genitor b e d f; circa manentem i t intelligatur motu figuræ r d l b deſcripta corona, cuius ſuperficies ſecetur bifariam plano per i t ducto æquidiſtanter plano l c r; eius verò ſuperficiei partem quæ ad d ſpectat, hoc loco contemplamur.

Oſtendendum eſt ſi ſecundus terminus ſubadiunctæ progreſſionis, de quo egimus in ſuperioris corollario, diuidatur in quindecim partes; ex recta autem b d reſecetur b M continens vigintitres eiuſdemmet modi, punctum M eſſe grauitatis centrum ſuperficiei coronariæ, quam hîc ſpectamus.

Hanc ſuperficiem coronalem, quam modo tractamus, componi ex duabus duarum priorum propoſitionum manifeſtum eſt. Sit ergo N grauitatis centrum repertum in vigeſima ſeptima pro maiore parte huius coronalis; ſit A centrum in vigeſima ſeptima inuentum pro minore; ergo ſi M ſit centrum totius, vt maior ad minorem, ita debet eſſe A M recta ad M N, ex lege reciproca libræ; Ergo per corollarium ſuperioris recta A M ad M N eſt, vt quinarius ad vnitatem; ac proinde recta A N ad M N eſt vt ſenarius ad vnitatem.

Rurſus quoniam ex vigeſimæ ſeptimæ corollario recta b N ad ſecundum ſubadiunctæ terminum, cuius primus ſit b d, eſt longitudine ſicut 172. ad 100. ſecundus verò iſte terminus eſt, per ſuperiorem, ad b A ſicut 100. ad 60.: ergo ex æquo, vt 172. ad 60. ita longitudine eſt b N ad b A: ergo ſi ſecundus terminus diuidatur in centrum partes ęquales, eiuſmodi 172. conficiunt rectam b N; rectam b A 60. rectam A M 112. Si igitur ſecundus terminus tribuatur in 600. partes ęquales; b N erit partium talium 1032. & M N partium 112. ergo b M erit partium 920. qualium ſecundus terminus eſt 600. Secundus igitur ſubadiunctæ terminus ad b M eſt longitudine vt 920. ad 600. vel contractiùs, vt 23. ad 15. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Ex corollario vigeſimę ſextę liquet planum ductum per centrum grauitatis cylindracei mixti, vel, quod idem eſt, curuę r d s parallelum plano l c r tranſire per grauitatis centrum ſuperficiei iſtius coronalis quę ad

plani l c d partes r iacet; ergo cùm per quęsitum secundum quinquagesimę nonę superioris libri, eiusmodi planum obtineatur, habetur inde calculus centri grauitatis attinentis ad dimidium superficiei illius, cuius centrum in pręsenti propositione indagauimus.

COROLLARIVM II.

Hinc apertè constat methodus calculi pro aliis casibus coronę cycloidicę, siue clausa fuerit, siue aperta; & siue sumatur integra, siue quę libuerit eius portio ad positionem plani l c d. Calculus enim istorum omnium ita pendet ex demonstratis in superiore libro; vt illa falsa esse necessarium sit, si calculus iste ruinoso nitatur fundamento. Sed vt finis initio cohęreat, centrum semisuperficiei coronalis clausę ex circulo genitę, restat computandum.

PROPOSITIO XXX.

Circularis coronæ (*Fig.* 70.) clausæ semisuperficies proposita habet centrum M in recta b d ita collocatum, vt si quadratum b c ponatur primus perspectæ progressionis terminus, secundus verò sit circulus b e d f: & consequenter si adiunctæ illi progressionis primus terminus sit radius b c; secundus, dimidium peripheriæ b e d f; recta b M sit tripla secundi termini progressionis subadiunctæ.

Istud demonstratur methodo nonnihil diuersa à superiore, quia calculus rotundiùs exit per hanc quam per illam viam; alterutra enim vtrobique iniri potest. Ex corollario vigesimę sextę liquet vtramque simul superficiem maiorem & minorem esse ęquales parallegrammo mixto cuius altitudo ęquet peripheriam circuli semidiametro b d descripti. Pręterea ex communibus librę principiis constat duo simul ęquiponderantia duarum istarum superficierum esse ipsum ęquiponderans superficiei propositę. Vnde vltrà fit vt parallelogrammum mixtum ad duo simul ęquiponderantia, ita esse rectam b d vel b p ad b M.

Præterea ex methodo quinquagesimæ septimæ superioris libri habemus, (*Fig.* 65) duplum æquiponderantis figuræ b a h r (ponimus iam a h z b esse semicycloidem paruam circulo b q a genitam) axe b z, sustentaculo u l; vel æquiponderans eidem axe μG, esse æquale spatio quod æquiponderat cuneali superficiei insistenti super arcu q a, & abscissæ à plano obliquo incedente per b c rectam; rectæ autem e q, g h iacent in directum in hypothesi præsente. Eo autem ita constituto, æquiponderans figuræ g a h, (quæ est pars superior paruæ semicycloideos) est axe b r, sustentaculo μG, vt ex decima septima & decima octaua primi libri liquet, tres octauæ partes secundi termini progressionis perspectæ, cuius primus sit quadratum b c, auctæ primo. Pari pacto inuenitur æquiponderans figuræ a h g axe a n, sustentaculo bifariam secante rectam A Q, tres octauæ secundi termini primo imminutæ; summa igitur ex duobus istis

æquiponderantibus collecta est dodrans secundi termini progressionis iam dictæ. Suspensum autem, siue parallelogrammum mixtum altitudinis b d insistens super e d curuâ est æquale secundo termino, vt ex tertia primi libri colligitur. Vt igitur (*Fig.* 70.) suspensum siue secundus terminus progressionis perspectæ ad summam illam siue ad dodrantem perspectæ progressionis, ita est p b vel b d, vel bis primus adiunctæ terminus, ad tres semisses primi termini subadiunctæ progressionis. Rursus vt dimidium secundi perspectæ ad primum, ita tres semisses primi subadiunctæ se habent ad triplum secundi subadiunctæ, progressionis. Atqui ex methodo quinquagesimæ septimæ libri superioris, hæc est magnitudo rectæ b M; ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quoniam ex corollario primo vigesimæ propositionis libri quinti habemus calculum centri grauitatis pro arcu e d, patet ex corollario superioris, inde obtineri centrum grauitatis pro dimidio superficiei coronalis illius, cuius hîc grauitatis centrum inquisiuimus.

COROLLARIVM II.

Potest superioris propositionis calculus tractari methodo præsentis in hunc modum. Spatium æquiponderans propositionis vigesimæ septimæ continet (*Fig.* 65.) 86. sexagesimas rectanguli a g h; æquiponderans propositionis vigesimæ octauæ complectitur 6. sexagesimas eiusdem modi: summa est 92. sexagesimæ. Suspensum est 120. sexagesimæ: ergo suspensum ad æquiponderans est vt 120. ad 92. ergo ex præsentis methodo (*Fig.* 70.) recta b M ad secundum gradum subadiunctæ progressionis, cuius primus est b c, se habet longitudine sicut 184. ad 120. vel compendiosiùs sicut 23. ad 15. quod aptissimè quadrat demonstratis in vigesima nona.

PROPOSITIO XXXI.

Explicatur generatio cycloideon aliarum, & quæ sit in illis specialis difficultas.

Initio primi libri generationem dedimus cycloideos magnæ, quam hactenus semper eo nomine designauimus: Nunc de aliarum, quas *productas & contractas* vocant Recentiores, genesi aliquid nobis censemus antè dicendum, quàm præsenti libro finem imponamus. Tunc igitur ibi (*Fig.* 1.) cycloidis magnæ ortum traximus à duabus lationibus, vna circuli c e f o per parallelogrammum c f a x, ita vt diameter f c quamdiu fertur, vsque maneat parallela lateri a x, quoad ipsi congruat in termino lationis; altera, puncti A per peripheriam c e f; ita vt eodem tempore pars arcûs decursa sit ad totum arcum c e f, sicut erit pars rectæ f a æquantis peripheriam ad ipsam f a. Nunc verò si maneant duæ illæ lationes, illaque proportio partis quam punctum A decurrit in peripheriâ c e f, ad partem quam punctum f decurrit in semibasi f a; nempe vt pars arcûs diuersa perpetuò

perpetuò ſit ad partem ſemibaſeos decurſam, ſicut arcus c e f ſe habet ad ſemibaſim f a; ſi peripheria c e f ſit maior ſemibaſi f a, vocatur *cycloides contracta*; ſin minor, dicitur *producta*. Quando autem eſt æqualis, dicitur abſolutè *cycloides magna*, vel *cycloides magna primaria*. Certum eſt figuram ex differentiis, cuius dimetientes ad poſitionem baſeos a d ſunt z p, b c, r s eſſe ad figuram ex differentiis primariam, vt eſt recta a f ad arcum f e c; idque probari poteſt, illa ipſa methodo, qua vſi ſumus in prima illa primi libri: quapropter ſi illa proportio detur, problemata tertij & quarti libri ſolutionem ſuam conſequentur ex methodo illorum librorum. At problemata quinti libri ſolui omnia non poterunt niſi habeantur parallelogramma mixta, vngulares ſuperficies, quæ ſunt eorum quadratrices, vt in corollario quinquageſimæ nonæ monuimus, & inſuper iſtarum vngularium aliæ quadratrices, quas ſecundas appellauimus. Nemo autem quem ſciam dedit iſtas ſuperficies; vnde liquet methodos illas quæ *generales* eſſe iactantur, indigere plurimis aliis admodum abſtruſis, vt per illas ad exitum deducantur problemata propoſita; quod ſæpius dici debet, quia ſæpius videmus multos iſtis amplis titulis ſubjicere longè plurima, quæ penitus illis non ſubſunt. Cùm ad ſoluenda problemata quinti libri in cycloidibus ſecundariis nota eſſe debeant tria (datâ cùm opus erit circuli quadraturâ) nempe dimenſio mixti rectanguli, ſuperficiei cuneatæ, & alterius quam ſecundam quadratricem mixtam appellauimus; ne primum quidem eorum licet reliquis facilius videatur, adhuc cognitum extat. Dettonuillæus in epiſtolâ ad D. Hugguens de Zulichem contendit arcum d c z a eſſe æqualem dimidio perimetri ellipſeos, cuius maior & minor axes inueniantur hac methodo. *Vt circumferentia circuli generatoris ad compoſitam ex ipſa circumferentia & ex baſi cycloideos, ita eſt diameter circuli eiuſdem ad maiorem ſemiaxem ellipſeos quæſitum. Vt autem eadem compoſita ſe habet ad differentiam duarum partium ipſam componentium, ita eſt ſemiaxis maior ad ſemiaxem minorem quæſitum.* Iſtud, vt concedatur eſſe verum, non tamen adhuc ſatis eſt ad inueniendum rectangulum mixtum: cùm neſciatur ratio quam illa ellipſeos perimeter habet ad peripheriam circuli, vel ad rectam, quod tamen opus eſt ad conuerſionem illius rectanguli mixti in rectilineum, vel in circulum. Vt, inquam, verum eſſe concedatur; noui enim huius artis peritiſſimos, qui contendunt demonſtrationem adductam à Dettonuillæo vim non inferre, nec cogere ad aſſenſum. En vt modus iſte demonſtrandi ab antiquo diſcrepans non ſemper extorqueat conſenſum; ſuperfluum igitur non fuiſſet ſi veterum ineluctabili methodo iſtud demonſtraſſet; poterat enim id ita facere; *facilè mihi* (inquit pag. 7.) *foret præſentem methodum ad antiquam reducere, & afferre demonſtrationem illi ſimilem, quam protuli de æqualitate linearum ſpiralis & parabolicæ. Sed illam quamuis iam exarata apud me ſit, quia paulo longior foret & ſuperuacanea, prætermitto, contentus in ſpirali & parabolica ſpecimen huius conuerſionis dediſſe.*

Iſti porrò acres ac diligentes Iudices, hoc tantùm pronuntiant, intelle-

ctum non cogi adductis à Dettonuillæo rationibus; expectandúmque esse vt maiorem quadam insuper machina vim faciat. Id verò non est refellere tanquam falsum, quod ille ad probandum sibi proposuit, sed solum probandi modum rejicere hoc edicto, *nondum id esse demonstratum, quod erat demonstrandum.* Explicuimus igitur generationem aliarum cycloideon, earúmque specialem difficultatem, prout nobis propositum fuerat.

COROLLARIVM I.

Hinc patet si virtutes motrices punctorum A & f non sint inter se vt lineæ c e f, f a percurrendæ; siue, si spatia decursa in lineis c e f, f a non sint perpetuò sicut ipsæ lineæ c e f, f a; tramitem puncti A non esse vllius generis cycloidem; sed aliam quamdam lineam. Itaque cycloides est trames puncti A, quoties in hypothesi facta spatia decursa in lineis c e f, f a sunt perpetuò sicut ipsæ lineæ. Vel breuiùs, quoties vti spatia c e f, f a ita sunt virtutes motrices. Intelligimus autem virtutes motrices non impeditas ab effectûs sui plena consecutione.

COROLLARIVM II.

Quamuis ponamus puncta A & f moueri per lineas c e f, f a æquabiliter; hoc est, punctum A in percurrendis æqualibus partibus peripheriæ c e f, impendere æquales temporis partes: punctum item f in decurrendis partibus rectæ c f æqualibus consumere partes temporis æquales. Non propterea existimandum est idem euenire in percurrendis partibus curuæ c z a æqualibus. Si enim sumantur quotcunque æquales a r, r b, b z, tempus quo percurritur a r est maius tempore partis r b; & istius, tempore partis b z.

PROPOSITIO XXXII.

PRoponitur difficultas quædam physica, quæ ex generatione illarum cycloideon oritur.

Posuimus in propositione superiore (*Fig.* 1.) cycloidem generari ex duplici latione, quarum vna deferatur circulus c e f o intra parallelas c x, f a, ita vt diameter c f æquidistet semper lateri a x; altera deferatur punctum A per peripheriam c e f. Intelligatur secunda superficies plana congruere primæ superficiei a f c, & in illa iacêre punctum A, atque ex centro g, describi circulus secundus semidiametro g A; ergo huius circuli secundi peripheria congruet peripheriæ c e f o. Intelligatur punctum A fixum in illa peripheriâ secundâ, ita vt dum ipsum mouetur latione suâ per peripheriam c e f primi circuli, peripheria cui affixum est vertatur circa centrum g radio g A circumducta. Hoc posito istud accidit vt circuli secundi diameter alia ex alia succedat in locum diametri c f, attinentis ed circulum primum; ac proinde vt peripheriæ secundæ aliud & aliud punctum congruat puncto f per rectam f a delato. Hinc igitur fit vt peripheria secundi circuli æqualis peripheriæ c e f applicetur tota rectæ f a, ita vt quodlibet eiusmodi peripheriæ punctum reperiat in recta f a pun-

ctum cui durante motu congruat diuersum à punctis quibus congruunt reliqua peripheriæ puncta. Non enim in idem lineæ f a punctum conueniunt duo peripheriæ puncta, nec idem peripheriæ punctum vindicat sibi duo puncta in linea f a: cùm vt istud fieret, deberet cessare motus puncti A, & vt illud accideret, cohibendus esset motus puncti f per rectam f a: neutrum autem fit, salua hypothesi, & generatione ista cycloideos.

Difficultas verò physica statim occurrit; nam circuli secundi peripheria vnica & eadem applicatur rectæ f a, & *successiuè* congruit illi: atqui recta f a est nunc æqualis peripheriæ f e c, nunc maior, nunc minor, prout in superiore ostendimus: ergo eadem recta coextenditur modo longiori, modo breuiori rectæ: ergo est ęqualis modo maiori, modo minori rectę; quod repugnat, cùm vtrobique maneat eadem, eiusdémque longitudinis. Coextensio enim illa videtur commensurationem & ęqualitatem inferre; sicuti si filum puncto c figas, & illud rotę c e f o curuaturę eo vsque applices successiuè dum redeas ad punctum c; omnes intelligunt longitudinem fili esse ęqualem peripherię c e f o. At, inquies, filum applicatur quidem successiuè, sed quod applicatum semel fuit, manet interea applicatum & cohęrens curuaturę, dum alię fili partes admouentur consequentibus peripherię partibus. Verùm istud nondum satisfacit; quid enim ad ęqualitatem probandam facit quod quæ successiuè admotæ fuerunt, maneant applicatæ? certè nihil, si rem præcisè expendamus. Fac enim eo modo quo filum applicatur, erigi & extendi in rectam versus c, & non manere arcuatum; perinde erit curuatura illi æqualis ex vi præcisè illius applicationis. Quid igitur, inquies, confert alligatio fili in puncto c? respondeo id vnicum, vt virtus fili motrix & (vt ita dixerim) *applicatiua*, eo pacto attemperetur, quo debet, vt peripheriæ non admoueatur nisi æqualis longitudo fili. Potest enim talis esse virtus qua longius peripheriâ filum applicetur; potest & talis, qua breuius. Totum igitur id referri debet in virtutis motricis diuersitatem quandam. Sicuti si virtus motrix puncti f ad a eodem tempore deferat illud per lineam breuiorem arcu illo per quem virtus motrix puncti A defert ipsum A; maior arcus applicatur minori lineæ rectæ; sin eadem virtus motrix puncti f deferat per longiorem, minor arcus applicatur maiori rectæ lineæ. Vnde liquet explicatione adhuc maiori egere solutionem R.P. Tacquet p.234. *Cylindricorum & annularium. Respondeo,* inquit, *quamuis tota successiuè circumferentia, totam successiuè in plano lineam se maiorem, minoremve tetigerit; non tamen ei commensurata seu coëxtensa fuit; quod ad commensurationem successiuam totius cum toto requiratur, vt partes partibus successiuè applicentur & congruant. Hîc autem nulla circumferentiæ pars vlli parti lineæ, in plano peragratæ applicata fuit; sed continuus fuit contactus indiuisibilis, siue non quantus.* Ex hactenus enim dictis liquet ex continuo illo contactu rectè inferri æqualitatē, & ex modo quo contactus ille perficitur; quando nimirum virtutes illæ motrices tales sunt vt singulæ æqualibus temporibus puncta f & A deferant per spatia æqualia.

Respondeo itaque illud quod assumitur *quæ sibi coaptantur inter se sunt æqualia*, falsum esse in vniuersum: verum esse tamen in iis quæ sibi coaptata quietè manent, quia causa inæqualitatis prouenit ex varia virtute motrice quæ in quiete deest; hoc autem sensu assumitur ab Euclide initio Elementorum. Quæ verò in motu sibi per tactum coaptantur, ea sunt æqualia quoties vno manente, aliud admouetur per duplicem virtutem quarum quælibet seorsum moueret per æquale spatium. Quando autem audis duplicem virtutem, intellige vel duas re ipsa diuersas, vel vnicam quæ duabus æquiualeat, & ita attemperet applicationem, vt pares extensiones paribus aptentur. Proposuimus igitur difficultatem physicam ex generatione cycloideon ortam, prout nobis propositum fuit.

COROLLARIVM I.

Ex superioribus liquet non posse affirmari peripheriam c e f componi ex certo quodam numero punctorum. Si enim componeretur ex mille verbi causa, intelligi non potest quo pacto posset applicari rectæ compositæ ex bis mille punctis, vel etiam rectæ compositæ ex quingentis tantùm; ita vt diuersa peripheriæ puncta sortirentur diuersa rectæ lineæ puncta, & singula singulis congruerent. Cùm autem quod infinitum est excedat humani ingenij limites, mirum non esse si ista planè & perspicuè non intelligamus, vbi coacti sumus admittere partes in magnitudine qualibet infinitas.

COROLLARIVM II.

Patet ex iisdem parem difficultatem intelligi in ellipsis, parabolæ, & hyperbolæ perimetris, & vno verbo, in applicatione successiua cuiuscunque curuæ ad rectam. Quapropter qui, vt fugiat laborem soluendi istius nodi, negauerit circulum, cylindrum & sphæram esse possibilia; debet etiam negare omnem lineam curuam ess possibilem; solúmque rectam affirmare esse possibilem; solùm corpus planis circumscriptum, esse possibile; omnia demum quæ nobis apparent sphærica & conuexa, esse terminata planis exiguis & minutulis. Sed hoc dicto incidet, vt reor, in aliquid absurdius; nulliúsque assensum obtinebit; esto fortasse dimoueri inde scholastica nequeat disputatione. Porrò in rectis etiam lineis ista successiua applicatio maioris ad minorem objici potest. Pone enim (*Fig. 66.*) in parallelogrammo quolibet rectangulo f a b e diametrum a e ductam, & latus a b moueri ad latus f e, ita vt quamdiu mouetur, parallelum maneat ipsi f e. In hac hypothesi latus b a ita percurrit totam diametrum e a, vt singula lateris b a puncta inueniant singula quibus aptentur in diametro; nullúmque assignari possit in diametro maiore, cui suum non responderit & aptatum fuerit ex latere a b. Id verò accidit semper cuiuscunque longitudinis sit f a. Igitur coaptationis successiuæ difficultas non tollitur, sublatis curuis lineis, si rectis parcatur.

COROLLARIVM III.

Si quis ſemel admiſerit corpora curua & plana; non poterit, vt patet, euadere difficultatem admittendo quietis morulas in motu. Nam curua cylindri ſuperficies, exempli cauſa, non poteſt admoueri plano; niſi aliqua, eſto exigua pars illius, ſucceſſiuè & abſque mora vlla applicetur ſuperficiei planæ.

COROLLARIVM IV.

Nonnulli ſunt qui id vnum inter reſpondendum curant, nempe vt ibi (ſiue in Veri, ſiue in Falſi ſolo perinde id habent) pedem figant, quo inſtantis aduerſarij tela creduntur non eſſe peruentura. Audiui ego nonnullum, qui eluſum iri à ſe iactitaret difficultatem, negando poſſe conuenire duas illas virtutes motrices ad efformandam cycloidem longiorem, vel breuiorem. Sed vbi hoc dixit, ſtatim obieci illi, dum cycloides primaria gignitur motu circuli ſecundi: in eodem eiuſdem circuli plano deſignari poſſe innumeros circulos inæquales, quorum peripheriæ admouentur ad rectam æquantem ſpatium f a (*Fig.* 1.) idque iam olim vidiſſe Ariſtotelem in Mechanicis, 24. alias 25. quæſtione à nobis laudata §. 5. prolegomenon ad elementa tetragoniſmica; nec id non vidiſſe Recentiores, quorum vnus Galilæus mirè ſe torquet, vt nodum iſtum phyſicum iuxta ſua phyſices principia diſſoluat. Euidens verò eſt innumeras generari cycloides vno eodemque tempore quo principalis c z a gignitur, habentes baſim æqualem rectæ f a, illam nimirum rectam, quæ tanget vnumquemque concentricum, & æquidiſtabit rectæ f a. Intelligatur concentricus quilibet diametro y t deſcriptus; quem t u latus parallelogrammi u a f t tangat in t, occurratque rectæ l h in B. Quando centrum g ſecundi circuli in quo ſunt A & t delatum fuerit in m, circulum diametri y t tanget recta b u in B, ſicut circulum b z l tangit recta f a in l; & cùm recta g y ſit portio radij g A, radiuſque g A ponatur migraſſe in radium m z; punctum quoque y circellum concentricum circulo h z l deſcribens, erit in radio m z, & radius g y tranſlatus erit in radium m D ipſi g y æqualem. Eodem igitur tempore puncta A & y decurrerunt arcus h z, E D ſimiles, habentes inter ſe rationem rectarum m h, m E, vel g A g y; ſed arcus h z eſt æqualis rectæ f l, ex generatione primariæ cycloideos c z a; ergo arcus D E eſt perpetuò ad rectam f l, vel t B decurſam, vt eſt recta g A ad g y: ergo per corollarium primum ſuperioris, linea quam deſcribit punctum y eſt cycloides non primaria; ſed, ſi punctum t cadat extra g & f, contracta; vel producta, ſi cadat inter g, & f. Æqualibus igitur rectis t u, f a, eodem tempore aptantur ſucceſſiuè peripheriæ circulorum ſemidiametris g f, g t inæqualibus deſcriptorum; ac proinde & ipſæ quoque inter ſe inæquales.

COROLLARIVM V.

Quoniam negari non poteſt quin idem arcus ſucceſſiuè admoueatur &

aptetur lineæ rectæ, prout suprà explicuimus, modo maiori, modo minori; non debet explodi illa physicorum longè plurimorum sententia, quæ *rarefactionem & condensationem* explicat dicendo eandem magnitudinem esse aptam ratione diuersæ virtutis à qua mouetur, occupare modo maius, modo minus spatium; quasi aliquid dicant inauditum in aliis quæstionibus physicis. Patet enim ex superioribus simile quid omnibus esse concedendum.

COROLLARIVM VI.

Aristoteles eo loci quæstionem soluit dicendo attendendum esse quis circulorum concentricorum moueatur per se, quis per accidens. Si enim maior moueatur per se, minoris peripheria applicabitur, & successiuè coëxtendetur maiori rectæ: sin minor feratur per accidens, maioris ipsius rotunditas percurret minorem lineam. Vnde liquet Philosophum ita explicandum esse, vt per se moueri is dicatur circulus cuius duæ lationes seorsum sumptæ æquali temporis spatio, per æquales lineas ferunt puncta f, & A. Galilæi solutionem referre supersedeo, quia minimè satisfacit, cùm ipsa re proposita multò obscurior videatur; nec miror reiectam eam, veluti inanem, fuisse à P. Tacquet pag. 240.

PROPOSITIO XXXIII.

AN sphæra, siue circulus, dum per commune planum materiale liberè voluitur, lineam percurrat suæ circumferentiæ æqualem; & cur, si hoc experientia docet, ita fieri debeat.

Reuerendus Pater Tacquet in propositione octaua dissertationis physico-mathematicæ pag. 247. primam huius propositionis partem esse veram ponit; inquirendam enim proponit tantùm huius euentûs causam. Vnde statim rem aggreditur his verbis, *Hoc ita euenire qui aliter quam ab experientia probet; & cur ita eueniat, causam qui aperiat, non inuenio.* Planum materiale commune definit definitione 6. esse illud *quod non caret omni inæqualitate, ac scabritie, cuiusmodi nostra sunt omnia.* Ego verò nonnullos circa ista patior scrupulos. Primò quidem non satis intelligo quid sit circulum aut sphæram *liberè volui.* An sponte sua & ex virtute ingenitâ? at in plano horizontali quiescit. An in plano decliui, ita vt nihil obstent velocitatis incrementa quæ fiunt, ea prout certis probat fieri experimentis accuratissimus P. Ricciolus lib. 9. Almagesti eruditissimi cap. 16. n. 23. pag. 392. An liberè volui tunc dicetur sphæra cùm semel à motoris externi contactu discesserit? Certè ipse in propositione nona contendit (*Fig.* 1.) euenire posse vt successiuè percurrat lineam maiorem aut minorem, si nempe vnus imprimat motum magnitudini A, circumagendo circulum secundum circa centrum g, alter verò circulum primum cui affixus hæret secundus agat præscripto modo super tangente f a. At numquid poterit imprimi virtus circulo vel solido quæ æquiualeat duobus illis motoribus, & quæ tantisper vigeat semotis motoribus iisdem? Fateor itaque hærere

mihi animum, nec videre satis quo sensu dicatur hîc planum liberè voluî.

Præterealicet Autorum qui ita rem euenire statuunt nomina non referat, non est dubium quin hæc opinio in animis hominum iam olim inoleuerit. Ille ex recentioribus, cuius in prolegomenis suprà laudatis, memini, ita sentiebat; cùm, vt recta æqualis perimetro circuli haberetur, rotæ per planum semel volutæ vestigium assumi vellet. Sed Vitruuius inter Veteres scriptores hoc ipsum apertè velut à maioribus profectum assentitur libri decimi capite duodecimo, alibi decimo quarto; ibi enim edocturus *qua ratione rhedâ vel naui vecti peractum iter dimetiamur. Transferatur*, inquit, *nunc cogitatus scripturæ ad rationem non inutilem; sed summa solertia à maioribus traditam; qua in via rhêda sedentes, vel mari nauigantes, scire possumus quot milliaria numero itineris fecerimus. Hoc autem erit sic. Rota quæ erunt in rheda sint latæ per mediam diametron pedum quaternûm & sextantis; vt cum finitum locum habeat in se rota, ab eóque incipiat progrediens in solo viæ facere versationem, perueniendo ad eam finitionem, à qua ceperit versari, certum modum spatij habeat peractum pedes duodecim.* In eodem capite docet quadringentenas versationes rotæ efficere spatia passuum mille; quod esse nequit nisi curuatura rotæ sit pedum duodecim & semissis. Vnde vt 22. ad 7. iuxta computationem Archimedeam, ita fient 25. semisses pedis vnius ad diametrum rotæ quaternorum pedum, quadragesimâ quartâ parte pedis vnius demptâ. Manifestum igitur est mendosum esse textum: corrigíque debere iuxta numeros iam positos.

Porrò naui similem rotam adiungi solitam testatur, sed eius curuaturâ pinnis instructâ, vt ita illarum incursu in vndas extimas, versatio fieret. Vtrobique autem patet versationem rotæ euenire ex eo quod allisio rotæ ad solum vel ad aquas curuaturam cohibeat ne motum centro impulsum sequatur, ac proinde illam cohibendæ curuaturæ vim æquiualere virtuti rotatrici circa centrum. Cùm itaque hæc vis cohibens possit esse maior & minor, manente eadem virtute vel equorum, vel ventorum trahentium centrum rotæ: non video qua ratione hæc methodus possit esse certa & constans. Fernelius tamen ea se vsum narrat in Cosmotheoria sua ad dimensionem Globi terrestris, & vt refert Furnerius noster lib. 12. Hydorgraphiæ cap. 35. pag. 609. Claudius Flamingus Machinis Ducis Vvittembergensis præfectus, non alio vtebatur instrumento in dimitiendis agris. Fernelij methodum refert P. Ricciolus Almagesti lib. 10. sect. 5. prob. 15. aitq; à loco primæ obseruationis ad locum secundæ, vno gradu dissitum à primo, reuolutiones fuisse 17024. rotæ ambitum fuisse pedum 20. diametrum pedum 6. ac digitorum 6. vnde conficitur gradui vni terrestri competere milliaria 68. Idem verò Ricciolus lib 2. cap. 7. schol. 4. vocat istud Fernelij experimentum *valde lubricum*, idque libro Geographico se ostensurum prænuntiat. Profectò tam lubricum est, quàm quod maximè, vel ob solam istam incertitudinem vtrum resistentia orta ex collissione rotæ

cum solo, æquiualeat virtuti qua centrum rotæ trahitur ab equis; potest enim ita contingere, potest & aliter, vt suprà aduertimus. Itaque de constanti huius experimenti veritate non possum non vsque dubitare, dum certius aliquid de eo mihi constet.

Sed faciamus ita rem se habere, vt possimus ad examen reuocare causam à R. P. Tacquet assignatam, ait enim ex illo principio *natura, cum nihil agit frustra, quemadmodū breuißima agit via, ita modo etiam facillimo*, fieri vt circulus in plano communi materiali volutus lineam percurrat suæ circumferentiæ æqualē. Cùm enim planum sit asperum & scabrum, circulus in minutas inæqualitates incurret, iis verò vt quàm minimè offendatur, oportet vt pari celeritate se circa centrum suum circumagat versus punctum à quo incepit motus volutationis; illa enim subductione pari, quam minima euadet offensio. Hîc ego duo præsertim subdubito. Primò cùm tota causa huius euentûs dicantur esse minutulæ inæqualitates, & quasi monticuli interpositi, vbi cessabunt isti monticuli, ibi quoque cessabit causa effectûs eiusmodi: ergo quis dicat quota sit illa pars itineris quæ subductis offendiculis est plana? quis afferat hanc asperitatem esse vbique & constantissimè æqualem? numquid etiam ipsa rota habet suas inæqualitates; quis autem dicat illas esse constanter & vbique easdem & simillimas? nam si tam in plani, quàm in circuli materialis communis superficie, nulla seruetur lex harum inæqualitatum, sed sint veluti insulæ in mari sparsæ, modo, denso agmine, sporadum in morem, modo raræ; modo altiores, modo depressiores; quis aliquid constans inde inferat, quantum ad modum offensionis mutuæ attinet? quid verò si manente eadem viæ difficultate, assumatur multò grauior aut multo leuior rota, lex eadem an inuariata perstabit? Præterea idem quærendum restat de superficie istarum quasi insularum aut verrucarum, vtrum sit læuis & sine asperitatibus: an potius & ipsa suas habeat valliculas, monticulósque. Neque dixeris istas quæstiones esse superfluas, cùm asperitates & tubercula ista non cadant sub oculos, aut tactum. Nam cùm exiguitas istarum rerum non obstet quo minus tu illi istum effectum sensilem de quo instituta est controuersia, attribuas; ita neque impedire debet, quin ego vtiliter de illis quæram ea quæ vel faciunt contrarios effectus sensiles, vel tui effectûs constantiam tollunt. Itaque de ista secunda propositionis parte idem affirmo, nempe non satis explicatam mihi videri rationem illam ex asperitatibus petitam, vt repugnantem intellectum vincat. ergo &c. quod erat propositum.

PROPOSITIO XXXIV.

DVm verus & perfectus globus vel circulus, grauis tamen, solum perfectè planum contingendo premit, si compressio illa in tactu ponatur æquiualére cuidam nexui, quo fiat vt absque vi aliqua speciali raptari circulus nequeat super illo plano; reddi potest ratio

cur super

cur super perfectè plano, circulus perfectè rotundus volutari debeat, dum per centrum secundum rectam plano parallelam trahitur.

Ponamus rectam f a (*Fig.* 1.) esse perfectè rectam, & perfectè curuam esse peripheriam c e f o, attamen grauem, & premere punctum f. Dico compressionē illam esse causam vt dum g trahitur vi equorum, ad partes b per rectam b g, peripheriæ punctum f, vergat ad partes o, & succedat punctum s. Dum enim centrum g virtute equorum trahitur, peripheriæ punctum f quasi agglutinatum lineæ rectæ a f puncto f, non tam facile trahi se finit quam punctum g: inclinaretur ergo semidiameter g f, vtsi g f arbor foret radicata in f; quia verò propter figuram circularem non potest simul hærere fixa in f & inclinari; cùm tamen vis motrix simul & victrix transferat centrum g ad partes b; figuræ natura se se virtuti impressæ accommodando suggerit aliud punctum in quo fiat contactus; hoc enim minus violentum ipsi propterea est, quia connexio puncti f peripherici cum puncto f pertinente ad rectam a b, orta à compressione impositi grauis, magis resistit raptationi circuli versus a, quàm inclinationi eiusdem circuli versus eundem terminum a. Nam si raptaretur, connexioni illius illi vis fieret maior, quàm dum inclinatur, eo quod dum inclinatur punctum f leuatur pondere centri g, quod incumbit iam alteri puncto, illi videlicet in quo fit tactus: ergo diuulsio puncti f in peripheria positi à puncto f in recta a f iacente, faciliùs fit per volutationem circuli prementis, quam per raptionem. At verò in conscensu montis, centrum grauitatis non est in recta à centro g ducta ad punctum tactûs in decliui positum; vnde etiam accidit vt non tam sponte voluatur rota. Assignata est igitur ratio physica eius quod propositum fuerat.

COROLLARIVM.

Hinc patet, quoties connexio & cohærentia peripheriæ cum recta a f tanta est, quanta est vis trahens per lineam b g; toties peripheriam c e f incumbere successione motûs in rectam f a ipsi æqualem: quoties verò fuerit minor vel maior, toties peripheriam admoueri rectæ maiori vel minori. Quapropter si experientia comprobet rotæ ita tractæ peripheriam successu motûs componi vt plurimùm cum æquali rectâ; dicendum erit vt plurimùm inesse hanc virtutum æqualitatem. Sed hæc omnia, vti vides, physica cùm sint, disputationi obnoxia sunt.

PROPOSITIO XXXV.

AN in reflexione generetur cycloides aliqua, expenditur; & per occasionē aliquid dicitur de causa æqualitatis angulorum incidentiæ, & reflexionis.

R. P. Maignan in Perspectiua sua horaria pag. 305. explicaturus reflexionem, obliquam lucis è speculo plano, postquam posuit radium esse *cuius sectio per axem est parallelogrammum rectangulum*, statuit huius rectanguli

latus ita incurrere in planum obliquo ictu, vt illud contingat vna tantùm sui extremitate, statimque repulsum resiliat non sine aliquo motu vertiginis. Vnde ait sequi vtrumque huius lateris ita repercussi extremum *describere cycloidis cuiusdam, si non primariæ, vt vocant, saltem alterius in alia specie, vt facile possem demonstrare.* Vellem vt id demonstrasset; ego enim non ita obuiam experior eiusmodi demonstrationem: ostendendum enim est non solum illam lineam esse curuam, sed esse de genere cycloideon definitarum in corollario primo trigesimæ primæ. Id verò si quis mathematicè mihi demonstret, curiosè illum audiam. Quod autem idem R.P. ibid. pag. 300. demonstrandam suscipit causam cur radius obliquus reflectatur angulo æquante angulum incidentiæ, indiscussum præterire nolim.

Primò quidem pag. 289. repudians causam quam Vitello & alij Primarij Optices Magistri tradunt, *quod natura agat per breuißimam viam. Clauius*, inquit, *in eadem breuia & ipse impegit lib. 8. Geometr. pract. propos. 7. Mitto alios qui in hoc excusationem habere posse viderentur, quod post tot & tam celebres autores errauerint; nisi errorem fecissent suum.* Referre placet ipsa Clauij verba in scholio illius propositionis; *quia*, inquit, *natura non impedita, agit per lineas breuißimas, fit vt radius solis vel visualis cadens in planum tersum, cadat necessario in punctum vbi angulus quem Perspectiui angulum incidentiæ dicunt, æqualis efficitur angulo quem reflexionis appellant.* Quod Clauius ibi affirmat verissimum esse contendo, nimirum naturam, *si non impediatur*, agere breuissima via; impeditur autem quoties via breuissima nulla datur, sed quauis datâ potest dari breuior; vt accidit in quodam speculorum concauorum casu: at in casu de quo Clauius agit & datur breuissima via, & illa designatur à solis incidentiæ & reflexionis rectis angulos æquales constituentibus: nulla ergo Clauius impegit in breuia. Sed neque Vitello, vt alibi ostendemus fusiùs; licet enim in propositionis 18. lib. 5. affirmet rem visam per speculum quodcunq; sub breuissimis lineis comprehendi à visu, idipsúmque inculcet mentione etiam speculi concaui facta sub initium vigesimæ: sensus illius est iste, *quoties à puncto viso ad centrum visûs poßibiles sunt lineæ reflexionis & incidentiæ breuißimæ, res visa in quocunque speculo comprehenditur sub illis lineis.* Sed non est sensus, in quocunque speculo, pro quolibet casu, à puncto viso ad rem visam dari viam omnium reflexam breuissimam. Quando verò non datur breuissima, cùm non sit potior ratio cur inter breuiores innumeras eligat hanc potius quàm illam, accipit longissimam vt pote determinatam: fugit enim quod *indeterminatum est.*

Secundò examinanda nunc est physica causa quam ipse P. Maignan tradit in iis quæ loco mouentur, & appulsu ad aliud corpus repelluntur, vnde & pilam lusoriam assumit in exemplum; sub isto tamen exemplo pag. 292. rationem reflexionis vult reddi *ab eo qui radium ita concipere voluerit, quasi sit fluxus & emißio continua globulorum lucis à lucido.* Inter illos verò locum sibi ipse statuit pag. 624. Esto itaque (*Fig.* 2.) circulus c e f o centri g; & ex puncto p per lineam p g emittatur pila in-

cidens in g, & retrocedens per lineam g Q ad punctum s. Experientia constat angulos p g e incidentiæ, & ſ g o reflexionis eſſe æquales, rectámque p s eſſe parallelam rectæ b g; huius verò æqualitatis cauſa aſſignatur in hunc modum. Ex puncto g excitetur ad rectam p s perpendicularis g y, quæ bifariam ſecabit ipſam p s, vt ex Euclidis Elementis liquet. Præterea virtus directa impellens per rectam p g æquiualet duabus iuxta Ariſtotelis demonſtrata in Mechanicis cap. 1. quarum vna impellat per rectam p y, de qua ſuprà, & vocetur *horizontalis*; altera per parallelam rectæ g y, vocetur *perpendicularis*: illa verò erit ad iſtam vt trianguli g y p, latus p y ad y g. Virtus horizontalis non pugnat cum plano repercutiente, cui ἀδιάφορον eſt, quod emiſſum corpus horizontaliter feratur; at verò virtus perpendicularis illi prorſus repugnat; eo enim illa virtus ſpectat, vt in corpus quod percutit, penitus ingrediatur, quod fieri naturaliter nequit vel ſine diuiſione illius, vel ſine expulſione è loco, quorum vtrúmque vim infert percuſſo. Itaque in hac quaſi pugnâ, percuſſum ferienti non reluctabitur niſi quatenus feriens ipſi erit contrarium; cùm ergo non ſit contrarium niſi per virtutem perpendicularem, eiuſmodi virtutem infringet contraria virtute perpendiculari, & quidem æquè vehementi ac intenſa: nam vt aſſerit pag. 297. lemmate 3. quantum à pila incidente patitur planum percuſſum, tantumdem in pilam reagit planum repercutienss. Cùm igitur pila ex puncto g reiecta verſus rectam p s duplicem virtutem habeat horizontalem & perpendicularem pares horizontali & perpendiculari quas habebat quando ex puncto p emiſſa eſt in lineam e o; manifeſtum eſt angulos p g e, ſ g o debere eſſe æquales.

Duo ſunt quæ maximè dubiam mihi faciunt iſtam cauſam. Primum non video vnde probetur vis perpendicularis repellens eſſe æqualis virtuti pariter perpendiculari, ſed impellenti. Planum b z L q eſto veluti menſa luſoria inter parallelas z L, b q comprehenſa, & ipſis z L, b q inſiſtant plana veluti tabulæ ad repellendos globos compactæ. Intelligatur ex p incipere iactus globi luſorij per rectam p g, & ex g reflecti per rectam g s ita vt anguli p g e, ſ g o ſint æquales: ex s rurſum ab occurrente tabula z y remitti in oppoſitam, & ſic deinceps in infinitum. Si pari vi globus repellitur ex g, qua ex p emiſſus primo fuit; pari etiam vi reflectetur ex s, & ita in infinitum globus æqua velocitate perpetuo feretur per angulos hinc & inde ęquales; ponimus enim extrinſeca quę hunc effectum impedire poſſent ſubmoueri. At hoc incredibile mihi videtur; nam experientia ſuadet minori ſemper velocitate & virtute fieri iſtas reflexiones; gratiſque dicetur totum id prouenire ab extrinſeco aére, vel à defectu quodam tabulæ, globi &c. Præterea ponamus, quod fieri poteſt, globum à puncto p ad g ferri à motore per velocitatem decreſcentem; ergo vt fiat angulorum p g e, ſ g o æqualitas, tabula b g imprimet globo velocitatem contrario prorſus modo creſcentem vſque ad punctum s; à puncto verò s tabula z y eodem pacto imprimet decreſcentem, tabula verò b g rurſus imprimet hac

ipsa lege crescentem, & sic alternis ludus continuabitur, qui creditu mihi difficillimus est. Vnde enim potest habere tabula b g, vt quò longius distat globus, eò fortius illum impellat? & cur hæc virtus negatur tabulæ z y simillimæ.

Altera dubitandi ratio est illud, *virtutem horizontatem non esse contrariam percusso*. Vel enim eius motus pilæ impressus consideratur fieri extra corpus percutiendum, vel intra ipsum; si extra fieri intelligatur, nec illi etiam contrarius est perpendicularis; sin intelligatur ille motus fieri intra, vterque est contrarius; nam vis infertur percusso, siue scindatur in profundum, siue in latum; imo motus ille ipse qui dicitur horizontalis & parallelus rectæ e g, fiet solido percusso perpendicularis, ac proinde etiam per principia sententiæ Maignanianæ contrarius, si missile feratur in faciem solidi eiusdem parallelam rectæ g y.

Claudo igitur examen causæ allatæ affirmando mihi videri id & obscurius & incertius esse, eo quod erat demonstrandum; angulos scilicet incidentiæ & reflexionis esse æquales in proiectu pilæ. Vt omittam causam non esse vniuersalem pro quacunque reflexione; cùm detur reflexio qualitatum, quæ non sunt substantialiter corpus, vt lucis. Nam lucem non esse corpus in Academiis publicè & constanter docetur cum Aristotele, & probatur longè grauioris momenti rationibus. Vt mirum mihi plane sit Reuerendum P. Maignan indubitanter affirmare illam qualitem à lucidi ipsius substantia distinctam, *esse superfluam & nullatenus probari*. Expendimus igitur id, quod fuit propositum.

COROLLARIVM.

Aduertendùm est illud Opticæ principium de æqualitate eiusmodi angulorum potissimùm fundari in experimentis opera Organorū ad id constructorum ab Alhazeno & Vitellone Optices Principibus; vnde quamuis id demonstrari per causam non posset, non desineret esse principium illius artis. Istud rectè aduertit Vitello libri 5. propositione decima septima his verbis *angulum incidentiæ esse æqualem angulo reflexionis per rationalem sensûs experientiam inuento, semper vt vniuersali principio deinceps in omnibus his speculis vtemur. Et licet hoc, vt quidem huius scientiæ principium, sit experimentaliter declaratum; potest tamen per aliquem demonstrationis modum ad ipsius scientiam perueniri: vnde nos ipsum prout diligentiùs poterimus tentabimus demonstrare.* Optarem vt R. P. Cabæus contra istud principium nihil scripsisset in suis Meteorologicis alioqui perdoctis.

SCHOLIVM.

Propositiones de motu grauium accelerato *hîc Appendicis loco censui adscribendas, cùm vt exoluam fidem semel datam illas edendi; tùm vt hæc etiam proprietas globi per decliue labentis, intacta non remaneat. In illo enim lapsu accelarari motum, etiam iuxta illam rationem qua augetur dum liberè per aërem cadit, experimentis accuratè sumptis testatur R. P. Ricciolus suprà laudatus in propositione trigesima tertia.*

Porrò dum globus ita in decliui per volutationes labitur, potest fieri vt describat cycloidem aliquam; quamuis enim velocitas acceleretur, si cum proportione eadem acceleretur rotatio circa centrum, prodibit tamen cycloides, vt ex corollario primo trigesimæ primæ manifestum fit.

POSTVLATA.

I. In magnitudine graui ante casum & discessionem à puncto quietis dari virtutem motricem ingenitam, quam sensu percipimus omnes, dum ipsam sustinemus pendulam: siue illa virtus sit à generante, siue à terra attrahente, siue à natura ipsius magnitudinis, siue aliunde; & siue illa virtus sit qualitas, siue quiduis aliud. II. cadentis motum esse acceleratum, saltem si comparetur ad eam lineam, quam perpendiculum vocamus; experimento enim certissimo constat perpendiculi partes æquales à graui cadente decurri non æqualibus temporis spatiis, sed in vicinioribus termino discessionis insumi plus temporis, quàm in remotioribus. III. Lineam esse in infinitum diuisibilem, eo saltem sensu, sine quo stare non possent Euclidis Elementa. IV. motum esse continuum, diuisibilémque, vt spatium per quod fit.

DEFINITIONES.

I. Velocitas est *in actu primo* ea virtus motrix quæ ad alteram comparata deferre nata est idem mobile pari tempore per spatium longius, & per idem spatium breuiore tempore; *in actu* autem *secundo*, est executio illius virtutis. II. accelerationē voco velocitatis gradum superadditum gradui velocitatis natiuæ. III. velocitatem totalem voco illam, quæ ex vtraque conflatur. IV. Mensuram velocitatis, vel accelerationis voco magnitudinem in qua sectiones ad certam positionem inter se parallelæ, sunt vt velocitates, vel accelerationes.

PROPOSITIO XXXVI.

SInt duæ figuræ quæcunque f g h b a, e i l d c (*Fig.* 71.) similes & similiter positæ, ita vt si rectæ a b, c d secentur proportionaliter vtcunque in q, f; & per q, f ducantur ordinatim applicatæ q g, f i æquidistantes rectis f a, e c; sicut a b ad c d, ita sit q g ad f i.

Ostendendum est si magnitudo A intelligatur deferri per rectas d c, b a, ita vt mensura velocitatum sint figuræ e i l d c, f g h b a, tempus quo defertur per spatium d c esse æquale tempori quo defertur per spatium b a.

Quoniam enim vt sunt spatia f d, q b, ita ad positionem rectæ f a sunt velocitates f i, q g, vbicunque sumantur puncta f, q, dummodo rectæ a b, c d secentur proportionaliter; patet tempora quibus decurruntur d s, q b esse æqualia, cùm vt spatia decurrenda ita perpetuò sint vires cursûs, siue velocitates: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVII.

IDipſum aliter demonſtrare (*Fig*. 71.)

Iſtud quoque demonſtrari poteſt per parallelogramma deficientia vel excedentia deſcripta: ſi enim proportionaliter diuidantur a b, c d in ſegmenta quotcunque, numero vtrinque æqualia a q, q r, r b, & c s, ſ t, t d; vt eſt quadratum a b ad c d, ita erit parallelogrammum a m g q ad c o i s, & parallelogrammum q n h r ad parallelogrammum ſ p l t, & ita de aliis: ergo vt quadratum a b ad c d ita omnia ſimul parallelogramma priora, ad omnia ſimul conſequentia. Quoniam verò proportio rectæ a b ad ipſam a b componitur ex proportione rectæ a b ad c d, & ex proportione ipſius c d ad a b; tempus autem parallelogrammorum priorum ad tempus conſequentium habet proportionem compoſitam ex iiſdem proportionibus, patet tempus parallelogrammorum priorum eſſe æquale tempori poſteriorum.

Cùm igitur tempus parallelogrammorum priorum ſit perpetuò idem cum tempore poſteriorum, & quò plura vtrinque ſunt parallelogramma, eò fiat minus tempus parallelogrammorum priorum deficientium, minuſque etiam poſteriorum, ſemperque accedant decreſcendo propiùs ad tempus figurarum ſimilium: accederent autem propiùs creſcendo ſi parallelogramma priora forent excedentia a f y q, q g z r, r h D b & poſteriora c e u s, ſ i x t, t l E d. Hoc autem poſito patet per reductionem ad impoſſibile oſtendi tempora figurarum æqualium, adhibita videlicet methodo vſurpata ſæpius ab antiquis Geometris, cuius compendium extat apud Bullialdum libelli de inſcriptis figuris in ſeptima propoſitione ſi aſſumantur deficientia; vel in ſexta ſi excedentia: nam deficientium tempus eſt maius, excedentium minus: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex demonſtrandi ratione iam vſurpata liquet virtutem figuræ alicuius non ita intelligi debere, vt ſicut omnes partes illius ſunt ſimul, ita omnes velocitates repræſentatæ per illlius dimetientes parallelas rectis f a, c e exiſtant aliquando ſimul; id enim & alieniſſimum à mente noſtra, & abſurdiſſimum eſt. Senſus itaque noſter eſt, ſucceſſiuè eſſe inter ſe velocitates, vt dimetientes figuræ: non autem ſicuti dimetientes illæ exiſtunt ſimul, ita exiſtere ſimul omnes velocitates, quæ per illas repræſentantur. Quæ verò anno ſuperiore de hoc argumento edidimus, ad iſta debent reduci ſicubi fortè diſcrepent. Incredibile dictu eſt quam cautè incedere debeat quiſquis tempora, velocitates & ſpatia inter ſe geometricè comparat.

PROPOSITIO XXXVIII.

DVæ figuræ (*Fig*. 72.) f g h r a, e i l t c inſiſtant rectis a r, c t & ita ſint inter ſe vt ſi a r, c t ſecentur proportionaliter vtcunque

in q, ſ, ſitque vt, a q ad q r, ita c s ad ſ t; vt f a ad c e ita ſit ordinatim applicata q g ad ordinatim applicatam ſ i.

Oſtendendum eſt ſi vt c t recta ad a r, ita fiat e c recta ad a x, tempus reſpondens uelocitati figuræ f a r h g ad tempus figuræ c e i l t eſſe vt rectam x a ad f a.

Super rectâ a r conſtruatur figura a x d r ſimilis figuræ e c t l. Ergo per ſuperiorem tempus figuræ x a r d eſt æquale tempori figuræ e c t l. Præterea quoniam vt f a ad e c, ita ponitur q g ad ſ i, & vt e c ad x a, ita ſ i ad q b: ergo ex æquo vt f a ad x a, ita q g ad q b. Quoniam igitur duæ figuræ x a r d b, f a r h g ad poſitionem rectæ x a ſunt condicta ratione vt recta x a ad f a, tempus velocitatis figuræ x a r d b ad tempus figuræ f a r h g erit viciſſim vt recta f a ad a x. Iſtud enim ex eo patet quod perpetua lege ſint in illa ratione quam habet recta x a ad a f, ac proinde vt velocitates ita reciprocè debent eſſe tempora. Quod ſi cui iſtud non videatur ſatis demonſtratum, poterit aliam ſumere demonſtrationem ex methodo qua in 37. propoſitione vſi ſumus ad probandam trigeſimam ſextam more Antiquorum Geometrarum.

Quoniam ergo vt f a recta ad f a, ita per 35. prop. eſt tempus velocitatis e c t l ad tempus velocitatis a x b d r, vt autem f a ad a x, ita per præſentem eſt tempus velocitatis a x b d r ad tempus velocitatis a f g h r: ergo ex æquo vt recta a f ad a x, ita eſt tempus velocitatis e c t l, ad tempus velocitatis a f g h r: & inuertendo tempus figuræ f a r h g ad tempus figuræ c e i l t eſt vt recta a x ad f a, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam proportio rectæ f a ad a x componitur ex duabus nempe rectæ f a ad c e, & rectæ c t ad a r, vel e c ad a x: ſi vt f a ad c e, ita fiat a r ad a y proportio rectæ c t ad a y componetur ex iiſdem duabus nempe ex ratione rectæ c t ad a r & rectæ f a ad c e: ergo vt a f ad a x, ita c t ad a y: ergo tempus figuræ f a r h g ad tempus figuræ c t l i e eſt vt recta a y ad c t.

PROPOSITIO XXXIX.

SI iiſdem manentibus (*Fig.* 72.) figuræ f a r h, e c t l ſint trapezia; & vt recta f a ad h r, ita ſit recta e c ad t l, oſtendendum eſt ſi a r, c t ſecentur vtcunque proportionaliter in q, ſ, rectam q g ad ſ i eſſe vt rectam a f ad c e, ac proinde habere proprietatem quam ſuperior propoſitio aſſumit adeſſe in figuris f a r h, e c t l.

Rectæ f h, e l productæ occurrant rectis a r, c t in m, n. Quoniam vt f a ad h r, ita eſt e c ad t l, & vt f a ad h r ita etiam eſt m a ad m r; atque vt e c ad l t, ita n c ad n t; erit vt m a ad m r ita n c ad n t, & per conuerſionem rationis vt m a ad a r, ita n c ad c t; & alternando vt m a ad n c, ita a r ad c t: ſed vt a r ad c t, ita eſt a q ad c s: ergo vt m a ad c n, ita a q ad c s, & alternando vt m a ad a q, ita n c ad c s, & per conuerſionem ratio-

nis vt m a ad m q, ita n c ad n s; sed vt m a ad m q, ita f a ad q g: & vt n c ad n s, ita e c ad ſ i: ergo vt f a ad g q, ita c e ad ſ i; & alternando vt f a ad c e ita q g ad ſ i, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XL.

Lineæ f g h, e i l ſint parabolicæ (*Fig.* 73.) eaſque tangant rectæ a r, c t in punctis m, n.

Oſtendendum eſt idem quod in ſuperiore.

Ducantur rectæ m f, n e, occurrantque rectis q g, r h, ſ i, t l in punctis b, x, y, z. Quoniam per ſuperiorem vt f a ad e c, ita eſt q b ad ſ y; erit alternando vt f a ad q b, ita e c ad ſ y; ſed vt quadratum f a ad q b, vel vt quadratum m a ad m q, ita per duodecimam tertij tetragoniſmicorum eſt recta f a ad q g, & ita etiam eſt recta c e ad ſ i: ergo vt recta f a ad q g ita eſt recta c e ad ſ i, & alternando vt recta f a ad c e, ita recta q g ad ſ i, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLI.

Lineæ f g h, e i l maneant parabolicæ (*Fig.* 74.) ſed earum diametri ſint m a, n c, & ordinatim applicatæ f a, c e.

Oſtendendum eſt idem quod in ſuperiore & in trigeſima octaua.

Ducantur vt in ſuperiore rectæ m f, n e, occurrantque rectis q g, r h, ſ i, t l in b, x, y, z. Quoniam per trigeſimam nonam vt f a ad c e, ita eſt q b ad ſ y; erit alternando vt f a ad q b, ita e c ad ſ y: ſed vt recta f a ad q b, vel vt recta m a ad m q, ita ex generatione parabolæ eſt quadratum f a ad q g, & ita etiam eſt quadratum c e ad ſ i: ergo vt quadratum f a ad quadratum q g, ita eſt quadratum c e ad ſ i; & alternando vt quadratum f a ad c e, ita quadratum q g ad ſ i; ac proinde vt recta f a ad c e, ita recta q g ad ſ i; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLII.

Recta b d (*Fig.* 75.) ſecta ſit bifariam in c, & ſuper baſibus b c, c d, inſiſtant trapezia a b c n, i c d m æqualia, ſimilia, & ſimiliter poſita: iungatur recta a m occurrens rectæ c i in l: ponatur magnitudo A ferri per rectam d c, primò quidem ita vt velocitatis menſura ſint trapezia æqualia & ſimilia; ſecundò verò ita vt velocitatis menſura ſit trapezium a b d m l.

Oſtendendum eſt tempus trapezij a b d m l eſſe duplum temporis trapezij i c d m vel a b c n, & quantum tempus additur tempori trapezij i c d m propter ablationem velocitatis trangularis i l m, tantum demi tempori trapezij a b c n propter additionem velocitatis triangularis l a n ſubcontrariè poſitæ triangulo m l i.

Quoniam

Quoniam trapezia a b d m l, i c d m habent latera a b, d m, & i c, d m proportionalia; per trigesimam nonam propositionem habebunt proprietatem assumptam in figuris trigesimæ octauæ. Si igitur vt c d ad b d hoc est vt vnitas ad binarium, ita fiat c i ad b o; vt est recta b o ad b a æqualem rectæ c i, hoc est vt binarius ad vnitatem, ita per trigesimam octauam erit tempus trapezij a b d m l ad tempus trapezij i c d m, quod erat vnum ex demonstrandis.

Rursus quoniam tempus trapezij a b d m est duplum temporis trapezij l c d m, quod est æquale tempori trapezij a b c n; erit tempus trapezij a b d m l æquale temporibus simul æqualibus inter se trapeziorum i c d m, a b c n: ergo quantùm additur propter ablationem velocitatis triangularis i l m, tantumdem demitur propter additionem velocitatis a n l: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIII.

ESto (*Fig. 76.*) quæcunque figura f a m i h comprehensa sub rectis m a, a f & sub linea curua, vel recta m i h. Intelligatur magnitudo A per lineam f a deferri ea totali velocitate, cuius mensura sit figura f a m i h ad positionem rectæ a m; vt sicut c i parallela rectæ a m se habet ad g h eidem parallelam, ita sit velocitas integra magnitudinis A positæ in quocunque puncto c, ad velocitatem totalem eiusdem consideratæ in quolibet alio puncto g. Tempus eiusmodi lationis sit B.

Ostendendum est si intelligatur eadem magnitudo A retro ferri à puncto a ad f, manente eadem totalis velocitatis mensura f a m i h, moram huius lationis esse æqualem tempori B.

Istud pro axiomate haberi potest, nec apparet vlla diuersitatis moræ causa, cùm eadem sit velocitatis mensura, nisi quod retrogrado ordine sumitur in regressu; sed nihil id obstat, vt patet, quo minus verissimum sit in casu præsenti, quod dici solet, *eandem reipsa esse viam Athenis Thebas, & Thebis Athenas*: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIV.

ESto f a m i h triangulum rectilineum (*Fig. 76.*) cuius latus a b diuisum sit bifariam in c; rectaque f c in g, & f g in e. Intelligatur magnitudo A ferri à puncto quietis f ad a terminum lationis manente eademvelocitatis integræ mensurâ f a m. Tempus quod in latione c g impenditur sit B.

Ostendendum est, tempus quod in latione c a consumitur esse æquale tempori eidem B.

Recta a c diuidatur bifariam in d & compleantur parallelogramma i c

do, m a d n; recta d o secet rectam m i in l, & puncta n, i iungatur rectâ n i. Patet triangulo m n l simile esse triangulum i o l & æquale, itemque triangulum f g h, cùm latera homologa m n, o i, g f sint æqualia & parallela, itemque latera homologa n l, l o, h g. Patet quoque cùm o l, l n sint æquales, quæcunque in triangulo o m n agatur parallela basi o n, eam bifariam secari occursu rectæ m l. Idem quoque liquet de triangulo n i o cuius basis o n bifariam secatur occursu rectæ i l. Ad positionem igitur rectæ a m condicta ratione æqualia sunt triangula m l o, m l n inter se, itemque triangula o l i, l n i. Id verò habent triangula o l i, n l m cùm ad verticem l sint constituta, vt subcontrariè iaceant. Ergo si per rectam o i deferatur magnitudo A facto lationis initio in i, & fiat triangulum i o l, vel i l n mensura velocitatis: eadem verò magnitudo feratur per rectam m n posito lationis initio in n, & mensurâ velocitatis triangulo m l n vel m l o, tempus lationis i o erit per superiorem æquale toti moræ lationis n m.

Compleatur parallelogrammum h g a r cuius latus h r occurrat rectis d l, c i in q, s, recta verò i o producta occurrat rectæ a m in p; agantur rectæ p q, o s. Patet igitur trapezio i c g h esse æquale, simile & similiter positum trapezium p a d q, & trapezium o d c s: patet quoque trapezium m a d o ad positionem rectæ am esse duplum condicta ratione trapezij p a d q, hoc est rectæ m a parallelas trapezij illius esse duplas parallelarum trapezij istius: eademque de causa parallelas trapezij n d c i esse duplas trapezij o d c s.

Si igitur magnitudo A feratur à puncto d ad punctum a, & mensura totius velocitatis sit trapezium d q p a; magnitudo verò C eidem A prorsus æqualis feratur per eandem d a, sed mensura velocitatis ponatur trapezium d o m a; tempus quod impendet C in decurrendâ a d erit dimidium temporis quod insumet A in eadem rectâ a d percurrendâ; nam velocitates ad positionem rectæ a m sumptæ in trapezio maiore sunt singulæ duplæ velocitatum sumptarum in trapezio minore: ergo vt velocitates ita reciprocè tempora. Similiter tempus quod impendet C in percurrendo spatio c d erit dimidium temporis impensi currente magniudine A per idem spatium c d. Si igitur magnitudo A feratur per g c velocitate totali notata trapezio h g c i, tempus illius lationis erit ęquale tempori quo ferretur per rectam c a lationibus c d, d a quarum mensura forent c i n d, d o m a. Quoniam verò per 42. prop. quantum tempus additur tempori trapezij n d c i propter ablationem velocitatis triangularis n l i, tantum demitur tempori trapezij a m o d propter additionem velocitatis triangularis m o l subcontrariè positæ triangulo n l i; patet tempus quo fertur per g c esse æquale tempori quo fertur per c a: ergo tempus quod in latione c a consumitur est æquale tempori B, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Sicuti oſtendimus tempus quo percurritur ſecunda pars c g eſſe æquale tempori partis primæ a c, ita prorſus oſtendetur tempus tertiæ g e eſſe æquale tempori ſecundæ, & ſic de aliis vt patet: ſingularum igitur partium a c, c g, g e &c. tempora ſunt inter ſe æqualia. Iſtud porrò alia via generaliore oſtendetur in propoſitione quinquageſima.

COROLLARIVM II.

Anonymus hoc ipſum per reductionem, vt vulgò dicunt, ad impoſſibile primus demonſtrauit eximia ingenij ſubtilitate in epiſtola ad Gaſſendum miſſa & inſerta ſub calcem tomi ſexti. Porrò ex demonſtrationis progreſſu liquet ad hoc vt intra finitum tempus percurrantur partes illæ omnes ſpatij proportionales, tempus quod in percurrenda maiore impenditnr debere eſſe maius tempore quod inſumitur in percurrenda minore ſubſequente, non autem æquale vel minus.

PROPOSITI XLV.

Iſdem manentibus (*Fig.* 76.) in percurrendo ſpatio g f plus impenditur temporis quam in percurrendo ſpatio c g.

Quoniam enim velocitas deſignata triangulo h g f habet tempus æquale tempori velocitatis notatæ triangulo i ſ h æquali, ſimili, & ſimiliter poſito; cùm tempus velocitatis h ſ i minuatur additione velocitatis h ſ c g, patet velocitati h g c i reſpondere tempus breuius tempore velocitatis h g f, quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLVI.

EX g h producta (*Fig.* 76.) abſcindatur in ſchemate ſuperiore recta h t æqualis ipſi g h & ducatur recta f t occurrens rectæ c i in u; ponatur magnitudo B habere velocitatis ſuæ totalis menſuram triangulum f u c, ſicuti magnitudo A triangulum f h g; ac proinde magnitudo B duplo ſit velocior magnitudine A, & incipiant eodem momento moueri à puncto f.

Oſtendendum eſt tempus quo magnitudo B deferetur ad punctum c eſſe minus tempore quo magnitudo A deferetur ad punctum g.

Quando enim magnitudo B peruenerit ad g, cum velocitas illius t g f ſit dupla velocitatis h g f pertinentis ad magnitudinem A, inſumpſerit tempus æquale dimidio moræ quam inſumit A in percurrenda linea f g: ſed tempus quod B impendit in percurrenda parte g c eſt per ſuperiorem breuius tempore quod inſumpſit in decurrenda parte f g; eſt ergo breuius dimidio temporis quod A ponit in decurſu rectæ f g. Cum igitur B in motu per f g conſumat dimidium temporis competentis magnitudini A pro decurſu ſpatii f g, & in motu per g c impendat minus dimidio, patet totum tempus lationis f c pro magnitudine B eſſe minus tempore lationis f g pro magnitudine A, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex modò demonſtratis patet quid reſponderi oporteat Gaſſendo dum tomo 3. pag. 568. n. 10. Lugdunenſis Editionis ita interrogat. *Quæſo quid impediat quominus illud* (nempe B) *perueniat in c eodem tempore quo iſtud* (videlicet A) *in g?* Reſponderi enim debet præſentem demonſtrationem illi rei obſtare; eandemque obſtituram ſi ingenita virtus motrix & proportionalis addatur vtrique magnitudini motæ.

PROPOSITIO XLVII.

Iiſdem manentibus (*Fig. 76.*) oſtendendum eſt magnitudinem A ex puncto f ad partes g deferri non poſſe ſi totius velocitatis menſura ponatur eſſe triangulum f m a, & ſi certum quo incipiat moueri temporis initium ſtatuatur.

Lata enim ſi fieri poteſt ſit ad punctum a intra tempus B; recta f a ſecetur bifariam in c; tempus autem quo percurrit ſpatium c a ſit C; erit B maius tempore C; poteritque C toties repeti, vt multiplex ipſius ſit maius tempore B, illud multiplex ſit D; numerus verò denominator eiuſdem multiplicis vel binarius, vel ternarius, vel quaternarius &c. ſit E. Quot habet vnitates E, tot ſumantur, a c, c g, g e, e b continuè proportionales in ratione rectæ f a ad f c; hoc eſt in ratione duplâ: ſumi enim poſſunt cùm ſint infinitæ numero. Quoniam temporis ſpatia quæ in decurrendis rectis e b, e g, g c, c a impenduntur ſunt per 44. prop. ſingula æqualia tempori C, erunt illa ſimul ſpatia æqualia tempori D, cùm illa ſimul ſumpta ex vna parte, & D ex alia ſint æque multiplicia ſpatij C. Magnitudo igitur A delata ex puncto b ad a inſumpſerit tempus D maius tempore B quo percurri ponitur tota f a: atqui B totius lationis tempus eſſe maius quàm D tempus partis patet: erit ergo maius & minus, quod eſt abſurdum. Non ergo moueri poteſt ad quodcunque punctum a deſignatum in linea f g ad partes g, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Magnitudo A incipiat moueri à puncto g virtute motrice ingenitâ g h, quæ in motu augeatur iuxta rationem rectarum parallelarum i s, q l, m r incluſarum inter rectas m h, h r; ita vt idem eueniat in iſto caſu in percurrenda linea g a quod in alio, ſolumque diſcrimen in eo ſit quod virtus g h hîc ſit ingenita, ibi aduentitia. Ex demonſtrationis propoſitæ methodo liquet non ſequi ex hac hypotheſi abſurdum demonſtratū in præſenti propoſitione. Cùm enim ad punctum h non ſint niſi numerò finiti termini progreſſionis duplæ cuius primus terminus ſit a c, non poterunt ſumi poſt primum terminum a c tot termini quot vnitates continentur in numero E: demonſtrationis enim ratio oſtendit tot poſſe ſumi, quia ſunt quotcunque poſt a c, ita vt nullo numero finito exhauriri poſſint.

PROPOSITIO XLVIII.

IN casu primi postulati (*Fig.* 76.) dari videlicet virtutem motricem natiuam graui descendenti, non rectè objicitur ex demonstratione superioris propositionis motum fore impossibilem, vel in instanti, si vt contraria opinio vult, acceleratio velocitatis fiat iuxta rationem spatiorum quæ decurruntur.

Ista propositio planè aperta est ex corollario proximè superioris propositionis, virtus enim motrix natiua repræsentatur parallelogrammo g h r a, cùm punctum g possit vbique designari inter a & f pro modo virtutis natiuæ designatæ latere a r parallelogrammi a r h g. Igitur si incrementa velocitatis fiant iuxta rationem rectarum s i, l q vel quod idem est h s, h q aut g c, g d, ratio illa quæ motum fieri non posse probat in superioris propositionis casu, cessat in præsentis casu, quem asserit opinio illa quam Gassendus impugnandam suscepit: ergo &c.

COROLLARIVM.

Ex demonstratis patet liti isti finem adhuc impositum non esse verissimâ illâ demonstratione quam subtilissimus Anonymus Gassendo proposuit, cùm quantumuis vera sit, non vrgeat in casu controuersiæ quem ille, vt patet, aliter se habere assumit. Ponit enim corpus decidens ex se esse ἀβαρὲς, cùm tamen re ipsa sit βάρος ἔχον quem vtrumque casum distinxit Aristoteles l. 3. de cœlo text. 26. & 27.

PROPOSITIO XLIX.

MAneat (*Fig.* 77.) mensura velocitatis triangulum m f a, & magnitudo A intelligatur ferri per rectam f a ita diuisam vt f g sit dupla rectæ f e, ipsiusque f g dupla sit f c, istiúsque f a, & ita deinceps in infinitum: vt segmenta e g, g c, c a sint in proportione continua numerorum 1. 2. 4. &c. Si ergo g c diuidatur bifariam in l, erunt tres e g, g l, l c æquales; & si c a diuidatur quadrifariam in i, h, r erunt illius segmenta æqualia prioribus. Sunt ergo æqualia f e, e g, g l, l c, c i, i h, h r, r a.

Ostendendum est tempora quæ impenduntur in decurrendis partibus æqualibus f e, e g, g l &c. posito motûs initio in f, non decrescere secundum proportionem subduplam, ita vt tempus partis f e sit duplum temporis conuenientis parti e g, & istud duplum temporis competentis parti g l, &c.

Parti f e tempus competens est conflatum ex infinitis quorum singula æquant tempus partis e g vt ex quadragesima quarta liquet: ergo in isto primo pari non seruatur illa proportio. Rursus parti e g idem competit spatium quod duabus simul g l, l c per quadragesimam quartam eandem: atqui non conueniret iuxta illam rationem nisi dimidium & quadrans ip-

ſius e g: ergo in iſto pari non ſeruatur proportio ſubdupla. Præterea partibus g c, c a per eandem quadrageſimam quartam competunt æqualia tempora: atqui iuxta illam rationem non conueniret niſi dodrans & quindecim ſexageſimæ quartæ partes ipſius g e: ergo non ſeruatur illa proportio: eodemque prorſus modo oſtenditur de aliis; ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex ſimili demonſtrandi methodo oſtendetur neque in vlla alia proportione decreſcere eiuſmodi tempora. Vnde patet paralogiſmo laborare Gaſſendi diſſertationem tomi 3. pag. *629*. n. 8. vbi contendit aſtruere eiuſmodi proportionem in decrementis temporum, vt inde colligat ***motum fore in inſtanti***, ſi vera foret hypotheſis de acceleratione grauium deſcendentium, facta in ratione ſpatiorum decurſorum.

PROPOSITIO L.

REuocetur ſchema propoſitionis quadrageſimæ tertiæ (*Fig. 76.*) & in eo rectæ f a proportio ad f c ſit ad libitum data, maneantque proportionales f a, f c, f g, f e.

Oſtendendum eſt tempora partium a c, c g, g e &c. habentium proportionem rectæ a f ad c f vt ex octogeſima ſecunda libri progreſſionum Gregorij à S. Vincentio conſtat, eſſe inter ſe æqualia.

Quoniam triangula f g h, i c f, m a f ſunt ſimilia, & eorum baſes f g, c f, a f ſunt continuè proportionales, duæ earum f a, f c ſecabuntur proportionaliter in c, g ideòque triangulorum differentiæ effectæ per rectas d l, c i, g h erunt ſimiles, nempe trapezium m a c i erit ſimile ſimilitérque poſitū trapezio i c g h. Rurſus quoniam ſimilia iſta trapezia ſunt menſura velocitatis quam ſucceſſiuè acquirit magnitudo delata A, tempora illis reſpondentia erunt æqualia per *36*. & ſic de aliis; ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

En tibi vno ferme verbo demonſtratum illud egregium theorema Anonymi, quod nos in quadrageſima quarta demonſtrare tentauimus in vno præcipuè caſu, ſed longiore anfractu. Hîc verò ſtatim ſe ſe offert veritas conſpicienda, quæ tam abdita latuerat ante primam doctiſſimi Anonymi eius inuentionem, cui ſine dubio huius theorematis laus primaria debetur.

COROLLARIVM II.

Pone per f duci f x parallelam rectæ a m, & rectas a f, f x fieri aſymptotos cuiuſlibet hyperbolæ; cùm f a, f c, f g, f e &c. ſint proportionales, ſi per a, c, g, e &c. agantur æquidiſtantes aſymptoto f x; ſpatia inſiſtentia rectis a c, c g, g e &c. comprehenſa ſub arcu hyperbolæ & ſub parallelis aſymptoto f x eſſe æqualia inter ſe demonſtrauit Gregorius à S. Vincentio propoſitione 109. de hyperbola. Hinc verò liquet mira ſimilitudo in-

ter tempora quibus percurruntur partes a c, c g, g e, & inter ſpatia hyperbolica inſiſtentia iiſdem partibus; ſicuti enim tempora ſunt æqualia inter ſe, ita & ſpatia.

PROPOSITIO LI.

SIt parabola m o ſ f (*Fig.* 78.) quam recta a f tangat in f, & cuius diameter æquidiſtet rectæ a m: recta f a ſit dupla rectæ f c, ipſaque f c rectæ f g. Intelligatur mobile A deferri per rectam f a initio lationis conſtituto in f, ita vt menſura velocitatum ſit figura m ſ f a.

Oſtendendum eſt tempus quod impenditur in decurrenda prima & maxima parte a c eſſe dimidium temporis quod impenditur in ſecunda conſequente g c, & ita deinceps de reliquis ad partes f conſtitutis.

Quoniam tres rectæ f a, f d, f c ſunt proportionales, & vt ex quadrageſima liquet rectæ a m, c s, g q ſunt vt quadrata f a, f c, f g, erunt quoque ipſæ rectæ proportionales; ergo vt figuræ m a c ſ o latera a m, c s, ita figuræ ſ c g q latera ſ c, g q. Si igitur vt c g ad c a, hoc eſt vt vnitas ad binarium, ita fiat c s ad quartam f u, vt eſt f u recta ad a m ita per quadrageſimam & trigeſimam octauam erit tempus velocitatis m a c s, ad tempus velocitatis ſ c g q. Quoniam igitur recta c g ad c a rectam eſt vt vnitas ad binarium; erit f u dupla rectæ c s. Præterea quoniam quadratum f a eſt quadruplum quadrati f c, erit a m quadrupla rectæ c s; ſed f u eſt dupla eiuſdem c s: ergo recta f u ad a m eſt vt binarius ad quaternarium vel vt vnitas ad binarium: ergo tempus quod impenditur in percurrenda parte a c eſt dimidium temporis quod impenditur in decurſu conſequentis. Methodi verò ratio idem oſtendit de antecedente c g reſpectu tertiæ conſequentis, & ita deinceps: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Ex demonſtratis liquet proportionem rectæ m a ad c s eſſe maiorem rectæ m a ad c i, vel rectæ f a ad f c. Cùm autem tempus maioris ſit minus tempore minoris, patet ex corollario ſecundo quadrageſimæ quartæ, motum à puncto f ad a eſſe multò magis impoſſibilem. Cæterùm ſi f a, f c ſint in alia quauis proportione caſus definietur ſimili methodo, vt patet.

COROLLARIVM II.

Sicuti in corollario quadrageſimæ ſeptimæ remedium huic incommodo factum eſt, ita hîc quoque fiet, ſi f n ponatur menſura grauitatis natiuæ, & initium motûs ſtatuatur in g, verſus a: infinitudo enim partium quibus decurrendis opus foret infinitum tempus, relinquetur ad partes f rectæ g f, poſitâ menſurâ velocitatis totalis figurâ m o i q f a.

COROLLARIVM III.

Istud theorema planè nouum est, atque mihi ipsi illius inuentori incredibile adhuc foret, nisi vi demonstrationis penitus cogerer non resilire ab assensu: hæc eadem assentiendi difficultas contigit mihi audito quinquagesimæ propositionis theoremate illo. Ex istis verò & ex sequentibus liquidò constat quanti intersit geometriam admiscere motui, dum de proportione accelerationum agitur; sine illa enim nihil certò statuitur, sæpiúsque itur in scopulos; illa autem adhibita inueniuntur res quæ admirationi sint diligentissimo naturę perscrutatori. Absit tamen vt de illa laude tantillum cogitemus, quam doctissimus Vendelinus in epistola ad Gassendum (habetur in tomo 6. Gassendicarum epistolarum pag. 428.) sibi tribuit his verbis. *Mersennus tuus à me ante annum quærebat quid sentirem de casu grauium? addebat lapidem casurum in centrum vsque telluris spatio 6. horarum. At ego longè aliud inuenio, ac certus sum peruenturum ad centrum intra minuta horaria 12. Demonstratio longa est & pulcherrima, quæque de motu grauium multa hactenus ignorata patefaciet aliquando. Sed dum eam elucubro inchoatam à Nouembri postremo, interim hoc habeto, signum vnius vnciæ sphæricum nihilo cadere lentius, quàm ferreum globum* 1000. *librarum. Si miramur Archimedem in quadratura paraboles, mirabimur & huius demonstrationem problematis pulcherrimi, & verè non inutilis in commune bonum. Hercâ Kal. Maij* 1633. Hanc ego demonstrationem non vidi vnquam; sed nec eius amicus Ricciolus de illa quicquam audiuit; meminisset enim illius, tom. 2 pag. 387. n. 13 & pag. 400. n. 11. vbi *euidentissimis experimentis coram multis testibus fide dignissimis contrarium constare asserit*; nempe sphæram vnius vnciæ longè tardiùs ferri sphæra mille pondo.

PROPOSITIO LII.

Sit vt in schemate quadragesimæ primæ (*Fig.* 74.) parabole f h m cuius diameter m a, ordinatim applicata a f. Intelligatur mobile A deferri per rectam m a initio lationis constituto in m, ita vt mensura totius velocitatis sit f h m a ad positionem rectæ f a: sit autem m a dupla rectæ m q, & ipsa m q rectæ m r, & ita deinceps.

Ostendendũ est tempus quod impenditur in decurrenda prima & maxima parte q a esse ad tempus secundæ q r, vt est quadrati diameter ad eiusdem latus, & ita deinceps de reliquis ad partes f iacẽtibus.

Quoniam tres rectæ m a, m q, m r sunt proportionales, & vt ex quadragesima prima liquet quadrata f a, g q, h r sunt vt iam dictæ rectæ, erunt ipsa quadrata f a, g q, h r proportionalia, & inter se vt binarius ad vnitatem; ergo recta f a ad q g est vt quadrati diameter ad latus eiusdem: ergo vt figuræ f a q g latera f a, q g, ita erunt figuræ g q r h latera g q, r h: si igitur vt r q ad q a, hoc est vt vnitas ad binarium, ita fiat q g ad m z; vt est m z recta ad a f, ita erit per quadragesimam primam & per

trigesimam octauam, tempus velocitatis f a q g ad tempus velocitatis g q r h. Quoniam igitur recta q r ad q a est vt vnitas ad binarium, erit m z dupla rectæ q g, & ipsam m z ad q g erit potestate vt quaternarius ad vnitatem. Quoniam verò recta f a ad q g est potestate vt binarius ad vnitatem: erit m z ad f a potestate vt quaternarius ad binarium vel vt binarius ad vnitatem; ergo m z ad f a est longitudine sicut diameter quadrati ad eiusdem latus: ergo tempus lationis a q est ad tempus lationis q r, vt diameter quadrati ad latus eiusdem quadrati. Methodi verò ratio idem ostendit de consequentibus: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam tempus partis maioris a q est maius tempore minoris qr, patet absurdum in quod deducit quadragesima octaua propositio hîc non habere vllum locum. Patet quoque proportionem rectæ f a ad q b dimetientem trianguli esse maiorem proportione rectæ f a ad q g.

PROPOSITIO LIII.

Iisdem vt in proximè superiore manentibus (*Fig.* 74.) velocitates sunt vt tempora à puncto m initio lationis computata.

Compleantur parallelogramma a f p m, q g o m, r h d m. Quoniam in superiore ostendimus tres rectas a f, q g, r h esse proportionales, & rectam a f ad q g esse vt diametrum quadrati ad eiusdem latus, erunt tres rectæ p m, o m, d m in eadem ratione diametri ad latus: ac proinde per octogesimam secundam libri Progressionum Gregorij à S. Vincentio recta p o ad o d erit vt m p ad m o, hoc est vt diameter ad latus quadrati. Rursus quoniam in superiore ostendimus tempus partis a q esse ad tempus partis q r vt est diameter quadrati ad eiusdem latus; erit tempus partis a q ad tempus partis q r, vt est recta p o ad o d. Pari verò ratione si continuentur a q, q r, r y, & compleatur parallelogrammum y u M m, tres rectæ o m, d m, M m erunt proportionales, ergo vt o d recta ad d M, ita erit tempus velocitatis g q r h ad tempus velocitatis h r y u. In recta igitur p m sunt mensuræ omnium temporum respondentium omnibus terminis progressionis a q, q r, r y &c. vt ex 82. illa propositione Gregorij à S. Vincentio liquet. Cùm igitur recta o m æquet rectam q g, erit velocitas q g mensura temporis quo defertur A per rectam m q; & ita etiam r h velocitas ostendetur mensura temporis quo defertur A per rectam m r: ergo tempora totalia ab initio lationis computata sunt vt ordinatim applicatæ ad diametrum m a parabolæ m u f; sed illæ ordinatim applicatæ ponuntur esse velocitates; ergo in progressione spatiorum m a, m q, m r &c. tempora sunt vt velocitates. Perinde verò idem ostendetur in qualibet alia progressione, hoc est, quamcunque rationem habeat recta m a ad m q: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Cùm ista hypothesis assumatur ad explicanda experimenta varia circa

grauium deſcendentium accelerationem, patet in illa eſſe geometricè verum illud *tempora totalia eſſe vt velocitates etiam totales*. Et velocitates ſiue virtutem motiuam debere creſcere ſecundum incrementa ordinatim applicatarum ad parabolæ diametrum m a: & ſpatia m q, m r, m y &c. eſſe vt quadrata temporum vel velocitatum.

PROPOSITIO LIV.

IIſdem manentibus (*Fig. 79.*) magnitudo A intra tempus B per velocitatem vniformem a f ponatur percurrere poſſe ſpatium m a: datum ſit quodcunque aliud tempus C maius ipſo B quantuſcunque ſit exceſſus, etiam ſi plures annos contineat quàm ſint ſcrupula horaria in ipſo anno. Vt eſt C ad B ita fiat f a velocitas ad a x velocitatem; per x ducatur x o complens parallelogrammum x a m o, occurrens parabolæ m g f in g; per ipſum g ducta ſit g q complens parallelogrammum o m q g.

Oſtendendum eſt velocitatem quam haberet magnitudo A in puncto q, inchoando motum à puncto m ad a, & poſitâ menſurâ velocitatis acceleratæ figurâ f g m a; ſi ſola & ſine vllo alio incremento deferret magnitudinem A per lineam m a, peruenturam eſſe ab extremo m ad extremum a intra tempus C, & non citiùs aut tardiùs.

Quoniam enim completo parallelogrammo f a m h, vt eſt magnitudinis A conſtitutæ in puncto a velocitas f a ad velocitatem x a, ita eſt tempus velocitatis vniformis deſignatæ per parallelogrammum x a m o, ad tempus velocitatis vniformis deſignatæ per parallelogrammum f a m h: tempus autem velocitatis a f h m ponitur B: ergo vt eſt velocitas x a ad velocitatem a f, ita eſt tempus B ad tempus velocitatis a x: ſed ita eſt tempus B ad C: ergo tempus velocitatis a x vniformis eſt C, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Apertum eſt magnitudinem A carêre debere omni virtute natiuâ dum motu accelerato ponitur percurrere rectam m a aſſumptâ menſurâ velocitatis figurâ f g m a. Nam ſi tantillam habeat vt m z latus parallelogrammi z m a y, manifeſtum eſt tempus C ad tempus B debere habere proportionem non maiorem proportione rectæ f a ad a y: ſi enim fuerit maior, recta a x erit minor quàm a y; ac proinde in toto motu accelerato ſemper adfuerit velocitas m z vel a y maior velocitate a x.

COROLLARIVM II.

Gaſſendus tom. 3. pag. 550. n. 29. & *629*. n. 8. ponit lapidem ex laqueari ad tabulatum interuallo duarum orgyiarum diſſitum peruenire motu vniformi per virtutem æqualem ei quam initio deſcenſûs accelerati habuiſſet; & computando demonſtrat annos 5322381. & ampliùs interlabi

oportere ab initio illius motûs ad finem vſque. Hanc verò lapidis in deſcendendo ſegnitiem vocat *incredibilem*, vera tamen eſt ſi lapis ponatur non habere illam virtutem deorſum vergentem quam experimur, ſiue à tellure attrahente vt ipſe Gaſſendus vult, ſiue à Generante, ſiue aliunde inditam. Imò vt ex præſenti demonſtratione liquet, poſſet quotcunque myriadibus augeri annorum eiuſmodi cumulus. Falſa tamen omninò & incredibilis verè eſt, ſi lapis habeat virtutem illam quam natiuam dicimus, & quam dum manu illum è ſummo laqueari ſuſtinent pendulum, ſentiunt omnes. In iſta igitur hypotheſi virtutis natiuæ, examinanda nobis reſtant nonnulla, vt quæ vulgò dicuntur, ſcribuntur & creduntur nouerimus quatenus geometra concedere debeat. Is enim ſola veritatis regula vtitur, alieniſſimus à partium ſtudio quo mens temere ita excæcatur, vt partium ſuarum omnia probet, aduerſantium omnia improbet. Quod quidem malum etiam in Heterodoxis locum habet, vt de ſe ipſo Auguſtinus teſtatur libro de duabus animis c. 9. *Ex quo accidebat vt quicquid Manichæi dicerent, miris quibuſdam modis, non quia ſciebam, ſed quia optabam verum eſſe, pro vero approbarem.*

PROPOSITIO LV.

MAneat parabola f g m a (*Fig.* 80.) cuius tangens o m, & ordinatim applicata f a: magnitudo A intelligatur habere virtutem natiuam deſignatam parallelogrammo q g x a, & intelligatur moueri per rectam q a, ita vt totius velocitatis menſura ſit figura q g l f a. Recta x o occurrat parabolæ in g; ſumatur quæcunque recta q B quæ ita diuidatur in s, vt quadratum q s ad quadratum q B ſit ſicut recta m q ad rectam m a. Ponatur recta ſ B menſura temporis quo percurritur tota q a, & diuidatur in quotcunque tempora B z, z c, ſ c æqualia vel inæqualia. Ex recta ſ q abſcindatur q y ipſi ſ q æqualis, & ponatur y s latus tranſuerſum hyperbolæ ſ E, cuius latus rectum ſit ſ F habens quamlibet rationem ad tranſuerſum: ex punctis c, z, B agantur c d, z D, B E ordinatim applicatæ ad axem hyperbolæ ſ E.

Oſtendendum eſt, ſi mobile iuxta velocitatis menſuram q g l f a inchoato motu à puncto q, & inſumptis temporibus ſ c, ſ z, ſ B, ponatur reperiri in punctis n, e, a; ſpatia decurſa q n, q e, q a eſſe vt quadrata d c, D z, E B.

Compleatur parallelogrammum g x f r, vt rectæ a f, q r ſint æquales, ac proinde quadratum q g ad q r ſit vt recta m q ad m a: erunt igitur rectæ q r, q B ſectæ proportionaliter in g & s. Intelligatur hyperbola g h cuius diameter tranſuerſa ſit T g dupla rectæ q g, diameter verò coniugata ſit m R dupla rectæ m q: ducantur ordinatim applicatæ n l, e b, &

compleantur parallelogramma q n l t, q e b u; rectæ verò f r, b u, l t productæ occurant hyperbolæ in h, i, p.

Quoniam per tertiam tertij tetragonismicorum tres rectæ m q, t p, t l sunt proportionales; itemque tres m q, u i, u b; itemque tres aliæ m q, h r, r f: rectæ r f, u b, t l, hoc est rectæ q a, q e, q n erunt vt quadrata h r, i u, p t. Præterea rectæ g t, g u, g r erunt vt tempora quibus decurruntur spatia q n, q e, q a; id enim constat ex quinquagesima tertiâ, cùm q g l f a portio parabolæ m g f a ibi tractatæ, sit mensura velocitatis totalis: sed rectæ s c, s z, s B ponuntur esse vt eadem tempora: ergo vt rectæ g t, g u, g r, ita s c, s z, s B: ergo cùm q s ad q B sit vt q g ad q r; vt sunt q g, q t, q u, q r, ita erunt q s, q c, q z, q B. Cùm igitur per vigesimam primam primi conicorum quadrata h r, i u, p t sint vt rectangula T r g, T u g, T t g: quadrata verò B E, z D, c d sint vt rectangula y B s, y z s, y c s, triáque illa rectangula sint inter se vt tria ista ob similem rectarum T r, y b sectionem in punctis g, t, u, r & s, c, z, B, patet vt quadrata h r, u i, t p, ita esse quadrata E B, D z, d c. Vt igitur quadrata E B, D z, d c ita sunt spatia decursa q a, q e, q n, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Quoniam spatia decursa q n, q e sunt vt quadrata t p, u i; quadrata autem t p, u i sunt vt rectangula T t g, T u g, vel vt y c s, y z s patet spatia q n, q e esse vt rectangula y c s, y z s.

COROLLARIVM II.

Si virtutis natiuæ mensura poneretur parallelogrammum m a M G quodcunque ad partes oppositas parallelogrammo m o x a, & figura G m l f M constitueretur mensura totius velocitatis; temporum, velocitatum, & spatiorum comparatio ita perturbaretur, vt nihil certum ex demonstratis hactenus quod colligerem, occurrerit. Hinc factum est vt natiuam virtutem, prout à nobis iuncta fuit cum parabola, crediderim iunctum iri ab iis qui Galilæi hypotheses reducere volent ad grauia considerata cum grauitate illa natiua, quam re ipsa obtinent.

PROPOSITIO LVI.

COnferuntur duæ illæ hypotheses, & ostenduntur non tanto differre, vt vna refellatur apertè per obseruationes, quibus altera ad amussim quadret.

Esto (*Fig.* 81.) triangulum m a f, cuius latus f a, ita diuisum sit in c, vt sicut est septenarius ad ternarium ita poteſtate sit f a ad f c, & f c ad f g, itémque f g ad e f, demúmque f e ad f b. Erunt igitur per demonstrata in 82. progressionum apud Gregorium à S. Vincentio, vt f a ad f c, ita continuè a c, c g, g e, e b. Per b ducatur b n parallela rectæ a m, complens triangulum f b n; per n ducatur n o latus parallelogrammi n o a b, quod ponatur mensura natiuæ velocitatis magnitudinis A; trapezium ve-

rò n m a b ſtatuatur menſura totius velocitatis magnitudinis A delatæ ex b in a per rectam b a. Quoniam a f recta ad f g ponitur longitudine vt ſeptenarius ad ternarium, vel vt 63. ad 27. Si 63. ducatur in 27. gignetur numerus 1701. cuius radix quadrata eſt circiter 42. ac proinde numeri 63. 42. ſunt vt longitudines a f, c f; vel vt a c, c g. Quatuor igitur rectæ a c, c g, g e, e b ſunt vt numeri 27. 42. 63. 98. circiter, ita vt error non attingat vnitatem integram: ſumma verò iſtorum quatuor numerorum erit 230. Talium igitur 230. erit tota b a, qualium a c, c g, g e, e b ſunt 27. 42. 63. 98. Si igitur recta b a ponatur partium 240. erunt b e, e g, g c, c a partium circiter 28. 43. 65. 102. Ex propoſitione igitur quinquageſima tempora quatuor quibus percurruntur partes b e, g e, g c, ca ſunt inter ſe æqualia.

Venio iam ad experimentum Reuerendi P. Riccioli lib. 9. Almageſti ſect. 4. cap. 16. n 11. quod in Bononienſi Aſinellorum turri altâ pedes 280. ſumpſiſſe ſe narrat. Is igitur cùm ante annum 1640. planè acquieſceret proportioni illi à Galilæo traditæ, parauit globum argillaceum vnciarum octo, cúmque ex ſumma illa turri demiſit, & tempus delationis dimenſus eſt per ſenas quaſque vibrationes perpendiculi ad id deſtinati conficientes ſimul horæ minutum vnum ſecundum, vel horæ vnius particulam ter milleſimam ſexcenteſimam. Expertus autem eſt globum confeciſſe pedes 15. poſt vnam temporis menſuram, ſiue poſt ſex vibrationes: poſt duas, 60. poſt tres, 135. poſt quatuor 240. Primum igitur interuallum inuenit pedum 15. ſecundum, 45. tertium, 75. quartum 105. qui numeri ſunt vt 1. 3. 5. 7. prout Galilæus primus eos exploraſſe dicitur. Iſta tamen interualla non exhauſerunt, vt patet, totam altitudinem turris ad baſim vſque, ſicuti optandum erat, & ſicuti optaſſe ipſe Ricciolus ſatis intelligitur ex varia mutatione menſuræ temporis: nam in alio experimento ſumpſit vibrationes ſex cùm vnius ſemiſſe in ſingulas temporis menſuras; attamen turris illa pedum 280. non fuit ſatis alta pro quatuor menſuris, & humilior pro quinque, vt idem Ricciolus exactè narrat.

Vt autem comparatio quam inſtituere paramus perſpicuè intelligatur habenda ſunt præ oculis duo ſubiecta latercula, quorum primo continetur iſtud Riccioli experimentum, cum quadratis vibrationum: alterum autem laterculorum repræſentat pedes in hypotheſi altera decurrendos, intra temporis ſpatia æqualia; intra primum, 28. intra ſecundum 43. &c. adduntur etiam quadrata vibrationum neceſſariarum ad hoc vt iuxta Riccioli & Galilæi hypotheſim percurreretur numerus pedum illi ſecundo laterculo adſcriptus. Reperiuntur verò iſta quadrata, ſi vt ſpatium 15. pedum laterculi primi ad ſpatium 28. pedum laterculi ſecundi, ita fiat vibrationum primi laterculi quadratum videlicet 36. ad 68. Iſte enim quartus numerus eſt quadratum vibrationum 8. circiter, ad hoc vt in hypotheſi Galilæi pedes 28. percurrerentur ab initio motûs deſignato. Ita pariter vt ſpatium laterculi primi 60. ad ſpatium 72. laterculi ſecundi, ſic

Vibrationum numerus.	Spatia confecta ab initio motus definita pedibus Rom.	Spatia confecta in singulis temporibus.	Quadrata vibrationum.
I. Laterculum.			
6.	15.	15.	36.
12.	60.	45.	144.
18.	135.	75.	324.
24	240.	105.	576.
II. Laterculum.			
8.	28.	28.	68.
13.	72.	43.	173.
18.	137.	65.	328.
24.	240.	102.	576.

eſt vibrationum quadratum 144. ad 173. Hoc quoque pacto vt 35. ad 137. ita fiant 324. ad 328. Radices verò quadratæ illorum numerorum dant vibrationes laterculi ſecundi nempe 8. 13. 18. 24. circum circa.

Porrò ex conſpectu & comparatione laterculorum liquet quæ in ſententia ſecundi decurruntur æqualibus temporibus, in hypotheſi laterculi Galilæana percurri debere non admodum diuerſis temporibus, cùm poſtremum poſtremo quadret, nec tertium à tertio diſcrepet: ſecundum verò à ſecundo differat vna vibratione; primum denique à primo duabus. Quæ certè ſatis leuia ſunt, nec obſtant quo minùs totum id vel refundatur in vitium Obſeruatorũ aliquod quamuis occultum, vel in aërem ambientem, vel in aliud ſimile. Gaſſendus accerimus huius hypotheſeos aſſertor in diſſertatione de motu impreſſo n. 35. pag. 556. tom. 3. edit. Lugdun. & in epiſtola ad P. Honoratum Fabrum Societatis nôſtræ pag. 167. tom. 6. candidè fatetur circa ipſa initia obſeruari non poſſe iuxta quam progreſſionem numerorum fiat iſta acceleratio, idque omnem diligentiam ſuperare. Attendi quoque hîc debet conditio experimenti à Ricciolo ſumpti. Integrum tempus totius deſcenſûs fuit nongenteſima particula vnius horæ; diuiſa verò fuit in viginti quatuor alias particulas vibrationibus totidem reſpondentes. Illa breuiſſima temporis morula globus octo vnciarum argillaceus ſumma pernicitate præteruolauit ducentos quadraginta pedes romanos; interea verò annotatæ ſunt vibrationes, deſignatæ ſunt oculis partes muri quibus ſphæra illa reſpondit inter cadendum. Hæc certè omnia ſuadent in pedibus numerandis & attribuendis breuiculis illis temporis momentulis poſſe committi errorem nonnullum ab exercitatiſſimo quoque.

His ita perpenſis mihi nondum ſatis liquet cur P. Ricciolus iſtam Baliani & Cabæi, vt ipſe teſtatur, ſententiam de numero opinionum eximat, detrudátque inter errores. Neque enim ſatisfacere videtur dicendo *illius oppoſitum ſibi & aliis qui teſtes adfuerunt obſeruationibus ſuis, iam non eſſe probabile tantùm, ſed euidens ac certum infallibili ſcientiâ Phyſico-mathematicâ.* Nam non eſt adhuc euidens hæc experimenta, eſto certa ſint, oppoſita eſſe ſententiæ illorum Autorum; nec Ricciolus oſtendit ſi vera ſit Baliani ſententia, non poſſe eſſe vera illa experimenta. Adnotandum verò hîc cenſeo Balianum nobilem Genuenſem deditiſſimum fuiſſe experimentis capiendis, &

cùm initio Galilæi ſententiam ſequeretur, diſceſſiſſe poſtea ab illa, vt ipſe Ricciolus narrat lib. 9. ſect. 4. cap. 16. n. 24. Noſtram itaque hac de re ſententiam concludimus hoc dicto, nondum allata eſſe experimenta quæ falſitatis conuincant Balianam opinionem: ergo &c. quod erat nobis conſtitutum.

COROLLARIVM I.

Aduertendum eſt quod in ſecundis & quartis ſpatiis laterculi vtriuſque inuicem collatis nulla ferè ſit diſcrepantia, maior verò exiſtat in aliis, id oriri ex optione proportionis quam poſui eſſe inter interualla a f, a c, & inter velocitates a o natiuam, & o m acquiſitam, dum magnitudo A ponitur in puncto a. Cùm enim obſeruata à Ricciolo interualla narrentur eſſe vt 1. 3 5. 7. (quod quidem mathematicè eſſe non poteſt ſaluâ natiuâ grauitate mobilis, ſi interualla ſint vt quadrata temporum, vt in quinquageſima quinta oſtendimus) ſumpſi proportionem rectæ a f ad f g eam ipſam eſſe, quæ numeri 7. ad 3. Quod ſi poſuiſſem diuerſam, hoc eſt, aut paulò maiorem, aut paulò minorem, inæqualitas ſpatiorum obtigiſſet diſpenſata aliter, nec tanta apparuiſſet in primis & tertiis ſpatiis. Iſtud itaque mihi adſcribi debet; methodo tamen pari poterit ſeligi proportio rectæ a f ad f g quæ numeris illis aptiùs adhuc congruat: cúmque proportio velocitatis a o ad m o ignota nobis aliunde ſit quàm ab obſeruationibus, ea deligenda erit quæ illis quàm optimè conueniat. Verum quidem eſt, ſi velocitas b n vel a o ad velocitatem g h ſit vt ternarius ad ſeptenarium, non poſſe aliter diuidi illa quatuor ſpatia, quàm à nobis diuiduntur in ſecundo diagrammate: ſed ad ſtatuendam eiuſmodi proportionem nihil inducere nos debet, niſi concordia illius cum experimentis. Quapropter cùm non dubitem quin alia proportio rectæ a f ad a c meliùs adhuc reſponſura ſit illis, eam eligendam relinquo ſtudioſo veritatis indagatori; methodus verò ſemper erit eadem.

COROLLARIVM II.

Si eadem magnitudo A ponatur ferri bis per idem ſpatium b a, ſemel quidem iuxta Galilæi ſententiam, & tempus lationis ſit B, iterum verò iuxta Baliani hypotheſim tempuſque lationis ſit C, methodus præſentis propoſitionis (vt patet) non aſſumit tempora B, C fore æqualia; ſed tantùm ſi ſpatium b a diuidatur in quatuor partes iuxta numeros ſecundi laterculi 28. 43. 95 102. quatuor partes temporis illis reſpondentis eſſe ferme inter ſe æquales in hypotheſi Galilæana, in Balianiana autem quatuor partes temporis C illis reſpondentes eſſe prorſus æquales inter ſe. Hoc enim ſemel conſtituto quatuor partes tam temporis B quàm C eſſe debere in vtraque hypotheſi, ſaltem quantum ad ſenſum attinet, æquales, nulla ſupereſt nobis ratio qua diſcernamus vtrum magnitudo A ſiue globus argillaceus ex ſumma turri Aſinellorum demiſſus à P. Ricciolo inſumpſerit cadendo tempus B, potiùs quàm tempus C. Quæ enim?

PROPOSITIO LVII.

Satisfit dubio occurrenti aduersus hactenus demonstrata de natiua virtute.

Vnum prætermissum videmus, quod ne labem aliquam illi de natiua virtute opinioni inferre possit hîc nobis proponendum simul & dissoluendum censemus. Ostendimus in 48. propositione virtutem natiuam grauis impedire ne demonstratio Anonymi noceat hypothesi isti: atqui dum graue sursum proiectum incipit deorsum recidere, in puncto illo reflexionis virtus natiua deorsum premens eliditur & quasi nulla redditur per æqualem vim sursum trahentem, & æquilibrium constituentem; graue igitur in hoc casu moueri non poterit. Respondeo isto argumento demonstrari sententiam nostram & Aristotelis l. 8. phys. c. 7. & 8. *dari nempe quietem in puncto reflexionis*. In isto igitur casu plures Philosophi secuti Aristotelem quem rectè explicant Conimbricenses in ca. 8. libri illius quæst. 1. contendunt dari morulam aliquam temporis qua proiectum quiescat ab omni motu, quia tunc perinde est ac si nulla illi esset virtus deorsum, nullaque sursum vergens; tantumque postea censetur acquirere virtutis deorsum quantum remittitur virtus sursum; quia verò aër subiectus resistit motui deorsum & illa resistentia debet vinci virtute aliqua determinata, tantum debet remitti virtus sursum, quanta est illa virtus sufficiens ad scindendum aërem: ergo quies tamdiu durat, quamdiu remittitur illa virtus, neque enim remittitur in instanti, sed successiuè. Propter istam rationem existimaui dari oportere quietem in puncto reflexionis, si aër vincendus subsit; si autem nihil subsit, sed vacuum ponatur medium, credidi quietem non fore necessariam: nunc verò propter illius demonstrationis rationem conuincor necessariam esse etiam in vacuo, sententiâ ista Baliani positâ, morulam, vt tantisper acquiratur virtus aliqua certa, cuius ope vitetur illud incommodum. Illa porrò morula determinanda erit à principio aliquo extrinseco, si intrinsecum nullum adsit exigens potius hanc quam illam: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Quoniam virtus natiua mirum quantum turbat hypothesim Galilæi & Gassendi, posset aliquis cogitare virtutem natiuam gratis à nobis supponi habere proportionem rectæ o a (*Fig.* 81.) ad rectam a m. Verùm istud minimè gratis asseritur à nobis. Esto enim virtus aliqua quam denotet recta m a deferens vniformiter magnitudinem A intra tempus B: esto virtus natiua D deferens vniformiter intra tempus C. Si enim virtus D non sit apta deferre vniformiter per spatium nihil resistens (hoc namque ponimus dum virtutem natiuam æstimamus) non est virtus vlla, nihilque nisi nomen virtutis habet; at verò virtus quàm experimur dum humeris grauia tollimus, non est eiusmodi nomine tenus virtus. Vt est C ad B ita fiat m a ad a o; patet virtutem m a conuenientem tempori B esse ad vir-

tutem

tutem D conuenientem tempori C vt eſt a o ad a m: ergo virtus natiua ad aliam virtutem denotatam rectâ a m habet proportionem rectæ a o ad a m.

PROPOSITIO LVIII.

SI magnitudo A (*Fig.* 78.) ponatur moueri à punctò a ad f, & menſura velocitatis ponatur primo quidem triangulum vt in caſu trigeſimæ nonæ; ſecundo ceratoides parabolica, vt in caſu quadrageſimæ; tertio parabola, vt in caſu quadrageſimæ primæ.

Oſtendendum eſt in prima & ſecunda hypotheſi motum fieri poſſe, ſed nunquam finem illius fore; in tertiâ verò, fore aliquando illius finem.

Ex quadrageſima ſecunda huius liquet tempora partium decurſarum eſſe eadem ſi inceſſu retrogrado eadem via relegatur, dummodo eadem menſura velocitatis maneat. Ergo cùm poſt primam partem a c reſtent aliæ infinitæ c g, g e, e b, &c. percurrendæ, in quarum ſingulis pro primo caſu impendi debeat par tempus tempori partis a c, vt in quinquageſima oſtendimus, vel pro ſecundo caſu maius, vt in quinquageſima prima monſtratum eſt, patet in duplici iſto caſu finem nullum fore lationis. Quoniam verò ex quinquageſima ſecundâ conſtat in tertio caſu tempus minoris partis decreſcere in certa quadam proportione, apertum eſt infinitarum illarum partium tempora ſimul conflare tempus aliquod finitum, id enim oſtenditur in 82. libri progreſſionum apud Gregorium à S. Vincentio: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ratio cur opus ſit infinito tempore in primo & ſecundo caſu non eſt quod magnitudo in motu tranſit per omnes tardioris motûs differentias, vel vt ita dicam, per omnes tarditates; id enim competit quoque tertio caſui; ſed quod tranſit per omnes ita diſpoſitas. Cæterùm iſtud theorema non immeritò inter paradoxica reponi poteſt. Ex hac verò propoſitione liquet, quæ de motu accelerato demonſtrata fuere, poſſe ſaltem plurima applicari motui retardato. In toto autem iſto tractatu ſumpſimus velocitates vniformes, id eſt, neque auctas neque imminutas tempore lationis, ac proinde deferentes vniformiter magnitudinem, intra idem tempus deferre per ſpatia quæ ſint vt velocitates, itemque ſi deferant per idem ſpatium, earum tempora eſſe reciprocè vt velocitates, quod etiam apud Galilæum libro de motu æquabili conſtans eſt,

PROPOSITIO LIX.

MIra varietas opinionum circa quæſtiones phyſicas de grauium motu refertur, eiuſque cauſa indagatur.

Vendelinus laudatus à nobis ſuprà in corollario propoſitionis quin-

quagesimæ primæ, horaria scrupula duodecim contendit sufficere ad lapidis in centrum terræ descensum. Ricciolus noster tom. 1. pag. 90. ait globum argillaceum vnciarum 8. confecturum intra horam passus romanos antiquos 38880000. cùm igitur 12. horaria scrupula sint quinta pars vnius horæ, & spatia sint in hypothesi Riccioli vt quadrata temporum, duodecim scrupula horaria vindicabunt sibi vigesimam quintam partem illorum passuum, nempe 1555200. qui conficiunt milliaria circiter 1555. Atqui idem Ricciolus eiusdem tom. pag. 63. asserit semidiametrum terræ continere milliaria 5174. ergo intra horaria scrupula duodecim triplo plus itineris confecerit globus descendendo iuxta Vendelini sententiam, quàm iuxta Riccioli. Vterque tamen vult in descensu seruari eandem proportionem. P. Mersennus exigit sex horas ad illud iter, vt refert Vendelinus; in quo sequitur Galilæum relatum & reiectum à Ricciolo tom. 2. pag. 399. nam ex hypothesi quam ibi Galilæus struit ad explicandum istum motum, apertè sequitur sex horas esse necessarias ad istud iter. Hanc ipsam hypothesim Galilæi Gassendus non improbat dissertatione de motu impresso n. 35. pag. 556. tomi tertij edit. Lugd. Ex istis igitur Autoribus lapis descendendo tricies plus temporis insumit, quàm Vendelini calculus ferat.

Præterea Vendelinus & Ricciolus asserunt lapidem ad centrum vsque iturum esse per maiora vsque & maiora incrementa velocitatis. At Galilæi hypothesis incrementa non admittit nisi vsque ad itineris medium, inde verò decrementa ad centrum vsque, vbi cesset omnis motus. Hoc expressè docet Gassendus in illo dissertationis loco & in epistola ad R. P. Fabrum Societatis nostræ tom. 6. pag. 167. cui quidem decremento simile aliud agnoscit, probabiléque putat in sententia Bullialdi, quam tamen refellit Ricciolus tom. 2. pag. 398. quamuis ipse Bullialdus constanter illam semper asseruerit vt patet ex literis ad Gassendum datis, & editis tom. 6. Operum Gassendianorum pag. 410.

Tertiò in illo ipso corollario propositionis quinquagesimæ primæ iam retuli discordiam inter Vendelinum & Ricciolum super quæstione an globus octo vnciarum tardiùs descendat globo mille librarum: vtérque tamen demonstrationem se hac de re habere incunctanter affirmat.

Quartò circa perpendiculi reciprocos itus & reditus non concinunt planè inter se Recentiores. Vendelinus in epistola ad Gassendum inserta tom. 6. pag. 497. Operum Gassendianorum, ita scribit. *Quod autem Mersennus miratur asseri à me hibernas oscillationes horarias plures esse quàm æstiuas, sciat (oro) me experimentis innumeris id deprehendisse.* Ricciolus istud non admittit l. 2. cap. 20. propos. 15. subdítque nec placere Mersenno. l. 4. harmoniæ pag. 369. quod argumento est Vendelinum neque per literas, neque libris editis id potuisse vnquam probare Mersenno. Constantiam autem vibrationum in perpendiculis ante se vsurpatis nullam fuisse contendit asseueranter Caramuel in epistola quæ inter Gassendianas extat pag. 497.

Tanta verò in istis mensuris oscillationu mdeterminandis extat varietas, vt Ricciolus illud refundat in aliquorum indiligenter obseruata. Quod autem in suo perpendiculo vnus Calignonus sibi visus est obseruasse, reijciunt vt inexpertum Ricciolus tom. 1. pag. 91. & Gassendus de motu impresso tom. 3. pag. 536. n 15. post Mersennum suum.

Venio ad causam tantæ discordiæ. Prima eáque generalis est quod inter accuratos Obseruatores alij aliis sint accuratiores: quo in genere Ricciolum nostrum esse accuratissimum dubitari non potest, inspectis eius obseruationibus. Neque putes Tyrones tantùm esse causam illius discordiæ quæ in omni genere obseruationum deprehenditur; inter viros enim peritos & longo suæ artis vsu consummatos hæc discordia sæpius interuenit. Hinc tanta varietas in capienda eleuatione poli Vrbis alicuius etiam celeberrimæ; & in obseruandis momentis characteribusque deliquij cuiuslibet solaris vel lunaris. Aberraret verò toto veritatis ostio si quis inde statueret negligenda esse experimenta; cùm inde potiùs inferre deberet diligentiùs incumbendum esse experimentis capiendis: illa enim sunt totius Physices basis; vnde Aristoteles in Ethicis pronuntiauit puerum posse fieri Geometram, non tamen Physicum; quia Geometria non nititur experimentis, Physica verò in illis tota fundatur. Quapropter qui dicunt Peripateticorum Philosophiam spernere experimenta, quid dicant nesciunt, aut imperito illudere vulgo student, illíque ingenerare odium melioris (vt equidem reor) Philosophorum sectæ. Nos tamen qui Peripatetici & dici & esse volumus, semper, quoties de sensuum iudicio vel experientia agitur, præ oculis habemus illud Augustini lib. 8. de Ciuitate Dei cap. 7. *absit vt his comparandi videantur qui posuerunt iudicium veritatis in sensibus corporis, eorúmque infidis & fallacibus regulis omnia quæ discuntur metienda esse dixerunt, vt Epicurei, & quicunque alij tales, vt etiam ipsi Stoici. . . . Hi verò, quos meritò cæteris anteponimus, discreuerunt ea quæ mente conspiciuntur, ab iis quæ sensibus attinguntur; nec sensibus adimentes quod possunt, nec eis dantes, vltra quàm possunt.* Hîc obiter aduerto iuxta Augustini sententiam Epicureorum, Stoicorumve philosophiam non esse omnium optimam: quæ duæ nominatim sectæ malè etiam audiunt Actorum cap. 17. v. 18. Quod autem quidam Epicurei hodiéque Aristotelem maledictis onerant, in eo se genuinos probant sectatores Epicuri, qui (vt ait Tullius lib. 1. de nat. Deor.) *contumeliosissimmè Aristotelem vexarit.*

Altera discordiæ illius causa non iam sunt experimenta, sed vel rationes illis experimentis superstructæ; vel præiudicatæ aliunde opiniones. Ita Gassendus cùm grauia existimarit virtute terræ magneticâ attrahi, in eam sententiam ire coactus à Morino est, vt asseruerit grauium velocitatem non augeri nisi vsque ad dimdium putei, qui ad centrum vsque effossus foret. Vendelinus & Ricciolus naturam secuti sunt ducem, cúmque omnibus experimentis illa doceat augeri velocitatem grauium, longè verosimiliùs scripserunt, istud augmentum continuatū iri etiam ad centrum

vſque terræ. Cæterùm, vt hoc in tranſitu dicam, caue putes eos qui ſuam philoſophiam dictitant *experimentis ſenſatis paſsim comprobari*, nihil inſuper addere, quod non ita comprobetur. Quibus experimentis atomi Epicureæ comprobentur prorſus me latet; ſed multò magis ignoro quo ſensûs experimento comprobetur quod Reuerendus P. Maignan tom. 2. Curſûs ſui pag. 685. n. 7. aſſerit, atomum eſſe ſolidæ extenſionis, exempli cauſa, inſtar paruulæ teſſeræ, haberéque facies ſex quadratas, angulos octo: ſed iſtos ſex angulos eſſe vnam & eandem prorſus rem, ipſámque atomum quamuis corpoream, hoc habere commune cum Angelo & ſpiritu, vt ſit *tota in toto & tota in qualibet parte*. Gaſſendus Principi ſuo Valeſio, cui nihil ſuorum celatum eſſe vult, pag. 159. col. 2. ſexti tomi, concedit vltro atomum præditam eſſe partibus; *eam tamen nulla vi eſſe ſecabilem*: exiſtimauit quippe hoc ſenſatis experimentis aptius quadrare, vt corpus trinæ dimenſionis, quamuis exiguum, partes obtineat. An autem dum nulla vi ſecari poſſe ſcripſit, diuinam etiam intellexerit, inquirit Merſennus per epiſtolam inſertam tomo ſexto Operum Gaſſendi pag. 430. ſed quid ille reſponderit penitus ignoro. Expoſita igitur eſt illa opinionum varietas, eiuſque cauſa eſt indicata, prout fuit propoſitum.

COROLLARIVM.

Ex demonſtratis liquidò conſtat Phyſici nomen nondum eſſe tribuendum illi, qui ſola experimenta, quantumuis plurima, perceperit: cùm non ſit adhuc niſi inſtructus apparatu ad Phyſicam addiſcendam neceſſario: id verò inde apertè confici quòd ex eiſdem experimentis alij vnum ſtatuant, alij oppoſitum. Ille igitur ſolus Phyſici nomen mereatur, qui ex phyſicis experimentis ea concludat quæ licet ſub ſenſus non cadant, cohęreant tamen iis quæ ſenſu percepta fuerint.

PROPOSITIO LX.

INdiculus præcipuorum quæ in hoc libro tractantur.

I. Methodus ſine intricato illo arabiſmo explicandi ſummas ſimplices alicuius figuræ, & eiuſdem ſummas quadratorum, cuborum &c. earumque vſum, extat in propoſitione prima & ſecunda. Figura autem curua huc reducitur, quandoquidem ad hoc vt maiori cum perſpicuitate res intelligatur, debet expandi in planam, iuxta modum explicatum in quinto libro. Dum autem Arabiſmum hîc notamus, Diophanti Alexandrini numeros nolumus non ſummè probare.

II. Dettonuillæus mirabili caſu incidiſſe in eandem cum Gregoriana quadraturam cycloideos ſuperioris paruæ oſtenditur in tertia propoſitione.

III. In quarta proponitur poſtulatum qnod certiſſimum putamus, ex quo benè multis inductionibus, compertum habuimus illud conſonare cum demonſtratis via geometrica antiqua. Illius quidem Dettonuillæus mentionem non facit; ſed eo ſubaudito & conceſſo oſtenditur nonnullo-

rum huius Autoris problematum concordia cum nostris, in quarta & quinta propositionibus.

IV. Nostra quadratricum generatio & comparatio cum summis triangularibus & pyramidalibus Dettonuillæi proponitur, & ostenditur in sexta & quinque sequentibus, nec non in decima tertia, nouas tantùm esse voces Dettonuillanas. Vngulетta, corúmque vsum primus qui inuenerit non esse Dettonuillæus monstratur in nona, & decima quinta. Vsus libræ planæ à nobis olim propositus quibus verbis significetur à Dettonuillæo, declaratur in decima quarta. Quid de methodo *indiuisibilium* sentiamus, narramus in decima septima; vbi omisimus dicere nonnullos in istam methodum conferre problemata plurima ex numeris traducta; quod quidem tam attinet ad communem Antiquorum Geometriam, quam ad nouam istam. Hoc verò licet permittatur, cùm Arithmetica & Gemetria sorores sint coniunctissimæ, iuxta illud ab Eutocio in vndecimam 1. Conicor. relatum, ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι εἶμεν ἀδελφά; attamen in eo summè religiosos fuisse Antiquos deprehendi. Etenim cùm Pythagoras, vt plures volunt, ex numeris venatus esset problema illud celeberrimum, quod in primi Euclidis propos. 47. locum tenet; curauit illi demonstrationem geometricam inuenire; alienùmque à cultu illius ætatis geometrico se facturum fore putauit, si problemate proposito, dixisset id ex numeris patere quoties latera trianguli rectanguli habent ad basim rationem numeri ad numerum; nec aliter id posse euenire etiamsi non habuerint proportionem eam quam habet numerus ad numerum.

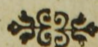
V. In decima septima declaramus quid sentiamus de difficultate problematum quæ hodierni scriptores soluunt, si conferantur cum iis quorum solutionem Antiqui nobis reliquerunt. Istud verò vberius explicandum hoc loco nobis est, cur videlicet nostræ summæ pyramidales duplo maiores sint Dettonuillanis, vt in vndecima statuimus, vbi tunc hæsimus in assignanda causâ; sed ea profectò perspicua erat, & ante à nobis scripta quàm de illo libro sexto cogitaremus. In propositione quinta libri tertij superioris (*Fig.* 24.) posuimus per figuræ b z c g limbum ad positionem inclinatæ b a describi superficiem inclinatam, cuiusmodi in corollario vltimo primæ eiusdem libri dicitur descripta fuisse in constructione illius eiusdem propositionis. Ostendimus autem si per eundem limbum b z c moueatur parallela perpendiculari g a, describatque superficiem super plano b g c rectam; solidi, cuius sectio est triangulum z t e vel z t y (sunt enim quantum ad istud idem) æquiponderans esse duplum æquiponderantis solido cuius sectio est triangulum z y e, libræ planæ axe g c, perpendiculo a g c, sustentaculo d i. Atqui triangulum t y z est sectio nostri cunei effecti à plano per g c ducto, habente inclinationem t y z, super plano b g c; si autem triangulum t y z mutetur in æquale z e y, solidum sectionis z e y habebit, sicut ex 1. tertij patet, hanc proprietatem, si quolibet plano ad planum a g c parallelo secetur inter puncta z, y, & angulus t y z

sit semirectus, vt sectio illa sit æqualis & similis portioni baseos bzcg interceptæ inter illud planum & punctum b: ergo istud solidum habet proprietatem summæ triangularis Dettonuillanæ, & solidum sectionis t yz habet proprietatem nostræ summæ triangularis, vt ex demonstratis in hoc libro patet: ergo necessarium est vt æquiponderans summæ nostræ triangulari sit duplum æquiponderatis summæ triangulari Dettonuillanæ: sed æquiponderans istis summis est summa pyramidalis, ergo necessarium est vt summa pyramidalis nostra, sit dupla summæ pyramidalis Dettonuillanæ. Id verò, vt patet, non probat quicquam contra hactenus asserta de Dettonuillanis inuentis. Nec existimare quisquam debet solidum sectionis zye triangularis aliud esse quam cuneum vel vngulam abscissam ex cylindraceo inclinato; sicut solidum sectionis triangularis zty est vngula ex cylindraceo recto abscissa: ambæ vngulæ sunt æquales: sed æquiponderans vngulæ inclinatæ non est nisi dimidium spatij quod vngulæ erectæ æquiponderat.

VI. Calculus sex problematum quæ de corona circulari & cycloidica proponi eodem pacto possunt quo de cycloide in libris tertio, quarto, & quinto proposita iacent, initur propositione decima octaua, & per duodecim sequentes absoluitur.

VII. In propositione trigesima prima, & in quatuor sequentibus proponuntur quædam difficultates physicæ, cum cycloideos generatione connexæ: ibíque quædam PP. Maignan & Tacquet scita physico-mathematica examinantur.

VIII. Denique à trigesima sexta ad finem vsque nonnulla demonstrãtur de grauium descendentium acceleratione, quæ non paucis paradoxica iudicabuntur, cuiusmodi imprimis erunt quæ in quinquagesima & quinquagesima prima propositionibus demonstrantur. Ex corollariis autem quadragesimæ sextæ, quadragesimæ nonæ, quinquagesimæ quartæ, & ex quadragesima octaua patebit V. C. Gassendum non potuisse ista accuratè definire, quòd geometriam non coniunxerit cùm principiis motús physicis. Optarunt imprimis Galilæus & Gassendus vt grauia decidentia & à recto casu impedita parabolam itinere suo describerent: Physicogeometra non tam quid illi summi viri optarint, quàm quid ratione valida probãrint examinabit: ad hoc enim aliquando assumere videntur principia physica, quæ iure merito in dubium reuocentur.





DE CYCLOIDE LIBER SEPTIMVS.

In quo accuratiùs examinantur principia Archimedeæ illius libræ, qua in Cycloide tractandâ potissimùm vsi hactenus fuimus.

PRÆFATIO.



Vm Geometriæ peramica Analysis, dicatur ἡ ἀπὸ τοῦ τέλους ἄνοδος ἐπὶ τὴν ἀρχὴν, *à fine ad principium regressus*; non abs re erit vt post tam frequentem, etiam in istis de Cycloide libris, vsum libræ Archimedeæ, ad ipsius principia regrediamur; præcipuè cùm, vt Orator ait, *in Geometriâ prima si dederis, danda sint omnia.* Retro autem gradi iuuabit vt propiùs inspiciamus quænam & quàm probabilia sint ea quæ dedimus, & quæ huius artis præcipuus inuentor Archimedes sibi dari postulat: in quo quidem regressu occurrent nonnulla, quæ eò magis curiosum allicient Geometram, quò remotiora à vulgi opinione erunt.

ARCHIMEDIS POSTVLATA.

I. Petimus grauia æqualia, æquali distantiâ posita, stare in æquilibrio. II. Grauia item æqualia, ex inæqualibus longitudinibus suspensa, non stare in æquilibrio; sed ad id quod ex maiore pendet, vergere. III. Item si grauibus, quæcunque sint longitudines vnde pendent, stantibus in æquilibrio; alteri eorum adjiciatur aliquod graue, tunc ea non stare ampliùs in æquilibrio, sed ad id inclinari, cui illud graue fuerit adiectum. IV. Similiter etiam, si ab altero eorum auferatur graue, tunc non ampliùs committere æquilibrium, sed ad id à quo nihil sit ablatum, vergere. V. Figuris planis, similibus & æqualibus inter se coaptis, centra quoque grauitatis earum erunt inter se coaptata. VI. Si verò figuræ similes fuerint, non autem æquales, centra grauitatis earum erunt similiter posita.

Similiter posita ad similes figuras dicimus esse puncta, à quibus lineæ rectæ secundum angulos æquales ductæ efficiant æquales ad latera homologa angulos. VII. Item si magnitudines quædam in quibusdam distantiis positæ stent in æquilibrio, & quæcunque eis æquales in eisdem distantiis positæ stabunt in æquilibrio. VIII. Cuiuscunque figuræ cuius perimeter fuerit in eandem partem caua, centrum grauitatis intra figuram esse oportet.

PROPOSITIO PRIMA.

Explicatur quid Antiquiores Geometræ velint esse centrum illud grauitatis in quo Archimedis Isorrhopicorum libri fundantur.

I. Initio præsentis libri statuendum est Archimedem agere in vniuersum de centro grauitatis planorum, solidorum, & quarumlibet magnitudinum; septemque primas propositiones libri primi æquiponderantium esse communes omnibus quæ suspendi possunt, siue lineæ, siue planæ figuræ, siue solidæ fuerint; ideóque μεγέθη ea dici, quod nomen generalissimum est. Quapropter, cùm in vulgatis codicibus non extet quid Archimedes centrum grauitatis appellet, id nunc inquirendum est de omni centro, quamuis Eutocius commentariis in illum librum satis putauerit se fecisse, si explicaret tantùm quid Archimedes vocaret centrum grauitatis in planis figuris.

II. Eutocius docet centrum grauitatis in planâ figurâ ex Archimede appellari *id à quo suspensa, parallela manet horizonti. Duarum autem aut plurium figurarum planarum, id à quo libra cùm suspensa fuerit, manet horizonti parallela.* Eius verba sunt hæc. κέντρον ῥοπῆς ἐπιπέδου σχήματος, ἀφ' οὗ ἀρτώμενον παράλληλον μένει τῷ ὁρίζοντι. Δύο δὲ ἢ πλειόνων ἐπιπέδων κέντρον ῥοπῆς ἤτοι βάρους, ἀφ' οὗ ἀρτώμενος ὁ ζυγὸς παράλληλός ἐστι τῷ ὁρίζοντι.

III. Pappus Alexandinus in octauo mathematicarum collectionum libro ita definit, centrum grauitatis in solido. Λέγομεν δὲ κέντρον βάρους ἑκάστου σώματος εἶναι σημεῖόν τι κείμενον ἐντὸς, ἀφ' οὗ κατ' ἐπίνοιαν ἀρτηθὲν τὸ βάρος ἠρεμεῖ φερόμενον, καὶ φυλάττει τὴν ἐξ ἀρχῆς θέσιν οὐ μὴ περιτρεπόμενον ἐν τῇ φορᾷ. *Centrum autem grauitatis vniuscuiusque corporis dicimus, punctum quoddam intra positum, quo ita librari pondus concipimus vt dum fertur deorsum non circumuoluatur, sed seruet quam in principio lationis habebat positionem.* Exposuimus igitur quid Archimedes ipse, Pappus, & Eutocius velint esse grauitatis centrum, quod erat propositum: in sequentibus verò paulò generaliorem huiusce rei trademus definitionem.

PROPOSITIO II.

Potest euenire vt centrum è quo suspensa figura plana manet horizonti parallela, sit extra ipsam figuram.

Sit figura plana b a e d f c (*Fig.* 82.) comprehensa lateribus sex b a, a e, e d, d f, f c, c b; sintque anguli a b c, a e d æquales, item f c b, f d e; latera verò a b, b c sint æqualia lateribus a e, e d singula singulis; Manifestum

ſtum eſt, iunctâ recta a f, figuras a b c f, a e d f eſſe æquales & ſimiles, angulumque b a e diuidi bifariam in duos b a f, e a f. Cùm ergo figuræ a b c f, a e d f ſint æquales & ſimiles, habebunt centra grauitatis ita ſibi reſpondentia vt ſi vna congruat alteri, centrum quoque vnius congruat centro alterius. Sit ergo centrum vnius h, & centrum alterius i; iuncta ſit recta h i occurrens rectæ a f in g; erunt h g, g i æquales; ſi enim ſuper a g intelligatur circumvolui planum a g h, congruet figura a b c f figuræ a e d f, & punctum h puncto i; ac proinde recta g h rectæ g i: ſunt ergo g h, g i æquales: ergo per quartam primi æquiponderantium g eſt centrum grauitatis magnitudinis c b a e d f compoſitæ ex duabus a b c f, a e d f. Poſſe autem g cadere infra punctum f eſt apertum: ſi enim a b c f ſit trapezium, diuiſiſque bifariam lateribus b a, c f in n & m, iungatur recta m n, erit per vltimam primi æquiponderantium centrum grauitatis figuræ a b c f in lineâ o p, ſimiliter diuiſis lateribus a e, f d & iunctâ recta o p. Si ergo perpendicularis f l ad rectam a f ex puncto f excitata non diuidat bifariam rectam a b in l, ſed minor ſit portio a l portione l b (quod fieri poſſe apertum eſt, cùm latera a b, a e, f c, f d poſſint produci ad quamcumque diſtantiam) cadet recta n o infra rectam l u, ac multò magis recta h i; punctum ergo g erit infra punctum f: poteſt ergo fieri vt centrum ex quo figura plana manet horizonti parallela ſit extra ipſam figuram; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

Poteſt euenire vt centrum, è quo ſuſpenſa manet figura ſolida, ſit extra ipſam figuram.

Intelligatur (*Fig.* 82.) eadem figura c b a e d f eſſe communis ſectio ſuperficiei planæ & ſolidi, ita vt diuidatur per planum, cuius ſectio a f, in duo ſolida omnino æqualia & ſimilia; eorum autem centra grauitatis ſint h & i. Quoniam ergo recta h i connectit centra grauitatis h, i duarum magnitudinum æqualium, & bifariam ſecta eſt in g: erit punctum g centrum grauitatis totius magnitudinis compoſitæ; quod erat oſtendendum. Quapropter Pappus dum voluit centrum eſſe intus non intellexerit id generaliter, ſed iuxta mentem Archimedis in octauo poſtulato. Ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex his manifeſtum eſt cur Archimedes non poſtularit in vniuerſum omnis figuræ planæ centrum grauitatis eſſe intra ipſam; ſed omnis figuræ cuius perimeter & linea curua ambiens ſit ad eaſdem partes caua. Ambitum enim, quo quælibet figura continetur vocat hic περίμετρον, ſiue ille ambitus conſtet lineis rectis, ſiue lineis partim rectis partim curuis, ſiue lineis curuis conſtituentibus aut non conſtituentibus angulum; vt ex initio libri primi de ſphærâ & cylindro conſtat.

PROPOSITIO IV.

EX demonſtratis infertur generalis definitio centri grauitatis Archimedei.

Ex his apertè colligitur centri grauitatis definitio pro qualibet finita magnitudine, ſiue ea ſit cuiuſcunque generis linea, ſiue cuiuſlibet modi ſuperficies, ſiue ſolidum quodcunque. Si per vnum aliquod punctum & per magnitudinem aliquam finitam ducatur linea recta expers grauitatis, rigida & minimè flexibilis, illíque lineæ intelligatur quaſi agglutinari & cohærere magnitudo veluti manubrio quo in omnem partem agi poſſit; recta iſta dicatur *perſpecto modo* cohærere magnitudini. Hoc autem poſito, ita definiri in vniuerſum poſſe videtur centrum grauitatis.

Si per aliquam magnitudinem finitam, & per vnum aliquod punctum ducta intelligatur recta linea magnitudini perſpecto modo cohærens, & ſi ex illo puncto vnico ſuſpenſa, perſtet immota in omni ſitu qui illi ad libitum datus fuerit, tale punctum vocetur centrum grauitatis illius magnitudinis.

Magnitudo aliqua liberè vel ſponte pendere ex puncto aliquo dicitur, quando ex modo pendendi non impeditur vergere quò natiua inclinatio tulerit.

Cæterùm planum ſiue lineam grauitate carere cum diximus, intelligi etiam volumumus leuitate quoque deſtitui, & eſſe aliquid quantum ad ῥοπὴν indifferens. Eutocius in danda definitione centri grauitatis planæ ſuperficiei poſuit illam eſſe parallelam horizonti, & ex illo puncto quod centrum grauitatis dicitur, pendere immotam; non quod id ſit neceſſarium, ſed quod id ſufficiat. Similiter Archimedes, vt ex libello de parabolæ quadratura liquet, libram ſemper horizonti parallelam conſtituit; ſed id, vt reor, non fit niſi iuuandæ phantaſiæ cauſa; nam iuxta libræ iſtius principia, ſi pondera vtrinque liberè pendeant, quamuis libra ſit ad horizontem inclinata, perinde tamen manere debet in eo ſitu magnitudo compoſita ex vtraque illa quam libra ſuſtinet. Fortaſſe linea illa recta connectens perſpecto modo vtramque illam magnitudinis compoſitæ partem non appellabitur libra, niſi quando fuerit horizonti parallela; ſed iſtud eſt quæſtio de nomine nihili pendenda, dummodo conſtet magnitudinem ex illo puncto ſuſpenſam manere immotam quicumque illi ſitus circa illud punctum, vnde liberè pendet, deſignetur. Nos tamen in ſcribendis quæ conſequuntur, illum ſæpe modum loquendi & cogitandi vſurpabimus, vt quam minimè recedamus ab Antiquiorum loquendi etiam modo. Ergo &c. quod erat nobis conſtitutum.

COROLLARIVM.

De Archimedea libra ita, vt patet, loquimur, quaſi aliam diſtinguamus diuerſam; id verò perſpicuum erit ex demonſtrandis de libra curua, è

qua suspensæ magnitudines in idem omninò punctum vergere ponuntur: at in Archimedea lineæ ῥοπικαὶ intelligi debent parallelæ, & nunquam conuenientes; & si intelligantur in vnum concurrere peruertitur natura illius. Qui autem in Machinarum vsu, libram vulgarem quasi Archimedeæ proprietates haberet vsurpant, ij res valde discrepantes confundunt; in praxi tamen & calculo nullus error notabilis percipitur, quamdiu lineæ in centrum vergentes habebuntur sensuum iudicio pro parallelis; sicuti nullus alicuius momenti error accidit, quòd radij solares ponantur paralleli dum in parabolicum speculum è terra oppositum incidunt. Peccant itaque qui libræ illi curuæ (quæ sola in vsum hominum cadit) proprietates Archimedeæ & rectæ attribuunt, longè enim diuersas, vt postea patebit, obtinent; hosque crediderim notari apud Gregorium à S. Vincentio in in libri, de parabola, propositione 124.

SCHOLIVM.

Vt demonstremus Theorema illud quod tanti momenti est in librandis magnitudinibus, & quod Archimedes adhibet in propositione sexta quadraturæ paraboles, vnumquodque suspensorum ex quo puncto constitutum est, manet; cùm in lineâ perpendiculari fuerit punctum suspensionis & centrum grauitatis suspensi, *præmittendæ nobis sunt nonnullæ propositiones; demonstratio enim illius, vbi extet ignoro.*

PROPOSITIO V.

CVM in plano grauitate destituto, finito, parallelo horizonti, & per centrum planæ magnitudinis ipsi cohærentis ducto, ipsa magnitudo manserit suspensa; & cum per idem centrum ducta fuerit in eodem plano recta sustinens magnitudinem cohærentem; si eiusmodi recta ex solo centro grauitatis suspendatur, nec ipsa, nec magnitudo ipsi cohærens mutabunt situm.

Sit (*Fig.* 83.) planum h g m finitum, grauitate destitutum, & horizonti parallelum; in eo verò sit magnitudo plana b a e d f c ipsi cohærens, eiusque centrum grauitatis sit g, per quod in eodem plano ducta sit vtcunque recta i g l. Dico si recta i g l ex solo puncto g suspendatur, nec ipsam, nec magnitudinem ipsi cohærentem mutatum ire situm.

Quoniam enim magnitudinis b a e d f c centrum grauitatis est g, & planum h g m, in quo ipsa est, habet situm horizonti parallelum, si planum sustinens magnitudinem cohærentem suspendatur ex puncto g solo, manebit vt iacet per definionem centri grauitatis suprà traditam. Rursus quoniam recta i l diuidit magnitudinem planam in duas partes (si enim non diuideret illam, tota magnitudo existeret ad easdem lineæ i l partes, ac proinde ad illas deprimeretur, quod non ponimus) i a l u f h & i b c h u l e d, eæ sibi inuicem æquiponderabunt, positæ vt iacent; si enim positæ vt iacent non æquiponderarent sibi, inclinatio plani fieret ad partes

grauioris, quod est contra definitionem centri grauitatis; ergo cùm partes i a l u f h & i b c h u l e d sibi inuicē vt iacent æquiponderent, si linea i l suspendatur ex g tantùm, non fiet inclinatio ad partes m vel a, ex hypothesi quòd linea i l maneat horizonti parallela. Ipsam autem i l mansuram horizonti parellelam ostenditur eodem ferme pacto. Si enim fieri potest, ad alterutras partes i inclinetur, & ex g ad rectam i l excitetur perpendicularis n o p; secans magnitudinem in duas partes æquè vt iacent ponderantes b c o p, o p a e d f: cùm ergo duæ illæ partes sibi inuicem æquiponderent, magnitudo non inclinabitur ad partes i; ergo neque recta i g inclinabitur ad partes i. Tota igitur magnitudo plana b a e d f c lineâ i g l horizonti parellelâ sustentatâ, & ex solo puncto g suspensâ) non mutabit situm; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, si planum i g m statuatur rectum ad horizontem, ita vt recta p g sit perpendicularis ad eundem horizontem, & consequenter recta i l parallela eidem horizonti, rectam i l ex solo puncto g suspensam & sustinentem graue b a e d f c non mutaturam situm; partes enim b c o p, o p a e d f in situ quem habent permanentes æquiponderabunt sibi inuicem vt ostensum fuit; non ergo fiet inclinatio rectæ i l ad alterutras partes i vel l. Quòd autem recta i l sustinens magnitudinem b a e d f c habeat partem i a l u f ex superiori parte prementem incumbendo deorsum, id perinde est atque si ex inferiore pendendo traheret deorsum, vt apertum est.

PROPOSITIO VI.

CVM plano finito, non graui, parallelo horizonti, & per grauitatis centrum solidæ magnitudinis ipsi cohærentis ducto, magnitudo solida manserit suspensa, & cum per centrum ductum fuerit aliud planum finitum & grauitate carens quod sit ad horizontem rectum, seceťque magnitudinem, atque eam sibi connectat; si omnes aliæ solidi suspensiones soluantur, & illæ solæ retineantur per quas mediante plano recto suspenditur ex rectâ quæ est communis sectio vtriusque plani; ista verò recta ex solo puncto in quo est centrum grauitatis suspendatur; nec ipsa, nec solidum ab ipsâ sustentatum mutabunt positionem.

Sit retentâ figurâ prioris propositionis (*Fig.* 83.) solidi finiti centrum grauitatis g, & per illud ductum sit planum h g m, in quo b a e d f c sit communis sectio plani h g m & solidi. Ad planum h g m erectum sit planum perpendiculariter cadens, transiens per g, & secans magnitudinem solidam, eamque sibi connectens; communis

autem sectio vtriusque plani finiti & grauitate spoliati sit recta i l.

Ostendendum est si recta i l toti solido mediante plano ad horizontem recto cohærens, ipsum solidum sustineat suspensa ex solo puncto g; ipsam i g, ipsumque solidum retentura esse priorem situm.

Quoniam enim magnitudinis solidæ centrum grauitatis est g, & planum h g m finitum & grauitate carens cohæret ipsi magnitudini, si ex solo puncto g planum h g m suspendatur, seruabit tam ipsum quàm magnitudo cohærens priorem situm per definitionem centri grauitatis traditam in quarta propositione. Rursus quoniam planum per i l ductum perpendiculariter ad horizontem diuidit magnitudinem solidam in duas partes, quarum vnius communis sectio cum plano est i a l u f h; alterius, i b c h u l e d, eæ positæ vt iacent sibi inuicem æquiponderabunt; si enim positæ vt iacent non æquiponderarent sibi, inclinatio plani paralleli fieret ad partes grauioris, quod est contra definitionem centri grauitatis: ergo cùm partes, quarum communis cum plano parallelo sectio est i a l u f h, i b c h u l e d, sibi inuicem æquiponderent; si linea i l suspendatur ex g tantùm, non fiet inclinatio ad partes m vel a, ex hypothesi quod linea i l maneat horizonti parallela. Ipsam autem i l mansuram esse horizonti parallelam ostendemus eodem planè modo. Si enim fieri potest ad partes i alterutras inclinetur, & ex g ad rectam i l excitetur perpendicularis n o p, & per rectam n o p ducatur grauitate carens planum erectum orthogonaliter ad horizontem, illud secabit magnitudinem solidam in duas partes, easque æquiponderantes inuicem, quarum communis sectio cum plano parallelo erit b p o c, o p a e d f: ergo si plano h g m parallelo intelligatur vt priùs cohærere solida magnitudo, inclinabitur superficies ad partes i ad quas solidi portio grauior iacet; quod est contra definitionem centri grauitatis. Tota igitur magnitudo solida linea i g l horizonti parallelâ sustentata, & ex solo puncto g suspensa non mutabit situm, ipsaque etiam i l manebit vt iacet horizonti parallela, quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VII.

CVm planum aliquod super horizonte erectum perpendiculariter, finitum, & grauitate destitutum per alicuius magnitudinis centrum grauitatis transiens ipsi cohæserit magnitudini, existens in eodem cum ipsâ plano, si quidem ipsa sit plana; vel, si solida extiterit, ipsam secans, perque centrum ducta in eodem plano recta horizonti parallela fuerit; si huiusmodi recta ex solo centro suspendatur, nec ipsa nec graue mutabunt situm.

Ista propositio est quasi porisma præcedentium duarum: nam si magnitudo fuerit plana, redit casus primæ propositionis; sin fuerit solida, casus secundæ statim se se offert, si per rectam ductam agi intelligatur

planum erectum perpendiculariter ad prius planum; ipsumque planum erectum sit finitum, & grauitate nudatum, ponaturque cohærere solidæ magnitudini & illam sustinere. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

CVm planum super horizonte perpendiculariter erectum, finitum, & non graue transierit per magnitudinis alicuius centrum grauitatis, eique magnitudini cohæserit; & cum in illo ducta fuerit quæuis recta horizonti parallela, non transiens per grauitatis centrum; ex isto autem centro demissa fuerit perpendicularis linea ad ipsam parallelam; si ex puncto in quo istæ duæ rectæ sese secuerint suspendatur eiusmodi parallela totam magnitudinem mediante plano erecto sustinens, nec recta, nec magnitudo mutabunt situm.

Planum i u l (*Fig.* 84.) super horizonte perpendiculariter erectum, finitum, & non graue, transeat per g centrum magnitudinis planæ b c d, aut solidæ cuius b c d sit cum plano communis sectio; ipsi verò magnitudini cohæreat planum i u l. Quælibet recta a b horizonti parallela ita ducta sit in plano i u l vt non transeat per e; ex e ad rectã a b demissa sit perpendicularis e f occurrens rectæ a b in f. Dico si ex solo puncto f suspendatur recta a b sustinens mediante plano i u l magnitudinem cuius centrum grauitatis est e, nec rectam, ipsam a b, nec ipsam magnitudinem mutatum ire positionem.

In plano i u l ducatur per e recta h e g parallela horizonti: ergo per præcedentem si linea h g sustinens magnitudinem suspendatur ex e, nec linea, nec ipsa magnitudo mutabunt situm; ergo cùm recta a b sit parallela ipsi h g, ipsa quoque a b manebit parallela horizonti, ipsaque f e ad ipsum perpendicularis. Cùm ergo ex puncto e suspensa linea h g totaque magnitudo non mutet situm; & punctum e suspensum ex puncto f per lineam f e ad horizontem perpendicularem non mutet situm (si enim mutaret ascenderet, quod est contra naturam grauis) tota magnitudo ex f puncto fixo suspensa, totumque planum i u l, ac proinde recta a b situm suum retinebunt, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO IX.

SIt (*Fig.* 85.) magnitudo cuius centrum grauitatis e, vt in præcedenti; atque per e ductum sit planum finitum, grauitate carens, ad horizontem perpendiculare, & ipsi magnitudini cohærens; sit autem, vt in eadem præcedenti, f communis sectio rectæ a in b eodem plano ductæ horizonti æquidistanter, punctumque idem sit communis sectio rectæ a b, & perpendicularis e f ad ipsam a b demissæ ex centro e. Rursus sit libra h m u parallela horizonti, cui alligata sit in h & g recta a b sustinens mediante plano magnitudinem

cuius centrum est e (in hac figurâ maioris lucis causâ rectam h u posuimus extra rectam a b; concipi tamen ita debent vt punctum h puncto a congruat, punctumque g puncto b, punctumque f puncto i) ipsa autem libra suspensa intelligatur ex puncto m, vt ipsum m vel congruat puncto g, vel iaceat inter g & u; vnde intelligatur pendere magnitudo l; & æquiponderare magnitudini, cuius centrum e, manenti vt iacet suspensæ.

Ostendendum est si magnitudo eadem alligetur ex puncto i, & duæ priores suspensiones in a & b factæ soluantur, æquilibrium permansurum esse.

Quoniam enim magnitudo, cuius centrum e, suspensa ex f, manet in eodem situ, & recta a b horizonti parallela per præcedentem propositionem: ergo cum f & i sibi congruant, item a & h, itemq; b & g, recta a b manebit vt iacet intra rectam g h, suspensa ex puncto i: sed eadem grauitas, quamdiu in eodem situ manet sustentata à librâ, æquè illam premit deorsum (cùm enim eadem sit grauitas, & eadem grauitas non fiat magis vel minus ponderans nisi quia situm quem ad libram habebat mutauit, manebit immutato situ æquè ponderans) ergo libræ æquilibrium non mutabitur suspensione magnitudinis ex solo puncto i factâ; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Istud est theorema quod in prop. 4. proposuimus ex Archimede desumptum, quodque demonstrandum susceperamus, cùm Archimedis demonstratio non extet, quod sciam. Commandinus quidem vir alioqui harum disciplinarum peritissimus commentariis in propositionem sextam de quadratura parabolæ, conatur illud demonstrare; sed præterquam quòd eius demonstratio non est de omnibus magnitudinibus tam planis quàm solidis; vitio, quod petitionem principij appellant, laborat, vt propiùs inspicienti apertum erit.

COROLLARIVM II.

Cum libra extiterit in plano finito, non graui, recto ad horizontem, & transeunte per grauitatis centrum magnitudinis alicuius ipsi cohærentis; & cùm eiusmodi magnitudo ex vnius brachij duobus punctis suspensa fuerit, per puncta plani ipsis intima libram perinde grauabit, atque si pondus ei æquale suspenderetur ex sola puncto in quod perpendicularis ex centro in libram, vel in lineam plani libræ congruentem, penderet. Istud theorema apertè eruitur ex præsenti propositione.

PROPOSITIO X.

SI recta connectat duarum magnitudinum centra grauitatis, & illas è solis centris pendentes sustineat; compositæ ex vtraque magnitudinis centrum grauitatis est in iam dictâ lineâ.

Sint a & b (*Fig.* 86.) centra grauitatis duarum magnitudinum; recta a b connectat centra, & solis punctis a, b sustineat magnitudines. Dico centrum grauitatis compositæ ex vtraque magnitudinis esse in rectâ a b.

Sint primò magnitudines planæ c f e d, g h i u; & in eodem plano quod horizonti parallelum fiat, existant. Si fieri potest, sit grauitatis centrum extra lineam a b in puncto l eiusdem plani; per l agatur m n parallela rectæ a b. Quoniam magnitudinis planæ centrum grauitatis ponitur esse punctum l, partes magnitudinis compositæ in quas diuiditur per rectam m n erunt æquiponderantes vt iacent, alioqui fieret inclinatio ad partem præponderantem, quod est contra definitionem centri grauitatis traditam in prima propositione. Magnitudinem autem compositam diuidi in duas partes æquiponderantes vt iacent est absurdum. Cùm enim recta a b transeat per centra singularum magnitudinum, eas diuidet in duas portiones æquè, vt iacent, ponderantes: ergo duæ c d o p, g h r q æquiponderabunt, vt iacent, duabus o e f p, r q u i, vt iacent, permanentibus: ergo si duabus c p o d, h r q g addatur ea pars magnitudinis quæ est inter parallelas a b, m n, & si eadem dematur ex magnitudinibus p f o e, r i u q: quod supererit non erit vt iacet æquiponderans, illi quod ex illâ additione conficietur vt iacet permanenti; & tamen ostensum est esse æquiponderans: erit ergo, & non erit, quod est impossibile. Non ergo centrum grauitatis est extra lineam a b, si magnitudines sint planæ & in eodem plano existentes.

Quod si magnitudines sint solidæ, sit earum cum plano horizonti parallelo finito, non graui, & ducto per centra a, b, l communi sectio c d e f, g h i u: si ergo per rectas a b, m n ducantur plana duo inuicem parallela, ostendentur partes per plana diuisæ eodem prorsus absurdo sibi æquiponderare, & non æquiponderare, quo ostensum est in priori casu de partibus planæ magnitudinis per lineas a b, mn factis: non ergo centrum grauitatis est extra lineam a b, si magnitudines sint solidæ. Si igitur recta &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XI.

SI linea recta connectat duas magnitudines, transeatque per earum grauitatis centra, ipsisque magnitudinibus cohæreat, centrum grauitatis compositæ ex vtraque magnitudine est in lineâ cõnectẽte.

Ista propositio sequitur apertè ex præcedentibus: cùm enim magnitudines illæ perinde premant lineam connectentem centra grauitatis, atque si ipsæ penderent ex solis grauitatis centris; & cùm centrum grauitatis magnitudinis compositæ ex duabus, quando duæ illæ pendent ex solis centris grauitatis, sit in lineâ connectente eiusmodi centra; patet centrum grauitatis de quo agit præsens propositio esse in lineâ illâ connectente centra grauitatis, & ipsis magnitudinibus cohærente, quod erat demonstrandum.

COROL.

COROLLARIVM.

Propositionem istam vt à se antè demonstratam, προδεδειγμένην, adhibet Archimedes libri primi de æquiponderantibus propositione quæ in editis latinè codicibus numeratur quarta, in græcis secunda. Cùm autem eiusmodi propositio in antecedentibus non reperiatur, cúmque etiam definitiones centri grauitatis desint, suspicio non leuis est eiusmodi librum non haberi nisi mutilatum; quapropter adducor vt credam in illis quæ perierunt, esse propositionem illam quam corollario primo nonæ desiderauimus.

PROPOSITIO XII.

Proponuntur dubia aduersus postulata ab Archimede.

Quod Geminus apud Eutocium ait, propositiones quæ ob perspicuitatem inter *axiomata* iure debeant numerari, ab Archimede appellari *postulata*, licet in earum quibusdam apertum sit, in aliis tamen non satis liquet; imo nec apparet quo pacto absque vllo veritatis præiudicio admitti possint.

Primò etenim assumit planas figuras esse grauitate præditas, alterique æquiponderare spatio, vt inde demonstret veram illarum aream. Atqui plana figura, cùm non sit corpus sed superficies, non facilè à Physico concedetur habere quicquam ponderis. Cùm enim iuxta eos qui superficies corpori inserunt, eæ sint numero infinitæ, possintque esse æquales (vt in quouis cylindro, cubo, & parallelepipedo) euidens est, si singulæ superficies essent certæ cuiusdam grauitatis, omnes simul conflaturas esse pondus verè immensum, quod est absurdum, & contra experientiam. Non igitur verum est figuras planas esse grauitate præditas.

Secundò assumit lineas per quas grauia ex librâ (quam rectam esse posuit, & horizonti parallelam vt ex sexta de quadratura paraboles constat) liberè pendent, esse inuicem parallelas, & ad ipsam perpendiculares. Hoc autem sapit errorem Xenophanis Colophonij qui vt Aristoteles testatur libro 2. de cœlo cap. 13. terram commentus est fundamentis suis peruadere quidquid sub ipsâ spatij animo concipi potest. Ex quo conficitur motus grauium deorsum tendentium parallelos esse inter se & ad horizontem perpendiculares. Sed istud reiiciunt omnes, iamque diu Aristoteles cap. 14. libri citati pronuntiauit grauia non ferri deorsum per lineas parallelas, sed per lineas ad vnum totius mundi centrum coëuntes. Quin & ipse Archimedes libro primo de iis quæ vehuntur super aquam ex hoc ipso principio illorum librorum demonstrationem pendere voluit. Cur ergo quod verum esse nouerat, noluit admittere in isto de æquiponderantibus tractatu, maluitque vsurpare id quod aperte falsum est? quo autem modo istud non obstat veritati & certitudini consequentium demonstrationum?

Tertiò Archimedes in 7. 9. 11. aliisque propositionibus quadraturæ paraboles, assumit lineas quibus è librâ pendent figuræ, nullius esse ponde-

ris; & figuram spatiumve eiusdem semper esse grauitatis siue breuiore siue longiore lineâ pendeat, dummodo cætera non mutentur. Istud quidem non tam difficile creditu apparet: sed tamen, cùm non probetur, iure meritò inter *petitiones* computatur; præterquàm quod non consequenter philosophari videtur, dum ipsam superficiem grauitate præditam esse vult, non tamen lineam.

Quartò in quinto postulato figuras inter se componit κατ' ἐφάρμοσιν explicatam à nobis in paragrapho octauo prolegomenon tetragonismicorum pag. 66. qui quidem modus licet vsurpatus fuerit ab Euclide, nunc tamen vt ἀγεωμέτρητος passim reiicitur à doctis huius ætatis Geometris.

Quintò ponit vt datum si grauia ferantur lineis parallelis, magnitudinem finitam, siue sit simplex superficies plana, siue corpus; & siue sit composita ex pluribus planis superficiebus, siue ex pluribus corporibus, habere centrum grauitatis. Vnde verò is qui se (vt Orator alicubi dixit) profitetur non persuadere, sed cogere, probat eiusmodi punctum dari in ea hypothesi quæ non est, sed mente tantùm fingitur esse; præcipuè cùm in eâ quæ est, non omnis magnitudo habeat grauitatis centrum, provt demonstrabitur in sequentibus?

Sextò insuper ex doctrina illa conficitur spatium finitum è libræ brachio vno suspensum æquiponderare posse spatio immenso ex altera parte libræ certa quadam ratione suspenso; quod videtur absurdum, quia inter finitum & infinitum non datur proportio; daretur autem si æquiponderarent sibi mutuo: nam vt brachium libræ ad longitudinem vnde pendet aliquod pondus, ita vicissim ipsum pondus ad æquiponderans. Pondus autem finitum posse ex istis principiis æquiponderare immenso, iam concessimus in secundæ appendicis adiectæ ad libros tetragonismicos pagina sexta.

Vnde etiam oritur aliud dubium contra postulatum quartum & consequentia reliqua; in illis enim assumi videtur non dari centrum grauitatis nisi in figura, quod nomen sonat spatium vndique comprehensum & terminatum; atqui centrum grauitatis competere etiam figuris quæ non vndecunque vallantur & circumscribuntur, ibidem astruimus.

Septimò denique illius causa inquirenda restat, cur ista quæ Archimedes de libra tradit, vt vera sint, adeò tamen difficilia comprobentur, vt pauci admodum sint qui illa intelligere possint? Nam geometrica esse captu facilia pronuntiauit Aristoteles, 6. Eth. cap. 8. cum ibi puerum posse fieri Mathematicum asseruerit, non autem sapientem, aut Physicum; sanctus quoque Thomas affirmauit 2. Metaph. lect. vltim. imaginatione potius quàm iudicio opus esse ad percipiendas has disciplinas. Ergo &c. quod erat propositum.

Ex his omnibus liquidò constat dubitationes istas aliqua solutione indigere, ne parum firmum & constans videatur tanti ingenij & vtilitatis

Opus. Vt autem plenè satisfaciamus, præmittenda duximus nonnulla de æquilibrio quod fit grauibus pendentibus per lineas non parallelas sed conuenientes in centrum mundi; quæ duo æquilibrij genera vulgò in vnum confunduntur, cùm longè diuersa sint, vt ex sequentibus patebit.

DEFINITIONES ET POSTVLATA.

Libram curuam appello peripheriæ concentrici mundo semicirculi portionem ex puncto aliquo inter eius extrema posito suspensam. Eam in æquilibrio esse dico quamdiu eius puncta omnia æqualibus radiis à centro mundi distant.

Postulo grauia in centrum mundi ferri. Item grauia æqualia vno sui tantùm puncto terminis peripheriarum æqualium alligata & liberè inde pendentia, nec vltra centrum porrecta æqualiter inter se ponderare, siue facere æquilibrium. *Maioris explicationis causâ addidi non debere vltra centrum porrigi: id enim satis intelligi poterat, cum id quod vltra porrigitur non pendeat sed potius pendentibus obstet.*

Item grauia æqualia peripheriis inæqualibus dicto modo suspensa non æqualiter ponderare; sed id quod in longiore peripheria pendet deorsum ferri.

Item si grauia secundum quandam distantiam libræ dicto modo (quem & notum seu cognitum & perspectum appellabimus) affixa æquiponderent, & alteri eorum apponatur graue aliquod, tunc ea non æquiponderare, seu non esse æquilibria; sed illud deorsum ferri cui adiectio facta fuerit.

Similiter etiam si ab altero eorum auferatur graue, tunc æquilibrium cessare, & id à quo nihil est ablatum ferri deorsum. In sequentibus propositionibus pro eodem habeo distantias, peripherias, & angulos ad lationis centrum constitutos insistentesque ad eiusmodi peripherias.

PROPOSITIO XIII.

Grauia quæ in distantiis æqualibus posita æqualiter ponderant æqualia sunt.

Si enim essent inæqualia, auferreturque à maiori excessus, reliqua non æqualiter ponderarent; cùm ab altero æquiponderantium aliquid fuerit ablatum: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIV.

Grauia in distantiis seu peripheriis æqualibus posita, si fuerint inæqualia non æquiponderabunt, sed maius eorum inclinabitur.

Ablato enim excessu æquiponderabunt; cùm æqualia in distantiis posita æqualibus æquiponderent; eo autem quod ablatum fuerit adiecto, inclinatio libræ fiet ad partes eius cui facta est accessio: ergo &c. quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Has duas propositiones Eutocius inter petitiones aut corollaria ex petitionibus deducta numerat; quapropter illi prima est quæ hic & in vulgatis latinè codicibus est est tertiâ, quæ numerorum discrepantia in cæteris deinceps reperitur.

PROPOSITIO XV.

SI grauia inæqualia in distantiis inæqualibus suspensa æqualiter ponderent: maius in minori, minus in maiori distantia suspendetur.

Sint (*Fig* 87.) grauia inæqualia a, b, quorum a sit maius, b minus, centrum lationis d, & descripta ex centro d sermicirculi portio a c b intelligatur suspendi ex c; grauia autem a & b noto modo ex a & b pendentia sibi inuicem æquiponderent.

Ostendendum est peripheriam a c esse maiorem peripheria b c.

Si enim distantia a c non est minor distantia c b: ablato excessu quo grauitas a excedit grauitatem b, cùm iam ab altero æquiponderantium (ab ipso videlicet a) ablatum sit aliquid, inclinabitur ad b; quod non est verum. Nam cùm a c distantia ponatur non esse minor ipsa c b, erit vel æqualis, vel minor: Si æqualis esset, magnitudines a & b suspensæ ex æqualibus interuallis c a, c b æquiponderarent: si autem a c esset maior, inclinatio fieret ad a; nam æqualia in distantiis inæqualibus non æquiponderant, sed quod in maiori distantia est inclinatur. Propter hæc igitur distantiam a c minorem ipsa b c esse necessarium est, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Ex his manifestum est ipsas a c, c b distantias non tam poni quàm probari esse inæquales. Præterea manifestum est grauia quæ in distantiis inæqualibus æquiponderant inæqualia esse; eorumque maius illud esse quod in minori distantia pendet.

PROPOSITIO XVI.

SIt planum fixum transiens per centrum mundi d (*Fig.* 87.) & in eo sit descripta semicirculi mundo concentrici portio a c b, bifariam in c secta; ex duobus extremis a, b alligata noto modo pendeant æqualia inuicem grauia a, b.

Ostendendum est si peripheria a c b ex solo puncto c sustineatur, & liberè pendeat; esse vt antea iacebat, ac proinde ex illis compositam magnitudinem a b in situ priore perseueraturam esse.

Quoniam enim peripheria a c b est mundo concentrica minorque semicirculo, potest intelligi esse libra ex c suspensa; & quoniam interualla

ca, cb ſunt vtrinque æqualia, ipſáque grauia a, b ex æqualibus interuallis ſuſpenſa noto modo pendent, libra a c b in æquilibrio manebit; ac proinde in eodem ſitu immota perſeuerabit, nec inclinabitur ad alterutram partium; ſed quælibet eius puncta æqualiter diſtabunt à centro d: ipſa igitur pondera manebunt vt priùs æquè à centro diſſita; quod tantùm ſignificare volumus, dum dicimus compoſitam magnitudinem a b in ſitu priore eſſe perſeueraturam; ergo &c. quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

Si quis præ oculis habuerit librum primum æquiponderantium ab Archimede ſcriptum, deprehenderit nos veſtigiis ipſius inſiſtentes ad hanc vſque propoſitionem idipſum de curuâ librâ demonſtraſſe, ex ſimilibuſque principiis, quod ille de rectâ oſtendit. In hac tamen propoſitione animaduerterit nos ab ipſo aliquatenus deficere; quatenus videlicet centri grauitatis nullam mentionem facimus; nec, vt ille fecit, oſtendimus punctum c eſſe centrum grauitatis magnitudinis ex a, b compoſitæ. Ex quo fit vt noſtra demonſtratio non tam latè pateat, atque Archimedea.

PROPOSITIO XVII.

Sit vt in præcedente (*Fig.* 87.) planum fixum tranſiens per centrum mundi d, & in eo ſit deſcripta ſemicirculi mundo concentrici portio a c b, bifariam in c ſecta; ex tribus punctis a, c, b alligata noto modo pendeant æqualia inuicem grauia a, b, c. Si peripheria a c b ex ſolo puncto c ſuſtineatur & liberè pendeat, dico ipſam eſſe manſuram vt antea iacebat; ac proinde ex illis compoſitam magnitudinem a c b in ſitu priore eſſe perſeueraturam.

Quoniam enim peripheria a c b eſt mundo concentrica, minorque ſemicirculo, poteſt vices libræ ex c ſuſpenſæ gerere; & quoniam interualla a c, c b ſunt æqualia ipſáque a, b grauia æqualia; ſi libra a c b ex ſolo puncto c teneatur ſuſpenſa, ipſa vt iacet manebit, per præcedentem; ſed etiam ipſa magnitudo c manebit vt prius iacebat, cùm ex eodem puncto c pendere ponatur, eodemque prorſus modo: tam ergo libra a c b poſitionem priorem retinebit quàm ipſæ magnitudines a, c, b, quod tantùm ſignificare volumus, dum dicimus compoſitam magnitudinem a c b in ſitu priore debere perſiſtere: ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Hinc iſtud manifeſtum eſt. Si quotcunque magnitudines numero impares in peripheria a c b ita collocentur, vt cæterarum duæ quæque, quæ hinc inde pari numero computantur, ſint inuicem æquales; ſuſpenſionis verò puncta occupent æqualiter diſſita ab eo, vnde illa, quæ media eſt, ſuſpenditur; & ſi peripheria ex puncto magnitudinis mediæ ſolo ſuſtineatur, liberéque pendeat; ipſa manebit vt antea ſe habebat; ac proinde ex

illis omnibus composita magnitudo in situ priore perseuerabit.

COROLLARIVM II.

Quod si pares numero fuerint magnitudines in peripheria a c b ita collocatæ, vt duæ extremæ grauitate æquali prædıtæ sint, & quæque duæ hinc inde pari numero ab extremis computatæ æquales item sint, earumque puncta suspensionis æqualiter dissita à suspensione extremarum; si ipsa peripheria bifariam secetur, & ex puncto bisectionis solo sustineatur, pendeatque liberè, ipsa manebit in positione priore, ac proinde ex illis omnibus composita magnitudo in situ priore perseuerabit.

Hæc etiam propositio non tam latè patet quàm quæ illi quinta respondet in libro primo æquiponderantium ab Archimede scripto.

PROPOSITIO XVIII.

MAgnitudines grauitate commensurabiles sibi æquiponderant, si noto modo pendeant in distantiis quæ reciprocè se habeant vt ipsæ magnitudines. Vel, magnitudines grauitate commensurabiles æquiponderabunt, si fuerint constitutæ in distantiis subtendentibus angulos in ratione grauitatum subcontrariè sumptos.

Sint (*Fig.* 88.) grauitate commensurabiles a, b, sitque earum maior a; sit præterea e d peripheria semicirculo minor, & mundo concentrica, sitque sicut a magnitudo ad magnitudinem b, ita arcus d c ad arcum c e. Ostendendum itaque est si magnitudo a vel alia illi in grauitate æqualis noto modo alligetur & liberè pendeat ex e; magnitudo verò b vel alia illi in grauitate æqualis similiter pendeat ex d; libráque ex solo puncto c sustineatur suspensa; committi æquilibrium, & ipsas magnitudines a & b, vel illis in grauitate æquales ita suspensas, æquiponderare sibi inuicem.

Quoniam itaque sicut magnitudo a ad b magnitudinem, ita arcus d c ad c e; magnitudo verò a est ipsi b commensurabilis; arcus d c est ipsi c e commensurabilis; quare arcuum e c, c d erit quædam communis mensura; ea verò sit n. Fiant arcus d g, d u singuli æquales arcui e c; ipsi autem d c esto e l æqualis.

Quoniam igitur ex arcu c d maiori abscissus est d g æqualis minori e c; si residuo c g addantur æquales e c, g d, compositi arcus c d, g e erunt æquales; sed arcus l e est æqualis ex constructione arcui c d: ergo arcus l e, e g sunt æquales; & l g est duplus ipsius d c, sicuti & g u est ex constructione duplus ipsius c e; quare arcus n, vtrumque l g, g u metietur; cùm eorum medietates metiatur.

Rursus quoniam sicut magnitudo a ad b, ita arcus d c ad c e; sicut autem d c ad c e, sic l g ad g u (nam vterque vtriusque duplus existit) igitur sicut magnitudo a ad b, ita arcus l g ad g u. Quotuplex autem est arcus l g ipsius n, eo sit numero multiplex magnitudo a magnitudinis f:

erit ergo ſicut arcus l g ad n, ita magnitudo a ad f: eſt autem ſicut arcus u g ad l g, ita magnitudo b ad a: ex æquo igitur ſicut arcus u g ad arcum n, ita eſt magnitudo b ad magnitudinem f: tam multiplex igitur eſt arcus u g arcûs n; quàm multiplex eſt magnitudo b magnitudinis f; ſed & ipſam quoque magnitudinem a eſſe multiplicem magnitudinis f ſupra oſtenſum eſt; quare magnitudo f erit magnitudinum a & b communis menſura.

Diuiſo igitur arcu l g in peripherias æquales ipſi n; quoniam arcui c e æqualis eſt ex conſtructione arcus d u, & arcui c d æqualem eſſe arcum e l oſtenſum eſt; arcus l c, c u erunt æquales: tot ergo erunt peripheriæ portiones in arcu l c, quot in arcu c u; & tot in arcu c e quot in arcu d u; & tot in arcu l e quot in arcu e g, cùm oſtenſum ſit rectas l e, e g eſſe æquales.

Quapropter ſi vnicuique partium arcûs l g apponatur magnitudo æqualis ipſi f, quæ punctum ſuſpenſionis noto modo factæ habeat in medio portionis periphericæ, compoſita ex omnibus magnitudinibus erit æqualis magnitudini a; punctum verò e erit per præcedentem illud ex quo peripheria l g dictas magnitudines connectens, ſuſpenſa liberéque pendens manebit vt iacet cum ipſis magnitudinibus: nam omnia puncta ſuſpenſionis numero paria ſunt, cùm ipſa l e ipſi e g æqualis ſit. Similiter ſi vnicuique partium arcûs u g apponatur magnitudo æqualis ipſi f, habeatque punctum ſuſpenſionis in medio ipſius partis, compoſita ex omnibus magnitudinibus erit æqualis magnitudini b: punctum verò d erit per præcedentem illud ex quo peripheria u g quæ dictas magnitudines ſuſtinet, ſuſpenſa liberéque pendens manebit vt iacet, cùm ipſis magnitudinibus. Magnitudo igitur a vel illi æqualis in grauitate, liberè pendet ex e; & magnitudo b vel illi æqualis in grauitate, pendet liberè ex d.

Rurſus cùm magnitudines inter ſe æquales in peripheria l u ita ſint collocatæ, vt puncta ex quibus liberè pendent, inter ſe æqualiter diſtent iuxta præſcriptum præcedentis propoſitionis, & cùm ſint numero pares; ſi tota peripheria l u omnes illas magnitudines ſuſtineat & ſuſpendatur ex puncto medio c; ipſa manebit vt iacet, cum ſuis magnitudinibus, per præcedentem. Sunt enim l c, c u æquales; cùm l e ſit æqualis ipſi c d, & ipſa e c ipſi d u: ergo tota l c eſt æqualis toti c u.

Intelligatur intra peripheriam l u alia poſita prorſus ipſi congruens, & ex vnico puncto alterius, quod ipſi e congruit, ſuſpendi tota peripheria l g, diuiſa in g à peripheriâ g u quæ vt iam diximus manebit, vt iacet, ſuſpenſa. Similiter ex puncto vnico eiuſdem peripheriæ priori ſuperadiectæ, quod ipſi d congruit, intelligatur ſuſpendi tota peripheria g u non ampliùs cohærens peripheriæ l g; manebit, vt diximus, ſuſpenſa in eodem ſitu, in quo erat ante diuiſionem. Si igitur tota peripheria ſuperadiecta ſuſpendatur ex vnico puncto, quod ipſi c congruit, manebit in eodem ſitu, in quo prior l u, antequam in g diuideretur; & omnes magni-

tudines sustinebit ex punctis e, d suspensas, quarum illa, quæ ex e pendet, est æqualis in grauitate ipsi a; illa verò, quæ ex d pendet, est æqualis ipsi b: quapropter idem æquilibrium eueniet si graue a ex puncto e, & graue b ex puncto d pendere intelligatur: ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

IDipsum ostendendum est etiamsi magnitudines non sint grauitate commensurabiles.

Sint (*Fig.* 89.) grauitate incommensurabiles magnitudines a h b & c; præterea d f peripheria semicirculo minor, & mundo concentrica ita in e sit secta, vt sicut e d ad e f, ita sit magnitudo a h b ad magnitudinem c. Ostendendum itaque est si magnitudo a h b suspendatur noto modo ex f, magnitudo verò c ex d similiter pendeat; libráque ex solo puncto e teneatur suspensa, committi æquilibrium, & ipsas æquiponderare sibi inuicem magnitudines. Si enim non æquiponderant ad earum alterutram inclinatio libræ fiet: ea sit a h b; poterit ergo ex magnitudine a h b auferri magnitudo quædam b, ita vt reliquum a h sit commensuratum ipsi c, & adhuc præponderans ipsi c (hoc enim fieri potest vt mox ostendemus.) Atqui istud est absurdum; nam si vt magnitudo c ad magnitudinem a h, ita fiat arcus e f ad arcum e g; quoniam vt a h magnitudo ad c, ita est arcus e g ad e f; & vt arcus e f ad e d, ita est magnitudo c ad a h b: ergo ex æquo vt magnitudo a h ad a h b magnitudinem, ita arcus e g ad arcum e d: sed magnitudo a h est minor magnitudine a h b; ergo arcus e g est minor arcu ed. Præterea quoniam a h & c sunt commensurabiles, & vt a h ad c, ita est g e ad e f; si c suspendatur noto modo ex g, & a h ex f, fiet æquilibrium per præcedentem, librâ ex e suspensâ; ergo si librâ ex e suspensâ cæterisque in eodem statu permanentibus, magnitudo c intelligatur pendere ex d, cùm e d ostensa sit esse longitudo maior quàm e g, inclinatio fiet ad d: nam si duo grauia sibi æquiponderent, & eorum vnum ex longiori interuallo pendere intelligatur, inclinatio fiet ad illud quod longius remotum fuit vt ex terminis est euidens. Hoc autem fieri nequit, cùm aliunde ponamus inclinationem fieri ad f, pendentibus c & a h ex d & f punctis, & libra ex e suspensa; ergo magnitudines a h b & c ex f & d suspensæ sibi æquiponderant inuicem, quod erat ostendendum.

Quod autem ex magnitudine a h b possit auferri magnitudo quædam b, ita vt reliquum a h sit commensurabile ipsi c, & adhuc ipsi c præponderans, ita ostenditur. Quoniam magnitudo a h b præponderat magnitudini c, poterit ex a h b auferri quædam magnitudo ita vt residua æquiponderet ipsi c: ablata ergo sit h b, residuáque a ex f pendens æquiponderet ipsi c. Præterea potest sumi aliqua magnitudo minor ipsa h b, quæ sit pars magnitudinis c, & quæ toties sibi ipsi coaceruetur vt conflętur magnitudo a h maior quidem magnitudine a, minor verò magnitudine a h b.

h b. Eiusmodi magnitudo sit i; istud autem posse fieri constat ex iis quæ Commandinus demonstrat ad decimam sextam quadraturæ paraboles, & ad sextam de spiralibus. Quoniam ergo magnitudo a æquiponderat ipsi c; & magnitudini a adiecta est magnitudo h; ipsa a h præponderabit magnitudini c; & erit ipsi c commensurabilis, quod ostendendum erat esse possibile. Hoc ita demonstrato incidimus longo pòst tempore in exercitationem sextam R. P. Caualerij, vbi propositione 34. summopere miratur aliud non omnino dissimile isti, quod & demonstrat, nempe *ex maiori duarum incommensurabilium magnitudinum quarumlibet posse ita auferri aliquam ipsi commensurabilem, vt residuum sit minus quacunque data.* Vnde in scholio eiusdem propositionis in hæc verba admirabundus prorumpit. *Hæc sunt Geometriæ admiranda, quæ etsi in infiniti abditis recessibus lateant, eiusdem tamen vim & efficaciam non effugiunt.* Plura posteriùs in propositione 28. 29. 30. 31. videbis quæ & paradoxa iudicentur & admirabilitatem suam deriuent ex iisdem illis infinitionis & innumerabilitatis penetralibus: vnde quoque prodierunt quæ in trigesima secunda sexti superioris libri habentur.

SCHOLIVM.

In vulgatis Græcè & Latinè codicibus æquiponderantium Archimedis mutila est demonstratio quæ præcedenti respondet, nec eam Eutocij commentarij restituunt: in iisdem autem codicibus mancum quoque illud est, Ostendendũ itaque est magnitudinis ex vtriusque a ex b compositæ grauitatis centrũ esse c punctum. *Pro quo reponi debent hæc.* Ostendendũ itaque est si magnitudinis a centrum grauitatis ponatur in e, & magnitudinis b centrum grauitatis constituatur in d, magnitudinis ex vtriusque a & b compositæ centrum grauitatis esse c punctum. *Simile quid addi debet illi, quæ præsenti propositioni respondet.*

Cæterùm duæ istæ propositiones nostræ non tam amplæ sunt quàm Archimedéæ illæ, quibus probatur non tantùm magnitudines ita suspensas inuicem æquiponderare; sed etiam punctum à quo libra suspensa tenetur esse grauitatis centrum compositæ ex vtraque magnitudinis; quod nostræ propositiones non demonstrant, quia nec posse in vniuersum demonstrari positis libræ curuæ principiis ostendemus propositione vigesima tertia.

PROPOSITIO XX.

PAulò aliter demonstrantur duæ propositiones præcedentes.

Sit (*Fig.* 90.) a c recta vel circuli peripheria secta in ęqualia in b, & in inęqualia in d; sit verò d c bifariam secta in e, factęque sint b d, a f ęquales, & f b secta bifariam in g. Dico vt b e ad b g, ita esse a d ad d c; & segmenta a g, g d esse ęqualia.

Quoniam b d, a f sunt ęquales, erunt residuę f b, d c ęquales; ergo d e erit semissis rectę vel peripherię f b: sed b d est semissis duarum a f, b d: ergo composita b e ex b d, d e, erit semissis compositę a d ex tribus a f,

f b, b d : ergo vt a d ad d c, ita b e semissis rectæ, vel peripheriæ ad ad e c semissem rectæ vel peripheriæ d c ; cùm ergo b f diuisa sit bifariam in g, erunt g b, d e æquales ; ergo addita communi b d erunt g d, b e æquales. Et quoniam a f, b d sunt æquales, item f g, g b, erunt a g, g d æquales ; tres ergo a g, g d, b e sunt æquales : ergo vt b e ad e c seu ad b g, ita a d ad d c.

Quòd si datis g b minori, & b e maiori, ex b e producta auferantur e c, e d ipsi g b æquales, fiantque g d, g a æquales : dico a c sectam esse bifariam in b, & vt b e ad b g, ita esse a d ad dc.

Quoniam enim g d, g a sunt æquales, & g d, b e sunt etiam æquales (nam æqualibus g b, d e addita est communis b d) erunt g a, b e æquales, additisque æqualibus g b, e c, erunt compositæ a b, b c æquales. Fiant d e, g f æquales ; quoniam g e, b a sunt æquales, vt ostensum est, & ablatæ d e, g f sunt etiam æquales ; ergo residuæ a f, b d erunt etiam æquales. Cùm ergo recta vel peripheria a c secta sit bifariam in b, & b d, a f sint æquales, ipsaque f b secta bifariam in g ; erit ex modo demonstratis vt b e ad b g, ita a d ad d c.

His ita demonstratis data sit libra g e ex b pendens, data item sint pondera h & i habentia inuicem rationem brachiorum g b, b e. Dico si ex punctis g & e intelligantur pendere pondera æqualia ipsis h & i, libram in æquilibrio constituram.

Intelligatur per lineam vel peripheriam a c dispensari æqua ratione grauitas æqualis ambabus h & i, ita vt mente concipiatur esse intra lineam a c grauitate carentem, alia grauitatis linea ; manifestum est grauitatem a c sectam fore ita in d, vt sicut recta vel peripheria b e ad b g, ita sit grauitas a d ad grauitatem d c : sed vt b e ad b g, ita est grauitas h i ad grauitatem i : ergo vt grauitas a d ad grauitatem d c, ita est grauitas h ad grauitatem i : ergo componendo vt grauitas a c ad grauitatem d c, ita est grauitas h i ad grauitem i : sed grauitas a c & grauitas h i ponuntur æquales : ergo grauitas d c & grauitas i sunt æquales: ergo & grauitas a d est æqualis grauitati h.

Quoniam ergo grauitas a c diuiditur in punctis g, b, d, e eadem proportione qua recta a c est diuisa in iisdem punctis ; Manifestum est diuisam esse bifariam in b grauitatem a c ; & in g grauitatem a d, & in e grauitatem d c. Rursus quoniam grauitates a c, a d, d c sectæ sunt bifariam in punctis b, g, e ; manifestum est grauitatem a c, si tota ex solo puncto b suspendatur, mansuram vt iacet, siquidem recta a c sit parallela horizonti: istud enim assumitur tanquam per se notum, & perinde est euidens ac aliud ab Archimede assumptum, si æqualia pondera ex æqualibus longitudinibus libræ suspendatur, ipsam, siquidem parallela fuerit horizonti, in eodem situ permansuram. Similiter mafestum est grauitatem a d, si tota ex solo puncto g suspendatur, mansuram vt iacet ; similiterque grauitatem d c si tota ex solo puncto e suspendatur, permansuram vt iacet.

Si ergo intelligatur linea ac grauitate carere apta tamen esse sustinendis ponderibus,& esse horizonti parallela,atque ex eius puncto g solo suspendatur tota grauitas a d non amplius vnita grauitati d c (nihil enim vetat quin istud facilè intelligi possit) & ipsa grauitas d c ex eiusdem lineæ a c puncto e tota pendeat ; tota autem linea a c sustinens illa onera suspendatur ex puncto b solo , manifestum est totam grauitatem a c suspensam fore ex puncto b solo ; & permansuram vt iacet , quia suspensa fuerit ex puncto medio b ; ostensum enim est grauitates a d , d c non mutatum ire positionem quam habebant ante solutionem connexionis in d. Ergo libra g d suspensa ex b manet in æquilibrio sustinens ex g puncto grauitatem a d ipsi h æqualem ; & ex puncto e grauitatem d c ipsi i æqualem ; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

Hæc demonstratio non nititur nisi primis principiis libræ vt manifestum est,nullámque mentionem facit centri grauitatis.

PROPOSITIO XXI.

SI grauia lineis ad centrum coëuntibus pendere ponantur, & in libræ curuæ distantiis diuersis iuxta demonstratas leges constituta æquiponderare sibi inuicem ; poterit accidere vt longè diuersa sit proportio brachiorum libræ curuæ à proportione brachiorum rectæ.

Sit (*Fig.91.*) libra curua c b d suspensa ex b ; ex c & d noto modo pendeant magnitudines c , d , æquiponderentque sibi inuicem : erit ergo magnitudo c ad d,vt arcus b d ad arcum b c , suppositis principiis ex quibus tres priores propositiones demonstrauimus. Eductæ sint ad centrum a rectæ c a , a d, quibus productis occurrat in e & f recta e b f trangens in b. Si libra recta ponatur e b f, & ex punctis e & f per rectas e c , f d pendere grauia c & d , ac proinde æquilibrium committi , cùm angulus e a b sit ad angulum f a b vt graue d ad graue c ; dico posse euenire vt proportio rectæ e b ad rectam b f longè alia sit à proportione grauis d ad graue c.

Ponamus enim arcum b d esse æqualem semissi arcus b c , seu angulum b a f esse æqualem semissi anguli e a b ; fiatque angulus b a h æqualis angulo b a f ; quoniam triangula a b h, a b f sunt æquiangula, habentque latus b a commune,erunt & æquilatera,latusque b h erit æquale lateri b f, & latus a h lateri a f. Rursus quoniam in triangulo b a e angulus e b a est rectus,reliqui duo simul ipsi erunt æquales , ac proinde singuli erunt ipso e b a minores ; ergo latus a e oppositum angulo maiori erit maius latere a b quod minori subtenditur.Præterea quoniam trianguli a b e angulus b a e sectus est bifariam per rectam a h , erit per 3. sexti Euclidis vt e a recta ad a b,ita e h recta ad rectam h b : sed e a est maior recta b a

ergo e h est maior recta h b. Quoniam ergo arcus c g, g b sunt æquales, & recta e h est maior recta h b, proportio rectæ e h ad h b erit maior proportione arcus c g ad g b per 10. quinti Euclidis: ergo componendo proportio rectæ e b ad h b siue ad b f ipsi æqualem, erit per 28. quinti Euclidis, maior proportione arcus c b ad arcum g b seu ad b d ipsi æqualem, hoc est proportione anguli c a b ad angulum b a f.

Cùm igitur proportio rectæ e b ad b f eò sit maior quò maior est proportio rectæ e h ad h b: & proportio rectæ e h ad h b sit eadem, vt ostensum fuit, cum proportione rectæ e a ad a b: quo maior erit excessus, quo recta ea superat rectam a b, eo maior erit proportio rectæ e b ad b f: sed excessus rectæ e a ad a b potest esse quantuscunque, ergo proportio rectæ e b ad rectam b f potest esse longè diuersa à proportione anguli e a b ad angulum b a f; hoc est à proportione peripheriæ e b ad peripheriam b d; quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Hinc manifestum est cùm quadratura illa paraboles & aliorum, quæ fit per libram, pendeat ex illa propositione *grauia inæqualia vtrinque pendentia tunc æquiponderare cum reciprocè se habuerint vt brachia libræ*: & cùm si grauia ponantur vergere ad idem centrum, eiusmodi propositio non sit vera; Archimedeæ libræ nequaquam congruere eiusmodi hypothesim.

COROLLARIVM II.

Manifestum præterea est libras quas vulgò *Romanas* appellamus esse omnes fallaces, si ad mathematica momenta exigantur: earum enim diuisiones nituntur illa propositione *grauia inæqualia vtrinque pendentia tunc æquiponderare cùm reciprocè se habuerint vt brachia libræ*; Error tamen nullus sensu percipitur, eò quod in tantâ à centro mundi distantiâ linea recta e f sensu distingui non possit ab arcu c b d illi respondente. Quod si eiusmodi libra vicina fieret centro mundi, dubio procul deprehenderetur eius fallacia non sine admiratione Artificum, quibus istud videbitur prorsus paradoxum.

PROPOSITIO XXII.

SIt (*Fig.* 92.) circulus a c d ex centro e descriptus, cuius peripheria ducta sit per d centrum mundi; sit item magnitudo f g composita vt in decima septima dictum fuit, & connexa arcu f h g qui sit portio circuli habentis diametrum æqualem diametro circuli a c d; atque vt magnitudo g ad f, ita sit f h arcus ad h g arcum. Si peripheria f g sustentans magnitudines f & g ponatur congruere peripheriæ a c d in quacunque positione; (modò tamen ille situs non impediat quo minus magnitudo ex f & g composita mox suspendenda, ex vno puncto pendeat tota iuxta cautionem primi postu-

lati) ex puncto autem quod ipsi h congruet suspendatur & liberè pendeat.

Ostendendum est ipsam peripheriam mansuram in priori situ, hoc est, concentricam circulo a c d; ac proinde magnitudinem compositam in eadem positione perseueraturam.

Puncta itaque f, h, g congruant punctis a, c, b, & ducantur rectæ a d, c d, b d per centrum mundi d, ex quo per a ducatur circuli portio a i l occurrens rectis d c, d b in i & l.

Quoniam anguli a d c, c d b insistunt arcubus a c, c b: habebunt se vt peripheriæ a c, c b quibus insistunt per 33. primi Euc. sed arcus etiam a i, i l habent se vt anguli a d i, i d l ipsis insistentes ad centrum d: ergo vt a c ad c b, ita est a i ad i l: sed vt a c ad c b, ita est graue b ad graue a: ergo vt arcus a i ad arcum i l, ita est graue b ad graue a. Si ergo peripheria a i l mundo concentrica ponatur esse libra ex i suspensa liberéque pendens; ex punctis verò a & l sustinere magnitudines a & b liberè etiam pendentes per lineas ad centrum mundi vergentes, cùm l b vergat ad centrum, & cùm magnitudines se habeant reciprocè vt latera, æquiponderabunt sibi inuicem per 19. vel 20. propositionem; assumimus enim eandem magnitudinem si per eandem lineam ad centrum ductam pendeat ex eodem libræ puncto, eiusdem esse ponderis siue sit remotior, siue vicinior centro; hoc inquam assuminus inter postulata quicquid sit de quæstione physica, quam passim negligunt ij qui non putant aurum in summa turri eadem lance eodemque modo appensum, esse magis vel minus graue, nisi fortasse per accidens, quàm si appendatur in ima turri: ergo &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

Manifestum hinc est si grauitatis centrum non absolutè sed secundùm aliquem respectum dicatur, magnitudinem compositam f g habere centrum grauitis h; non quidem pro quocunque situ absolutè, sed pro situ omni quem in circulo a b d peripheria f h g modo supra explicato collocata potest habere. Appelletur autem grauitatis quodammodo centrum, vt distinguatur à grauitis centro simpliciter: linea autem d c i appelletur perpendiculum magnitudinis a b vel f g compositæ.

COROLLARIVM II.

Manifestum quoque inde est si manente centro mundi d, magnitudo a b pendens de peripheria c b d ex solo sui puncto c, per arcum c b a sinatur sponte ferri ad centrum d, partes a, b permansuras in eadem peripheria durante illo motu lationis curuo; & æquilibrium quod partes a, b suspensæ ex c semel committunt, permansurum esse; nec non continuam fore mutationem perpendiculorum ex c in d.

PROPOSITIO XXIII.

IN compositâ magnitudine de qua præcedens propositio agit (*Fig. 93.*) non datur centrum grauitatis simpliciter.

Sit composita magnitudo f g suspensa ex punctis f, g connexis per arcum f h g circuli cuius centrum e: item per arcum f c g circuli cuius centrum b: atque vt magnitudo f ad g, ita sit arcus g h ad arcum h f, & ita etiam sit arcus g c ad c f. Si ergo in perimetro circuli cuius centrum e intelligatur esse centrum mundi, (hoc enim fieri potest manente centro eodem mundi, si magnitudo f g, & arcus f h g situm illum concipiantur acquirere in quo circuli h f l g aliquod peripheriæ punctum congruat centro:) perpendiculum magnitdinis f g transibit per h centrum quodammodo grauitatis, sicut in præcedenti ostendimus: similiter si per alium magnitudinis f g situm, in perimetro circuli c f i g ex centro b descripti intelligatur esse idem centrum mundi, perpendiculum magnitudinis f g transibit per c centrum quodāmodo grauitatis. Puncta c & h connectātur rectâ c h occurrente circulorũ peripheriæ in i & l. In arcu f i g extra puncta f, i, g ponatur esse a centrum mundi, vel quod idem est circulus c a i g deferens magnitudinem f a ponatur habere punctum a in centro mundi, & iungatur a c perpendiculum magnitudinis ita collocatæ; in arcu autem f l g extra puncta f, l, g ponatur secundum alium magnitudinis f g situm esse centrum mundi d, & iungatur d h perpendiculum magnitudinis ita collocatæ. Dico perpendiculum a c non transire per punctum h, ac proinde cùm per punctum h transeant infinita perpendicula pro infinitâ positionum varietate quam centrum mundi potest habere in arcu f l g sicuti sub finem superioris monstrauimus; & cùm centrum grauitatis absolutum sit illud per quod transeunt omnia omnino perpendicula (vnde fit vt ad inueniendum illud, posito quod detur, satis sit inuenisse communem sectionem duorum perpendiculorum) si magnitudo f g haberet centrum grauitatis, illud foret h in quo coëunt tot perpendicula: ergo si ostendamus perpendiculum a c non transire per h ostenderimus magnitudinem f g carere centro grauitatis perfecto.

Quoniam ergo per puncta c & h transit recta c h, & recta a c secat rectam c h in c, non secabit illam in alio puncto; duæ enim rectæ lineæ nec habent idem commune segmentum, nec spatium comprehendunt ex axiomatibus 13. & 12. primi Euclidis: ergo perpendiculum a c non transit per h: ergo licet per h transeant plura perpendicula, non tamen omnia: ergo h non est centrum grauitatis: magnitudo igitur f g caret centro grauitatis absolutè dicto; quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Ex his manifestum est, si grauia f & g sint inæqualia, & magnitudo f g feratur ad centrum d, in illa latione punctum h non esse semper in per-

pendiculo h d. Recta enim f g secet perpendiculum h d in m; ergo si id ita foret, puncta f, g caderent per rectas f o, g p parallelas perpendiculo h d: ergo completo parallelogrammo f o p g, cùm punctum f congrueret puncto o, & punctum g puncto p, rectáque f g rectæ o p, & punctum m puncto q posito inter d & h, si iungerentur rectæ o d, d p, sequeretur vt est arcus f h ad arcum h g, vel vt angulus f d h ad angulum h d g, ita perpetuò fore angulum o d q ad angulum q d p; istud enim necesse est vt magnitudines o p connexæ maneant in perpendiculo o d. Id verò ita apertè est falsum, quando magnitudines f, g sunt inæquales, vt impugnatione non egeat.

COROLLARIVM II.

Manifestum insuper est cùm grauia f, & g in constructione ponantur sponte & semper pendêre ex punctis f & g arcûs f g h, vel f c g deferentis, theorema præsens non cogere vbi non assignabuntur duæ partes alicuius magnitudinis sponte & constanter pendentes singulæ ex suo vnico puncto peripheriæ deferentis: Quapropter theorema non esse generale nisi pro magnitudinibus simili modo compositis.

PROPOSITIO XXIV.

Soluuntur primæ tres dubitationes, quæ in propositione duodecima extant.

I. Magna dubitationum pars vim facit, quasi Archimedes pronuntiet id esse absolutè, quod nihil refert de facto ita sit necne; dummodo quod ex hypothesi ipsius consequi demonstrandum proponitur, rectè sequatur. Non ait grauia ferri deorsum per lineas parallelas, sed ex hypothesi quod grauia ferantur deorsum lineis ad planum horizontem perpendicularibus, postulat vt inuicem æquiponderent, quoties ipsa æqualia erunt, & æqualibus interuallis ex rectâ pendebunt librâ. Similiter neque absolutè asserit planas figuras esse graues, sed si graues esse ponantur & æquales in grauitate, eas dum ex æqualibus interuallis per lineas parallelas pendent, æquiponderare sibi inuicem, tanquam concessum assmuit. Dum Mathematicus in figurâ quam pulueri inscripsit, lineam, quæ re ipsa pedalis non est, pedalem esse ponit; nec ipse errat, nec auditorem fallit; quia videlicet omnes intelligunt non esse æstimandam veriatem aut falsitatem eiusmodi propositionum *conditionalium* ex veritate vel falsitate antecedentis; sed connexionis, quâ consequens adhærere dicitur eiusmodi antecedenti sub conditione affirmato. Istam doctrinam optimè expressit Aristoteles multis locis, sed præcipuè l. 13. met. cap. 3. summâ 1. vbi postquam dixit mathematicas disciplinas contemplari obiectum suum nempe ποσότητα, quam Scholæ reddunt *quantitatem*, vt separatam ab iis quæ ipsi accidunt, & per quæ sensilis fit, scilicet ab albedine, frigore, duritie &c. subdit: *quapropter si quis ponat hæc ab accedentibus eiusmodi separata, ac de iis aliquid quatenus talia sunt, consideret, nulli propterea errori*

obnoxius erit, quemadmodum nec si in terrâ figuram describat, & eam quæ pedalis linea non est, pedalem esse dicat; neque enim in propositionibus istis mendacium falsumve inest. Vbi per propositiones intelligit illas quæ conditionali particulâ afficiuntur: vt *si sol lucet*; *si superficies est grauis*, *si linea non est grauis* &c.

II. Eiusmodi hypotheses nemo est qui reprehendat, quando sunt de re quæ licet non existat, existere tamen potest; verissimumque tunc est quod docet Aristoteles lib. 1. poster cap. 10. Geometram non assumere falsa; quia licet, exempli causa, graue quo in figura sua vtitur non sit cuiusmodi esse ponitur; quod tamen demonstratur, non debet intelligi nisi de illo alio graui per istud significato. Quando autem hypothesis est de re impossibili, norunt Philosophi & maximè Theologi adhuc illam esse posse vtilem ad veritatis indagationem, quoties nimirum id, ex quo res sit impossibilis, non pertinet *formaliter*, sed *materialiter* tantùm ad proprietatem quæ demonstratur: hanc enim distinctionem tradit Aristoteles libri 13. loco citato, vbi asserit aliquid *obiecto* scientiæ competere vel *formaliter* ἐντελεχείᾳ, vel *materialiter* ὑλικῶς; ab eóque quod *materialiter* inest, posse *obiectum* separari absque vllius erroris periculo.

III. Sicut apertum est eum qui demonstrauit tetragonismum circuli aurei, demonstrasse etiam tetragonismum circuli argentei vel cuiuscunque alterius speciei physicæ; quamuis demonstratio processerit per proprietates quæ soli auro attribuuntur: quia videlicet has proprietates auro conuenire & non argento, nequit esse radix vllius diuersitatis in proportione diametri ad perimetrum cuiuscunque circuli: ita pariter manifestum est quadrationem circuli inuentam per proprietates libræ rectæ, grauiúmque lineis parallelis ab ea pendentium, esse communem omnibus circulis, siue superficies eorum sint graues, siue non; & si sint graues, siue ferantur deorsum lineis parallelis, siue coëuntibus: ista enim omnia *materialiter* inesse censeri debent quantum attinet ad inducendum discrimen vllum in proportionem diametri ad perimetrum, vel quadrati quod potest diameter ad aream circularem. Ex his facile erit respondere ad singula ex tribus quæ opposita fuerunt.

IV. Ad primum respondemus Archimedis instituto satis esse, quod figuræ planæ graues esse possint, siue illa grauitas sit illis naturalis, siue extraordinariè ab Authore naturæ indita: Imò quamuis superficies grauis esset impossibilis; quia tamen illa impossibilitas non immutaret proportionem diametri ad perimetrum circuli, absque vllo syllogismi vitio posset ex hypothesi superficiei grauis demonstrari eiusmodi proportio. Summa igitur responsionis est Archimedem demonstrare quadrationem suspensæ figuræ ex grauitate figuræ planæ, non quidem re ipsa existentis, sed quæ existere possit, vel saltem quæ si existeret nihil noceret conclusioni illatæ.

V. Ad secundum verò eadem datur solutio, nimirum Archimedem argumentari non ex eo quod de facto sit; sed ex eo quod possibile sit, vel quod

quod si possibile ponatur nullum trahat absurdum, quantum attinet ad rectè concludendi modum. Ad illud autem quod quæritur cur Archimedes non assumpserit grauia ferri lineis sibi inuicem coincidentibus ad centrum mundi, manifesta est responsio ex corollariis propositionis vigesimæ tertiæ. Ibi enim ostendimus libræ rectæ brachia non esse reciprocè in ratione grauium pendentium si lineæ quibus pendent tendant ad idem punctum; & tamen illa proportione reciproca nititur demonstratio Archimedei tetragonismi: oportuisset igitur assumere libræ brachia esse curua, & ita principium demonstrationis istius præcipuum quod habetur propositione 5. quadraturæ paraboles, inutile redditum fuisset; nec illi simile aliud in curuis occurrisset.

VI. Ad tertium primò quicquid sit an de facto linea sit grauis, posse tamen absque vlla absurditatis vmbra hypothesim fieri, iuxta quam illæ lineæ quę assumuntur ad sustinenda grauia ex libra pendentia careant grauitate; id enim fieri posse apertum est, vel quia de facto illa carent, vel quia, si quam habent, potest ea à Deo contraria qualitate vel alia ratione suspendi. Siue igitur lineę, quę in plano graui ponuntur, graues esse debeant, siue non; certum est posse assumi eas lineas, quę non funguntur nisi vice vinculi sustinentis graue aliquod, carere grauitate. Secundò respondemus quantum ad id spectat, quod graue ponitur eiusdem esse ponderis siue collocatum fuerit in extremo librę puncto, siue in perpendicularis ab illo liberè pendentis extremo, potuisse ab Archimede id assumi tanquam alibi demonstratum. Iordanus certè q. 4. opusculi de ponderositate editionis Venetæ 1565. tradit principium quod omni libræ rectæ applicari valet, quamuis ab ipso nisi vitio librarij id factum sit, non applicetur nisi ad libram cuius brachia fuerint æqualia. Illud autem principium tradetur in sequenti propositione: ergo &c. quod erat propositum.

PROPOSITIO XXV.

VII. SI recta linea moueatur in plano ad horizontem recto, ita vt ad ipsum perpendicularis maneat, & eius extremum punctum per circuli peripheriam incedat, incedet quoque extremorum alterum per circuli priori æqualis peripheriam similiter positam.

Sit (*Fig. 94.*) peripheria circuli b g d in plano a b d ad horizontem recto; sit in eodem plano recta b f perpendicularis ad illum, & eius extremum b intelligatur ita moueri per peripheriam b g d, vt maneat perpendicularis ad eundem horizontem. Dico alterum extremum f incedere per circuli priori æqualis peripheriam similiter positam.

Centrum peripheriæ b g d sit a, & per a ducta sit a l parallela horizonti. Item per a ducta sit a i perpendicularis ad horizontem, & æqualis rectæ b f: ex centro i descripta sit peripheria f h e interuallo rectæ i e ipsi a d æqualis; per i acta sit i f ipsi a l parallela. Dico extremum f incedere

per arcum f e. Ponatur enim in sui motus cursu punctum b congruere puncto g, & per g agatur l g u h æquidistans rectæ a e occurrens lineis a l, i u, e f in punctis l, u, h: quoniam a l u i est parallelogrammum, erunt a l, u i æquales; ergo l g, u h sunt æquales; cùm ergo l g, u h sint æquales, addita cõmuni g u, vel eadem ablata, erunt l u, g h ęquales: sed l u, a i, opposita parallelogrammi latera sunt æqualia; ergo rectæ a i, g h sunt æquales; ergo cum b f sit ipsi a i æqualis, erit quoque ipsi g h æqualis: ergo quando punctum b congruet puncto g, punctum f incidet in punctum h; quod erat demonstrandum. Idem demonstraretur si b g d esset quæuis alia linea, nimirum lineam f h e esse ipsi b g d æqualem & similiter positam, vt ex vi demonstrationis apertum est.

Iam intelligatur libra b c suspensa ex a, cuius brachium a b describat motu suo peripheriam b g d: sit pondus quodlibet n. Dico siue ponderis n centrum grauitatis congruat puncto b, siue congruat puncto f extremo perpendicularis b f, ipsum pondus n ferri per lineam eodem modo declinantem à perpendicnlari. Quoniam enim siue sit in b, siue in f, semper describit motu suo peripherias circuli æquales, & similiter positas, prout ostensum fuit; ergo si b f producatur ad m, & g h ad o, angulis f b g, h g d æquales erunt anguli m f h, o h e. Quoniam igitur anguli f b g, m f h sunt æquales, & quando idem pondus fertur per angulos æquè obliquos æqualis est velocitatis, ac proinde æque premit deorsum punctum libræ à quo pendet: pondus n siue sit in puncto b, siue in puncto f, æquè premet libram; saltem ratione viæ magis vel minus obliquæ non erit magis vel minus graue. Hoc autem demonstrato non apparet ex quo capite fingi possit non esse æque graue in puncto b, atque in puncto f. Nam pondus in summâ turri non minus vel magis premit humeros, quàm in imâ; & quamuis minùs vel magis premeret ratione præcisè maioris vel minoris altitudinis, potuisset Archimedes hypothesim illam assumere quâ grauia non fiant magis vel minùs grauia, ex eo tantùm quod editiore vel depressiore sint loco constituta: ergo &c. quod erat propositum.

PROPOSITIO XXVI.

Soluitur quartum dubium ex coaptatione figurarum petitum.

Octauum pronuntiatum Euclidis *quæ sibi mutuò congruunt, ea inter se sunt æqualia*, ita perspicuum est, vt nihil clarius & euidentius in hoc scientiarum genere nobis appareat; vnde mirati sumus cum apud Caualerium in exercitationis tertiæ capite vndecimo vidimus istum demonstrandi modum non probari quibusdam Geometriæ peritis, ideóque & Archimedem in hac disciplinâ facilè principem, nonnihil notari quod eum adhibuerit in demonstratione vigesimæ propositionis libri de conoidibus & sphæroidibus; ita enim se habent Guldini verba descripta à Caualerio. *Verùm hæc ipsa demonstratio non videtur arridere Geometris; Commentator enim Archimedis Federicus Commandinus silentio illam præterit: Riualtus verò illam tan-*

quam Archimede indignam omittit, eique aliam à se excogitatam substituit.

Autores qui hanc Archimedis demonstrationem vitiosam pronuntient, nominatim recensuit duos quidem Guldinus; sed quo iure ex mox dicendis planum fiet. Commandinus, fateor, silentio illam præteriit, hoc est, nullis eam commentariis illustrauit; at inde ego infero eam ita perspicuam illi visam esse, vt per se sola sine ullius explanatione intelligi possit. Hac etenim vnica de causa eodem silentio inuoluit in libello de lineis spiralibus propositiones 12. 14. 15 17. 23. & de quadratura parabolæ propositiones 8. 12. 13. 23. quas omnes non arrisisse illi, nemo sapiens dixerit. Quid verò opus coniecturis vbi expressum & luculentum Commandini testimonium extat, videlicet in Euclidis primum librum ad quartam propositionem? *Hic demonstrationis modus*, inquit apud Caualerium, *qui fit per superpositionem figurarum præter quam quod approbatur à Proclo Mathematicarum scientiarum peritissimo, est etiam maximo vsui Mathematicis: Archimedes enim eum vsurpat non solum in planis figuris, vt in libro de centro grauitatis planorum, sed etiam in solidis, vt in libro de conoidibus & sphæroidibus.* Quod autem Archimedes agens de centro grauitatis planorum vt euidens sumpsit, idipsum pari iure & euidentia Commandinus ad centrum grauitatis solidorum transtulit, in libro quem de hoc argumento scripsit, ita enim habet secunda eius petitio, *solidis figuris similibus & æqualibus inter se aptatis, centra quoque grauitatis inter se aptata erunt.* Hinc in decima sexta propositione demonstrat *in sphæra & sphæroide idem esse grauitatis & figuræ centrum.*

Sed neque etiam Riualtus huic Commandini sententiæ de suo repugnat; etenim in scholio propositionis vigesimæ libri de conoidibus & sphæroidibus iam laudati ita scribit teste Caualerio. *Sunt qui superpositiones illas rejiciant in Geometria, quanquam alij & viri graues admittant.* Cur autem ipse Riualtus aliam demonstrationem excogitare debuerit, non video nisi vt ingenij sui fœcunditatem, laudando sane conatu, probaret; ipsam enim Archimedis demonstrationem, ego ipso dignissimam arbitror; cùm delineationem adhibeat simplicem nec multitudine linearum offusam, & breui perspicuáque ratiocinatione rem ipsam attingat; quæ summa est laus Geometræ. Quando primùm in illam propositionem incidi, timui equidem primo aspectu ne vitio aliquo Typographi diagramma appositum alteri cuidam propositioni conueniret; eo quod planissimum appareret, cùm tamen inseruire deberet ad demonstrandum, *solidum sphæroides plano per centrum ducto bifariam secari tum ipsum, tum ipsius superficiem*: Re tamen deinde propiùs inspectâ omnia Archimedis proposito quadrare admirabundus comperi; & in ista propositione verum esse mecum ipse fassus sum quicquid de eius methodo testatum reliquit Plutarchus verbis relatis in capite octauo prolegomenon; esto, id in quibusdam aliis, vt modo extant, non habeat locum, sicuti monuimus in scholio propositionis secundæ libri tertij tetragonismicorum.

Testis est Clauius in scholij propositionis decimæ sextæ tertij Eucli-

dis editione secunda, Peletarium in ea fuisse sententia vt antiquissimas Euclidis demonstrationes in propositionibus quarta & octaua primi libri, atque in vigesima quarta libri tertij, rejiciendas censuerit tanquam non Geometricas, quippe in quibus figuram vnam alteri superponi concipere nos animo oporteat; quod mechanicũ & à Geometra alienum dicere non veretur. Sed istius opinio vel hoc vno respuenda iure merito venit quòd (verba sunt Clauij) *hac in re non solùm Euclidem in crimen vocat, verum etiam Archimedem quo omnium iudicio acutior in demonstrando & subtilior fuit nemo, eiusque Commentatorem grauißimum eumque doctißimum Eutocium Ascalonitam qui eodem argumentandi genere vtuntur in æquiponderantibus; imo verò & omnes Geometras redarguat necesse est, qui non rarò hoc argumenti genus adhibent*; quod adeo verum est vt idem Clauius ibidem asseueret, si quis hunc modum argumentandi è medio tollat, vniuersam ab eo Geometriam funditus euerti. Clauium in methodo illa Euclidis defendenda sectatur eius discipulus clarissimus P. Blancanus in dissertatione de natura mathematicarum disciplinarum pag. 24.

Mihi quidem, prout initio iam dixi, res tam plana est vt eam offendiculo esse vlli hominum posse valdè mirer. Aristoteles certè libro quarto physicorum disputaturus de loci natura ponit veluti disputationis suæ fundamentum sex axiomata desumpta, vt ipse ait ἐκ κοινῶν ἐννοιῶν *ex communibus notionibus loci*, quorum tertium est, *primum locum neque maiorem, neque minorem esse eo quod in ipso continetur*, huius verò ratio vt ait Simplicius in illum locum, fol. 132. col. 2. lin. 14. non aliũde peti debet quàm ex eo quod τὰ ἐφαρμόζοντα ἀλλήλοις καὶ μήτε ὄγκον ποιοῦντα, μήτε ἔχοντά τι μεταξὺ, ἐν τῷ αὐτῷ ἐστι, hoc est, *quæ sibi mutuò congruunt aptata, & mole carent, nihilque interpositum habent, ea sunt in eodem spatio*. Eiusmodi autem sunt duæ extimæ superficies vna corporis ambientis, altera corporis intus comprehensi. Porro vt hoc quod Mathematicum est non omittamus occasione data: Aristoteles superficiem quamcunque etiam curuam ibi græca voce ἐπίπεδον vocat; cùm tamen ab Euclide & aliis post ipsum ea vox non vsurpetur nisi pro planâ: fecit autem istud Aristoteles more vt Simplicius fol. 137. col. 1. lin. 17. monet, antiquorum πᾶσαν ἐπιφάνειαν ἐπίπεδον καλούντων, *eo nomine appellantium quamlibet superficiem*: quare non rectè vertunt aliqui vocem illam eo loci per latinam *planum*.

Sed numquid re ipsâ superpositio est aliena à demonstratione verâ; quantumuis eam adhibuerint Antiquiores, & Recentiorum peritissimi, in quibus est Lucas ille Valerius, quem tanti & quidem merito omnes faciunt? Syllogismum vnum aliquem ad maiorem dicendorum euidentiam assumo.

Quæ sibi mutuo congruunt sunt æqualia; sed magnitudo A congruit magnitudini B; ergo magnitudo A æqualis est magnitudi B. Prima huius syllogismi propositio est euidens, quantum satis est ad generandam conclusionem euidentem, nisi per secundam propositionem stet. Si ergo ista secunda quæ affir-

mat magnitudines A & B sibi congruere, non aliunde probetur quàm ex eò quod, oculi vel manûs tangentis & explorantis iudicio, magnitudines A & B sibi superimpositæ congruere deprehendantur; ea propositio non est satis euidens ad pariendam demonstrationem, rectéque ista superpositio dicitur mechanica & à Geometriâ aliena. Quòd si mentis oculo ea superpositio perfectè & euidenter quadret; nihil planè deest isti propositionum pari ad generandam scientiam veram, & Geometra dignam. Istud plane vult Clauius dum Peletario objicit quod non satis intellexerit quo pacto Geometræ superpositionem vsurpent. *Neque enim*, inquit, *volunt re ipsa faciendam esse superpositionem (hoc enim mechanicum quid esset) sed cogitatione tantum ac mente, quod opus est rationis atque intellectûs.* Hoc ipsum, teste etiam & approbante Guldino apud Caualerium iam allegatum, paucissimis verbis tradit Christophorus Grienbergerus ad octauum illud Euclidis pronuntiatum *quæ sibi mutuo congruunt sunt æqualia*; addit enim, *debere talem congruentiam constare intellectui.* Istud quoque docet Blancanus in libello *de natura Mathematicarum* cap. 3. cuius hic est titulus *Recentiorum calumniæ aduersus Mathematicas diluuntur*; *earum verò* quinta hæc est, *quod Geometria plures habeat demonstrationes per superpositionem factas.* Huius tamen Authoris verba possent alicui non satis ad omnia attendenti persuadere ipsum falli dum negat *ea quæ probanda sunt æqualia, superponi à Geometris:* non enim negat eam superpositionem vsurpari ab ipsis quæ fiat mente congruentiam mutuam ita superpositorum euidenter cognoscente; sed aliam quæ solo oculorum visu aut manuum attrectatione comprobetur: quod sane liquidò constat ex causa quam mox subjicit, *hæc enim*, inquit, *ratio nullius esset momenti, nec Geometrica, sed Physica potiùs*; NITERETVR *enim* SENSIBVS.

Cæterùm ita à demonstrationibus geometricis sola sensuum externorum attestatio iudicatur ab Euclide aliena, vt in problematum praxi, cùm lineæ duci debeant rectæ, & ipsis æquali interuallo describi circuli; eiusmodi ductum & descriptiones sibi dari postulare malit, quàm ea committere oculorum fidei & manuum industriæ: ita vt censeri non debeat factum absolutè, quod proponebatur faciendum: sed cùm hac conditione, *si lineas rectas & circulos, quæ in constructione describenda fuerunt, constet euidenter suis definitionibus exactè respondere*: modum enim demonstrandi illa esse mathematicè delineata nullum habemus, cùm oculorum & sensuum præsidium ad istud non sufficiat. Ex quo scrupulum Peletario eximes, *cur in problematibus superpositio illegitimè vsurpetur, in theorematibus legitimè?* Quia videlicet in theorematibus constare euidenter menti nostræ à materia res abstrahenti potest duorum congruentia; at verò in praxi problematum quæ materiæ immixta est, ea non nisi per sensus deceptione obnoxios denuntiatur. Porrò cautè dictum à nobis modo fuit, in praxi problematum non admitti à Geometris superpositionem, nam extra ipsam praxim & constructionem nihil vetat quominus ad conclusionis ve-

ritatem demonſtradam ſuperpoſitione vtamur, quia hoc iam theorematicum aliquid eſt.

Quonam autem pacto iſta *congruentia* in theorematibus, non oculis ſed mente probetur, patet laudatas Euclidis & Archimedis propoſitiones legenti, quibus adiungi poteſt Thaleti Mileſio adſcripta demonſtratio à Clauio, & vt videtur à Proclo in decimam quintam definitionem Euclidis, *qua diameter dicitur bifariam ſecare circulum*: id verò Thales non aliunde oſtendit quàm ex cogruentia duarum eiuſmodi partium. Quod autem iſte in circulo oſtendit, id eodem prorſus pacto Archimedes in ſolido ſphæroide demonſtrat. Aliquando tamen ipſa congruentia ἀμέσως menti liquet; vt *ſi duæ rectæ in duo puncta conueniant ſibi totas congruere, nec ſpatium comprehendere*, quod eſt duodecimum axioma primi Euclidis, eóque nituntur tam Conica Apollonij, vt ex prima omnium propoſitione eſt apertum; quàm quæ Serenus de ſectione cylindri demonſtrat, ſicut ex ſecunda primi libri planum fit.

Omiſeram iſtud principium ita ſolo lumine mentis natiuo fieri perſpicuum, vt Auerroes in libri Phyſicorum ſeptimi textu 29. illud ſolum aſſerendæ æqualitatis inter duas magnitudines agnoſcat; vnde infert circuli peripheriæ non poſſe dari æqualem rectam, *quia ſuperponi ſibi non poſſunt*: inde quoque colligit arcus duorum circulorum inæqualium non poſſe eſſe æquales; nec niſi *latè* affirmari rectam eſſe breuiſſimam à puncto ad punctum ductarum linearum: quia videlicet aliæ omnes, cùm ſint curuæ, non poſſunt comparari cum rectâ, & dici illa longiores. Scio iſta omnia conſequentia Commentatoris eſſe falſa, vt in prolegomenis Elementorum tetragoniſmicorum annotatum habetur: ſed inde liquidò conſtat quantum omnes tribuant illi principio *ſuperpoſitionis*. Cùm Ariſtoteles eo loci videatur nonnihil fauere iſtis hallucinationibus, aſſentior iis qui vt Conimbricenſes referunt *non ſine cauſa exiſtimant extremam ei libro ſeptimo manum haud vnquam adhibuiſſe Ariſtotelem.*

Atque hoc plane ſenſu Archimedes vt ſuprà indicatum eſt, initio libri primi æquiponderantium ſumpſit τῶν ἴσων καὶ ὁμοίων σχημάτων ἐπιπέδων ἐφαρμοζομένων ἐπ' ἄλληλα, καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐφαρμόζει ἐπ' ἄλληλα. *ſi æquales & ſimiles figuræ planæ ſibi inuicem aptatæ congruant; centra quoque grauitatis ſibi inuicem congruunt.* Nam ſi cui non ſit aliunde euidens quàm ex oculis duo ſibi congruere, velitque inde colligere centra grauitatis ſibi quoque congruere, rem facit in demonſtrando abſurdam; quia non eſt intellectu euidens duo illa ſibi mutuò congruere, quamuis oculus nihil repugnet quo minus inuicem aptentur καὶ ἐφαρμόσῃ, vt cum Proclo locuti ſumus in parte octaua prolegomenon pag. 67 quo loco quia nondum videramus Caualerij exercitationes, in animum noſtrum non venit de hoc axiomate vllam poſſe eſſe inter bonos Mathematicos diſcordiam, iamque è memoriâ exciderat noſtrâ, Peletarij tam abſona de hoc pronuntiato ſententia.

Simili cauillo poſſit aliquis contendere libræ vſum eſſe aliquid mecha-

nicum & à Geometra alienum; ſed iſtud ſatis refutatum, & explicatum eſt in prolegomenis capite quarto & ſeptimo pag. 24.& 61. ergo &c.quod erat propoſitum.

SCHOLIVM.

Ad ſolutionem ſexti dubij propoſiti in propoſitione duodecima nonnulla præmitti oportet. In iis ergo demonſtrandis locum aſymptoticum appello eum qui curua & eius aſymptoto terminatur, *ſicuti illum definit & explicat pro ſectione conica Apollonius in ſecundi conicorum propoſitione tertia; ego verò hîc non tantum contemplor ſectionem conicam nempe hyperbolam, ſed alias etiam lineas aſymptoto rectâ præditas. Aſymptotus autem non eſt qualibet recta non conueniens cum curuâ illâ cuius dicitur aſymptotus, ſed eſt ea recta quæ nuſpiam conuenit, licet ad illam quocunque minimo dato interuallo propiùs accedat dum ambæ continuantur in infinitum. In memoriam quoque hîc reuocari debet quod, vt ſuprà vberiùs explanatum fuit, Archimedes vſurpat in ſexta propoſitione quadraturæ parabolæ, & nos in ſeptima ſecundi libri tetragoniſmicorum, magnitudinem aliquam poſſe ſuſpendi ex brachij vnius libræ duobus ſimul punctis, poſſe quoque intelligi ſuſpendi ex vno.* Perpendiculum quietis *voco* illud in quo magnitudo ex vno brachij puncto pendens quieſcit.

PROPOSITIO XXVII.

ESto (*Fig.* 95.) hyperbola delf comprehenſa aſymptotis ba, ac angulum bac conſtituentibus; ex centro a educta ſit quælibet ſemidiameter al, ſecans hyperbolam in l; per l ductæ ſint rectæ lr, li complentes parallelogrammu lrai.

Oſtendendum eſt locum terminatum rectis ai, il, ab & curuâ led eſſe maiorem quacunque figura data.

Inter a & i ſumatur quodcunque punctum h, & vt ai recta ad ah, ita intelligatur ah ad ag, & ipſa ag ad quartam,& iſta quarta ad quintam & ita deinceps progreſſio continuari cogitetur; ergo ſi per h, g.&c. agantur he, gd &c. parallelæ aſymptoto ab, ſpatia ileh, hedg &c. ſunt æqualia inter ſe, vt in corollario ſecundo quinquageſimæ propoſitionis libri ſexti oſtendimus. Quoniam igitur figura data talis eſt vt alterius ſpatij cuiuſlibet dati heli, finiti, & minoris detractione continuâ tandem exhauriatur; recta verò ah eſt in infinitum ſecabilis in ratione rectæ hi ad hg ac proinde locus ille eſt maior quotcunque ſpatiis ſpatio heli æqualibus; patet locum illum eſſe maiorem quacuuque figura data.Eadem verò eſt ratio de altero loco comprehenſo ſub curua lmf, rectis lr, ra, & aſymptoto ac producta in infinitum. Ergo &c. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

Iſdem manentibus (*Fig.* 95.) ex l i productâ abſcindatur i q ipſi æqualis, & compleatur parallelogrammum a i q p : libra grammica p r intelligatur ſuſpendi ex a perpendiculo a c, brachio a p.

Oſtendendum eſt loci comprehenſi ſub rectis r l, a r, & ſub a c aſymptoto, hyperboláque l m in infinitum productis, quadratricem eſſe parallelogrammum a r l i.

Ducatur quæcunque y f parallela aſymptoto a c, occurrens hyperbolæ in f; a y f c erit per quartam quarti tetragoniſmicorum, rectangulum ibidem *condicti* nomine appellatum ; ac proinde erit æquale rectangulo a r l : ergo habent latera reciproca, & vt a r vel a p brachium ad longitudinem a y, ita erit y f ad r l vel y z : ergo y z dimetiens quadratricis æquat rectam a i vel r l latus parallelogrammi a r l i, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Patet igitur ex ſeptima ſecundi tetragoniſmicorum ſi libra p b ſuſpendatur ex a perpendiculo a c, brachio p a, & puncto p aptetur ſpatium æquale parallelogrammo a i l r, vel a i q p, committi æquilibrium ; & ex vna parte ſuſpendi ex vnico puncto p ſpatium finitum, ex parte verò oppoſita ſpatium immenſum, vt in ſuperiore oſtendimus, de libræ longitudine a r pendens ſuſpenſum pluribus punctis, & non vno ſolùm. Atque iſtud eſt primum quod in pagina ſexta appendicis ſecundæ adiectæ libris tetragoniſmicorum, nudè olim aſſeruimus fieri poſſe.

COROLLARIVM II.

Loco alteri qui terminatur aſymptoto b a, rectis l i, i a & hyperbolæ arcu l d in infinitum protenſo æquiponderare axe a c, ſuſtentaculo p q, ſpatium quocunque dato maius patet inde, quod vt iam oſtendimus illi æquiponderans ſit æquale ſpatio incluſo parallelis b a, h e in infinitum productis ad rectæ a i partes b. Angulum autem p a c eſſe rectum, vel non rectum parum intereſt ad libræ rationem, vt aduertimus ſuprà in propoſitionis quartæ progreſſu.

PROPOSITIO XXIX.

Iſdem poſitis (*Fig.* 95.) intelligatur ſeries graduum quorum primus ad poſitionem aſymptoti a b ſit ſpatium interceptũ parallelis p q, a c in infinitum productis, ſecundus ſit locus hyperbolicus terminatus rectis l r, r a, & aſymptoto a c, hyperbolæque arcu l f in infinitum productis ; tertij verò limbus ſit l t : iſtos autem gradus ſumimus prout explicati fuêre in corollario ſecundo octauæ tertij libri, & in nona ſexti proximi.

Oſtendendum

Oſtendendum eſt curuæ l t aſymptotum eſſe rectam a c, totumque ſpatium terminatum rectis l a, a c & curua l t, eſſe æquale duplo parallelogrammi r l i a. Cuneatum verò ſolidum, cuius ſectio ſit triangulum rectangulum habens vnum latus c f dimetientem iſtius loci hyperbolici, alterum latus illi æquale, & perpendiculare ad planum b a c erectum ex puncto f; eſſe æquale cylindraceo altitudinis a p, baſeos æquantis rectangulum a i l r; illudque aptatum ſuſtentaculo p q, axe a c, æquiponderare cylindraceo altitudinis a p; baſeos, loci hyperbolici.

Primum ita oſtenditur; quoniam, per decimam quartam ſecundi conicorum, hyperbolæ e m limbus accedit propiùs ad aſymptotum a c, & peruenit ad interuallum minus quolibet dato; ergo cùm t c dimetiens tertij gradûs ſit minor quam c f dimetiens ſecundi; nam i l, vel c A vel i q, & c f, c t ſunt ex conſtructione proportionales, & i l vel c A eſt maius extremorum; ergo c t eſt minus, ideóque recta c t eſt minor quam c f: ergo cùm c f poſſit eſſe minor quocunque dato interuallo, poterit c t eſſe minor quocunque etiam dato interuallo. Et cùm inter c & f iaceat perpetua lege punctum t, patet curuam l t nunquam conuenire cum a c recta, & accedere ad illam propiùs quocunque interuallo dato, quod erat primum ex oſtendendis.

Præterea quoniam tertius gradus ex methodo octauæ propoſitionis libri tertij, & quadrageſimæ quinti, eſt duplus ſpatij quod axe a c, ſuſtentaculo p q, æquiponderat loco aſymptotico comprehenſo inter hyperbolam & rectas l r, r a, a c, qui ponitur ſecundus gradus; illi autem loco per ſuperiorem æquiponderat ſpatium æquale parallelogrammo a i l r; patet tertium gradum dimetientis t c integrè ſumptum eſſe æqualem duplo parallelogrammi a i l r, quod erat ſecundum ex demonſtrandis.

Rurſus quoniam ex earundem propoſitionum methodo cuneatum ſolidum, quod planum ſemiangulo recto inclinatum ad planum a b c, illudque ſecans in recta a c, aufert ex cylindraceo cuius altitudo æquet rectam a p, baſis ſit locus hyperbolicus integer f m l r a c, eſt æquale dimidio cylindracei altitudinis a p, baſeos æquantis dimidium tertij gradûs: patet iſtud cuneatum ſolidum eſſe æquale cylindraceo altitudinis a p, baſeos æquantis rectangulum a i l r, quod erat tertium ex propoſitis.

Denique ex earundem propoſitionum præſcripto liquet idem cuneatum aptatum ſuſtentaculo p q ad poſitionem rectæ a r æquiponderare cylindraceo recto (rectum enim ſemper intelligimus, niſi aliud moneamus) altitudinis a p, baſeos æquantis iam dictum locum, quod erat quartum & vltimum ex demonſtrandis.

COROLLARIVM I.

Quod ſcripſi in illa ſexta pagina appendicis ſecundæ poſſe dari cunea-

tum solidum quod insistat loco immenso, & quod sit æquale parallelepipedo noto, patet esse verum ex tertia præsentis propositionis parte.

COROLLARIVM II.

Ex demonstratis in tribus propositionibus postremis constat non rectè inferri omnes locos terminatos curuâ & eius asymptoto, apertos verò quà excurrunt in infinitum, esse maiores quocunque designato spatio finito Nam locus hyperbolæ l f est quidem maior quocunque dato spatio finito; at locus inter curuam l t & asymptotum a c est finito spatio æqualis. Igitur quod locus asymptoticus contineat spatium immensum, id non procedit ex natura generali loci; sed ex speciali. Illius hæc est natura vt habeat partem quocunque dato spatio maiorem, istius vt omnem partem habeat dato certo quodam spatio minorem.

PROPOSITIO XXX.

Isdem manentibus (*Fig. 95.*) cuneato solido superioris propositionis alterum simile & æquale intelligatur ad partes o constitutum super loco qui terminatur asymproto a o, & hyperbola coniugata intra angulum b a o. Recta a r bifariam secetur in y.

Ostendendum est cuneatum compositum ex duobus istis insistentibus sursum versus super plano b a c, & ex alteris duobus insistentibus deorsum versus super eodem plano ad partes oppositas, habere centrum grauitatis in puncto y.

Constructo quadrato a r D B, describi intelligatur parabola D π a cuius axis a B, vertex a, tangens a r, ac proinde ordinatim applicata D B. Ductæ a D diametro quadrati a r D B quæcunque f z, ad asymptotum a c parallela, occurrat in φ; limbo a π D in π; rectæ a r in y; rectæ l i in z; perimetro hyperbolæ l m in f. Quoniam vt p a brachiũ ad a y longitudinem, ita per vigesimam septimã est y f ad y z; vt autem p a brachium ad ay, ita per duodecimam tertij tetragonismicorum est y φ ad y π: ergo vt y f ad y z, ita y φ ad y π: igitur rectangulum sub extremis y f, y π est æquale rectangulo sub mediis y z, y φ: ergo, per vigesimam octauam quarti tetragonismicorum, dicylindraceo genito ex a π D r ceratoide parabolica, & ex loco hyperbolico c a r l m f ad positionem rectæ a c est condicta ratione æquale dicylindraceo genito ex triangulo rectilineo a D r & ex eodem loco.

Rursus quoniam dicylindraceum ex triangulo a D r, & ex loco hyperbolico genitum est cuneatum illud de quo agit præsens propositio; dicylindraceum verò genitum ex ceratoide parabolica a π D r & ex eodem loco est, vt ex methodo octauæ libri tertij liquet, æquale spatio quod æquiponderat cuneato illi, si libræ planæ axis ponatur a c, sustentaculum p q: ergo dicylindraceum genitum ex triangulo a D r & ex parallelogrammo

a r l i eſt æquale ſpatio quod cuneato illi æquiponderat. Igitur cum eiuſmodi dicylindraceum genitum ex iam dictis triangulo, & parallelogrammo, ſit æquale dimidio parallelepipedi altitudinis a p, baſeos a r l i; æquiponderans cuneato illi erit dimidium parallelepipedi baſeos a r l i, altitudinis a p: ſed cuneatum ipſum eſt per ſuperiorem æquale eidem parallelepipedo: ergo ſuſpenſum cuneatum ſe habet ad æquiponderans, vt p a brachium ad ſui dimidium: ergo ſi a y ſit dimidium totius a r, & ſi intelligatur cuneatum illud quadruplex, ſuſpendatúrque ex y puncto, in puncto autem p collecetur duplum parallelepipedi illius, librâ p r ſuſpenſâ ex a committetur eiuſmodi æquilibrium. Præterea quoniam omnes huius duplicis loci hyperbolici dimetientes parallelæ aſymptoto a c bifariam ſecantur occurſu rectæ a r; ſi a r fiat libræ planæ axis, patet vnum locum æquiponderare alteri; ergo ſi eadem recta a r maneat axis libræ planæ, magnitudo compoſita ex duplici cuneato poſito ad rectæ a r partes o, æquiponderabit magnitudini pariter compoſitæ & collocatæ ad partes f. Quoniam igitur ſi axis ponatur f y π, magnitudinis illius partes committunt æquilibrium; & ſi axis ponatur a r, committunt pariter, neceſſe eſt iuxta methodum Archimedeæ libræ, punctum y eſſe centrum grauitatis illius magnitudinis; quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Iſtud eſt quod ſine demonſtratione vlla affirmaui in illa ſexta pagina appendicis ſecundæ, ſub calcem elementorum tetragoniſmicorum; vnde liquet omnia neceſſaria ad iſtam demonſtrationem cognita nobis iam ante multos annos fuiſſe. Non dubito quin illius appendicis Lector deſiderarit demonſtrationem tam inopinati theorematis, quam hîc tandem deſcripſi. Quod autem in extrema eiuſdem appendicis pagina corollarium ſecundum vigeſimæ octauæ libri quarti reſtrinxi, id nunc infectum volo; agnoſcóque timorem tunc errandi meum fuiſſe vanum.

PROPOSITIO XXXI.

Datur aliqua magnitudo non omni ex parte finita, quæ habet centrum grauitatis; datur aliqua quæ non habet quidem centrum grauitatis, ſed habet perpendiculum quietis; datur denique aliqua, quæ ne quietis quidem perpendiculo gaudet.

Iſtud patet ex paulò antè demonſtratis in ſuperioribus propoſitionibus: primum enim liquet ex proximè ſuperiore, vbi oſtendimus magnitudinem compoſitam ex quatuor illis cuneatis habere (*Fig. 95.*) centrum grauitatis y quamuis locus qui eſt cuneati baſis, ne perpendiculum quidem quietis habeat, vt deinde oſtendemus. Alterum verò conficitur apertè ex eadem propoſitione, ſi enim non ſumatur niſi pars illius quæ ad rectæ a r partes c iacet, illa habebit perpendiculum quietis nempe rectam y f; at verò centrum grauitatis non habebit, cùm in infinitum excurrat ad

partes c; ac proinde ſi ex aliquo puncto ducatur axis m n parallelus rectæ l i; ſemper pars, quæ ad axis m n partes c iacet, alteri præponderet, vt pote procurrens in infinitum, & ex illo receſſu ab axe acquirens vires præponderandi infinitas. Tertium denique oſtenditur in loco plano aſymptotico hyperbolæ l m, terminato hyperbolæ arcu l m, aſymptoto a c, & rectis a r, r l. Si enim habet perpendiculum quietis, eſto illud y z; ergo cùm illa magnitudo ex y ſuſpenſa maneat vt iacet; illi, per demonſtrata ab Archimede in ſexta quadraturæ parabolæ, æquiponderabit idem ſpatium, quod ſuſpenſæ ex duobus punctis a & r: atqui ſuſpenſæ ita æquiponderat per vigeſimam ſeptimam ſpatium æquale parallelogrammo a r l i; ergo ſuſpenſæ ex y tantùm, æquiponderat parallelogrammum a r l i ex p pendens, librâ p a r ſuſpensâ ex a perpendiculo a c. Ergo vt p a ad a y, hoc eſt, finita magnituditudo ad finitam, ita ſuſpenſus locus maior quocunque finito ſpatio plano, vt in vigeſima ſeptima oſtendimus, ſe habet ad parallelogrammum r a i l: ergo non habet perpendiculum quietis; ergo &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

Cùm locus ille hyperbolicus non habeat perpendiculum quetis, patet magnitudinem illam vi ſuſpenſionis non quieturam, ſed fore in perpetuo motu. Si ergo quieſcat id non proueniet ex partium vtrinque pendentium æquali virtute ῥοπικῇ, ſed aliunde, quod Philoſophis relinquo diſcutiendum.

COROLLARIVM II.

Patet præterea centrum grauitatis non eſſe neceſſarium ad inueniendam cuneati ſolidi cuiuſcunque dimenſionem; nam ex ſpatio æquiponderante reperitur per vigeſimam ſecundam quarti tetragoniſmicorum, illud autem ſpatium poteſt haberi etiamſi magnitudo nec centrum grauitatis, nec perpendiculum quietis habeat, vt ex demonſtratis patet. Quapropter præcipuus vſus libræ ſtaret, etiamſi non daretur centrum grauitatis: neque enim vereor præcipiuum illum vocare vnde generalis modus exiſtit quadrandi cunei vel vngulæ illius de qua in ſuperioris libri propoſitione nona ſatis egimus. Pari ratione dicendum eſt quadratarium ſpatium, ſiue quadratricem ipſiſſimâ Archimedis methodo demonſtratam in ſeptima ſecundi tetragoniſmicorum non pendere ex centro grauitatis; cùm in iſtis, vbi nec datur centrum grauitatis nec quietis perpendiculum, locum ſuum retineat. Iſta verò figura quadratrix poterit interpolatoria arte ita in ſpeciem immutari, vt nouum aliquid appareat, nullâque etiam libræ mentio interueniat. Sed qui hac arte vtatur, is non Geometra, ſed literarius præſtigiator mihi ſit, qui alienis inuentis pro ſuis glorietur, atque vt reliqui fures earum rerum quas ceperunt, ſigna adhibitis etiam aliquoties incantamentis commutant, ſic iſte nomina tan-

quam rerum notas vanæ gloriolæ mancipium mutet. Quo vitio Stoicos laborasse Piso conqueritur alicubi in Ciceronis Operibus.

COROLLARIVM III.

Quoniam præ oculis habemus hyperbolam l f cum asymptotis suis a b, a c; libet hic vnum indicare quod semper mihi admirationi fuit in Sciotherica, & cuius causam penitus nosse nunquam potui, vt in cæteris plurimis quæ ex infinita magnitudine consequuntur. Atque vt exemplum omnium facillimum assumam pono planum b a c esse horizontem regionis sub æquatore constitutæ, hoc est (ne in tam longinquas oras abire cogamur huius experimenti capiendi vel intelligendi gratiâ) pono planum b a c incedere per axem mundi, & per sectionem horizontis nostri cum æquatore; super illo autem stare erectum perpendiculariter stylum D a. Igitur planum b a c erit plano sextæ horæ astronomicæ parallelum, quod intelligimus ductum per D verticem styli, hoc est per centrum mundanæ sphæræ, vbi ille vertex constitutus intelligitur ab Artificibus. Pono solem percurrere parallelum aliquem extra æquatorem, & describere extremâ styli vmbrâ perimetrum hyperbolicam d e l, talem enim describet vt ex duodecima primi conicorum liquet. Pono denique vmbram styli porrigi ad quamcunque longitudinem, quasi sol esset virtutis infinitæ, nec tamen esset maior ipso vertice, & lux secundaria siue reflexa non consumeret ipsam vmbram. His positis dubij enucleatè proponendi causa. Patet ex nuda contemplatione schematis, horæ sextæ matutino & serotino momento vmbram styli necessario congruere asymptotis a c, a b; si a c ponatur occidentem versus, & a b ad orientem spectare. Reliquo duodecim horarum tempore toto vmbræ extrema pars est in perimetro hyperbolæ, vt patet. Quæro qua ratione cùm inter asymptotum a c & hyperbolam iaceat interuallum, & verum spatium quod Apollonius vocauit locum, quo pacto vmbra ad perimetrum pertransierit, videtur enim saltasse; fac enim instanti A vmbram esse in recta a c infinitam; instanti proximè consequenti fit finita, & eius extremum congruit alicui puncto perimetri hyperbolicæ: ergo spatium quod est inter asymptotum & hyperbolam pertransitum fuerit in instanti. Similis prorsus est ratio difficultatis, dum vmbra deserit perimetrum hyperbolæ, & horæ sextæ momento quasi saltando reperitur in recta a b, & cùm antea semper mansisset finita, in instanti fit infinita. Noui multa posse responderi; non dari duo temporis momenta sibi instantia & sese ἀμέσως consequentia, sed neque fortasse dari vlla; istam hypothesim non esse possibilem &c. Sed noui etiam istis responsionibus non tolli admirabilitatem rei, nec penitus obtundi difficultatem qua mens finitis rebus assueta pungi se sentit.

COROLLARIVM IV.

Lubet adhuc immorari in Sciothericis, vt annotem tria alia admiratio-

ne digna. Primum eſt in noſtro horizonte Toloſano, & in quouis alio vbi eleuatio poli minor eſt complemento declinationis paralleli quem tunc ſol percurrit, vmbræ extremo deſcribi hyperbolam quolibet die, ſiue arcus diurnus ſit plurium, ſiue pauciorum horarum quàm ſex; ac proinde cùm iter ſolis, vel arcus diurnus non ſit idem ſed modò maior, modo minor; vmbræ tamen extremum ſemper hyperbolæ integræ ſemitam peragere. Alterum in vno & eodem Sciotherico Toloſani horizontis & aliorum ſuprà deſignatorum (dummodo in illis complementum declinationis ſolaris & eleuatio poli componant ſimul angulum maiorem recto) ſtyli vmbram in ortu & occaſu ſolis non cadere in aſymptotum hyperbolæ quam eo die decurſura eſt, ſed in parallelam aſymptoto. Eiuſmodi autem parallelâ ſecari illam ipſam hyperbolam extrema vmbra deſcribendam, quoties ſol eſt in boreo parallelo; non ſecari autem quoties fuerit in auſtrali; ex illa porrò ſectione fieri vt ſolis vmbra bis ab orientis ad occidentis momentum cadat in eandem parallelam; vnde conſequens eſt ſedem ſtyli eſſe intra iſtam æſtiuæ ſiue borealis vmbræ hyperbolam, & extra oppoſitam hyemalis. In quo illud admirationem apud me magnam habet, quod cùm iſtæ duæ hyperbolæ ſint ſimiles & æquales, percurrantúrque integræ ab vmbra, plus tamen temporis impendatur in obeunda æſtiua, quàm hyemali; vtrobique enim impenditur tempus quo ſol in arcu diurno moratur, illi autem arcus ſunt inæquales, ac proinde & ipſa quoque tempora. Tertium denique eſt ſolis vmbram in ortu ſolis obeuntis Æquatorem eſſe parallelam rectæ lineæ quam eo die deſcribit acumine vmbræ; tranſit ergo vmbra poſt momentum orientis ſyderis in parallelam illi in qua primùm iacuit, nec in illo tranſitu vertex vmbræ reperitur vſpiam in medio illo ſpatio. Quando autem ſol eſt in ſignis auſtralibus; inter parallelam aſymptoto in quam projicitur vmbra ipſius exorientis, & inter tramitem hyperbolicum deſignandum ab ipſa, interiacet interuallum maius illo quod eſt inter parallelam & aſymptotum. Vnde in iſtis duobus caſibus non habet locum quod Philoſophus geometriæ ignarus dixerit, in caſu ſuperioris corollarij ſolis vmbram quaſi ſaltu pertranſire interuallum quo aſymptotus & hyperbola diſcernuntur, quia illud eſt minus quolibet dato; ac proinde quia perinde eſt quod ad iſtum quaſi ſaltum attinet, atque ſi aſymptotus & hyperbola conuenirent. Nihil dico de velocitate, vt ita dicam, qua decurritur pars hyperbolæ quæ iacet ad partes interminatas, illa enim capi vix poteſt, cum limes hyperbolicus qui percurri debet ſit longitudinis quacunque datâ maioris; hoc verò locum quoque habet in æquinoctialis vmbræ recto tramite; quæ omnia cum aliquando meditarer, admirationem meam hoc hendecaſyllabo expreſſi verſiculo, quem & Sciotherico adſcripſi horario,

Vmbris fallimur, & docemur Vmbris.

COROLLARIVM V.

Prætermittere non poſſum cauſam cur in horizonte noſtro Toloſano

& in aliis quorum altitudo poli maior est declinatione solis in parallelo eo die obeundo constituti, non possit vmbra solis reperiri bis in eodem verticali ante meridiem, & bis in alio post meridiem, vnde eueniret ille regressus vmbræ admirandus quem primus annotauit & demonstrauit Petrus Nonius acerrimi ingenij Geometra. Vt autem causa dilucidè explanetur, primò statuo id euenire quoties ab imo calce styli duci potest recta quæ tangat hyperbolam quam eo die apex vmbræ describere debet; ex illo enim tactu fit vt quæcunque recta ducatur inter lineam meridianam cui insistit stylus & inter lineam tactûs, secet semitam vmbræ delineandæ in duobus punctis: ergo ante meridiem (eadem est ratio de postmeridiano tempore) vmbræ apex erit in duobus illis punctis, & linea vmbræ erit bis in eadem recta nempe antequàm veniat ad lineam tactûs, ad quam cum peruenerit, redibit, iter relegendo, ad eandem rectam secantem, sed modò vt patet erit longior nempe cum primùm secanti congruet matutina hora, modo breuior cum secundò ad illam redierit, & cùm prouectior euaserit dies ante meridianam horam. Quoniam igitur in nostro horizonte sedes styli est intra hyperbolam quam sol lustrans borealia signa eo die projicit per verticem styli; ex illa sede non poterit duci recta tangens ipsam hyperbolam æstiualis vmbræ (ita enim vocetur quæ respondet signis borealibus) sed neque etiam quæ tangat oppositam hyemalis vmbræ, cùm ex trigesima prima primi conicorum doceamur tangentem rectam cadere inter centrum sectionum oppositarum & verticem eius hyperbolæ quam tangit; vnde etiam liquet in sphæra recta (qui est casus corollarij tertij) non esse possibiles rectas ex ima styli basi eductas quæ hyperbolam tangant; cùm stylus ibi erigatur ex centro ipsius hyperbolæ. Contrà verò quoniam quando altitudo poli minor est declinatione solis in parallelo huius hyperbolæ genitore collocati, sedes styli iacet extra vtrámque hyperbolam, patet ex illa sede posse duci rectam quæ tangat hyperbolam sedi viciniorem. Porrò istud experiri potest etiam in parietibus ædificiorum, quisquis accuratè inuestigarit vnum aliquem super quo poli alterutrius eleuatio sit minor declinatione solis maximâ. In pariete illo, vt res pariat maiorem admirationem, nullas alias rectas describet præter tangentem, quæ vocabitur terminus regressûs, & horam qua vmbra ad illum pertinget, simúlque diem anni; ponimus autem stylum in his omnibus esse perpendicularem ad planum, nullámque esse virgam ferream quæ axem mundi repræsentet. Attamen vt tutò & facilè rem expediat, sum illi autor vt hyperbolam isti diei conuenientem occultè describat, tum vt filum basi styli figat, illúdque tensum eo vsque circumferat, donec hyperbolam sensûs iudicio appareat tangegere: ita enim habebit punctum tactûs, ac consequenter terminum regressûs, momentúmque quo vmbra ad illum perueniet. Postea verò cretâ obducatur hyperbola, vt sola linea regressûs depicta conspiciatur. Non est dubium quin istud etiam à sapiente spectatore iudicetur mirabi-

le. Per numeros res ex ſe certiùs tractaretur, ſed ij in iſtis hypotheſibus vix carebunt vitio aliquo; ſemper certè relinquent artificem anxium, an expectationi noui huius ſpectaculi excitatæ reſponſurus ſit ſuo tempore ſucceſſus. Cæterùm iſte regreſſus vmbræ non accidit niſi in plano in quo hyperbolam delineaturus eſt vertex vmbræ; nam ſi circulum, aut ellipſim aut etiam parabolam deſcripturus ſit, eiuſmodi reditus vmbræ accidere non poteſt: quapropter non abs re fuerit ibi iſtud tractaſſe, vbi hyperbolæ proprietates quædam mirabiles ex inſtituto referendæ nobis erant. Quod ſi ſtylus non ponatur rectus ſed inclinatus ad libitum; quolibet die, & vbicunque gentium poterit iſte regreſſus ſpectari, nempe ſi poſtquam vmbræ illius diei conueniens ſectio conica in Sciotherico deſcripta fuerit, ad illam ducatur tangens quælibet, & collocetur ſtylus in puncto vbi dicta tangens ſecabit lineam meridianam, is verò inclinandus ita erit, vt vertex illius congruat vertici ſtyli qui perpendiculariter ad Sciothericum erigeretur, ſed ſubducitur vt artificium magis inde commendetur.

PROPOSITIO XXXII.

SOluitur quintum dubium ex centro grauitatis petitum; & ſextum, ex eo quod ſpatium finitum æquiponderet immenſo.

I. Dari centrum grauitatis reponitur iure merito inter poſtulata, quis enim hoc demonſtret, aut quis illud quamuis indemonſtratum concedere poſtulanti recuſet? Primò enim, ſi ratione phyſica agatur, videtur rationi conſonum vt quodlibet graue in libræ curuæ hypotheſi ex puncto A veluti vnco liberè pendens, quietis ſitum ſibi reperiat aliquem, quacunque ſui parte illi admoueatur: atqui, ſi hoc eſt, datur centrum grauitatis; nam vbi duo eiuſmodi perpendicula ſiue rectæ ad centrum vergentes ſe interſecant, oſtendetur eò neceſſariò confluere tertium perpendiculum ex quacunque alia parte ſuſpenſum admoueatur vnco A; alioqui perpendiculorum priorum vnum non diuiſiſſet magnitudinem ſuſpenſam in duas partes hinc & inde æquiponderantes. Quæ verò demonſtrauimus in propoſitione vigeſima prima nihil obſtant iam dictis, ſed potius ea confirmant, cùm ibi oſtenderimus magnitudinem illam compoſitam, quamdiu conſeruat eandem à centro mundi diſtantiam habere centrum grauitatis per quod omnia illius interualli perpendicula tranſeunt, hic verò ponimus ab eodem vnco A eandem magnitudinem pendere per diuerſas ſuſpenſiones, pari à centro diſtantiâ. Iſtud quod ratio ſuadet confirmat experientia conſtans, etiam in perpendiculo pendulo, de cuius oſcillationibus aliquid diximus in propoſitione 59. lib 6. In hypotheſi verò libræ Archimedeæ ratio idem ſuadet: experientia verò neque fauet, neque contradicit; cùm illa hypotheſis ſit ſolius rationis, nec grauibus de facto quadret.

II. Inductione præterea mathematica fit probabiliſſimum dari centrum

trum grauitatis. Primò enim Archimedes ex illius hypotheſi quadrauit parabolam; deinde eandem quadrauit ſeclusæ libræ principiis; nec vlla fuit diſcrepantia duorum iſtorum tetragoniſmorum: ergo vterque veritate nititur. Eandem porro parabolam poſteriores Scriptores præcipuè Torricellius & Gregorius à S. Vincentio variis aliis modis abſque libra quadrarunt, eámque commutarunt in idem ſpatium iam per libram ab Archimede inuentum; quæ omnia confirmant libræ principia habere ſuam ſedem in veritatis penetralibus. Denique nulla eſt rectilinea figura cuius centrum grauitatis non inueniatur per primum librum æquiponderantium Archimedis, & cuius quadratrix ſiue ſpatium æquiponderans non fiat cognitum per duodecimam tertij tetragoniſmicorum, adhibita decima ſecundi libri eorundem elementorum; ſemper autem reperitur ſicut eſt ſuſpenſum rectilineum ad æquiponderans notum, ita eſſe brachium libræ ad interuallum quod eſt à puncto vnde libra ſuſpenditur ad perpendiculum quietis quo rectilineum pendet ex libræ eiuſdem vnico puncto, idque in quocunque ſitu ponatur ſuſpendi; ergo cùm in rectilineis, & etiam in curuilineis parabolicis ſuſpenſis in quocunque ſitu, reperiatur illa proportio eſſe veriſſima, quæ in centro grauitatis fundatur, quoties ad omnem poſitionem magnitudo ſuſpendi pari pacto poteſt, non eſt cur in curuilienis aliis non debeat admitti, ſemoto prorſus omni errandi timore.

III. Cùm Archimedes non eſſet acturus niſi de figuris & magnitudinibus vndique terminatis, non eſt mirum quòd non poſtularit dari centrum grauitatis niſi in figuris: præterquam quod in aliis quibuſdam non vndecunque terminatis dari centrum grauitatis, res eſt adeo à primis hominum cogitationibus remota, vt demonſtrari potius debeat, quàm poſtulari; nam ſi hyperbolam & aſymptotum ad ſe propius ſemper accedere, & nuſquam conuenire, Proclus alicubi vocat παραδοξότατον, quantò magis iſtud vt communi hominum opinioni repugnans ſuſpiceret.

IV. Quòd autem pondus finitum æquiponderet immenſo pendenti de vno libræ puncto, id concedimus aduerſari rectæ rationi; non autem ſi pendeat de duobus; nam quando ita pendet, non licet inferre dari vllam proportionem inter finitam magnitudinem & infinitam. Quapropter cùm nihil contra eiuſmodi aſſertionem adducatur quod falſitatis eam conuincat, & cùm aliunde euidenter ſequatur ex principiis libræ fundatiſſimis, non eſt cur ea propterea reſpuamus, quod ex illis neceſſariò conſequatur aliquid præter opinionem hominum vulgarem: ergo &c. quod erat propoſitum.

PROPOSITIO XXXIII.

SOluitur vltimum dubium deſumptum à difficultate intelligendi demonſtrationes ex principiis libræ deriuatas.

I. Principio ſtatuendum eſt, quorundam hoc eſſe vitium, vt non ha-

beant bene cognitas eas res quas docere volunt, cúmque eas non satis firmè conceptas animo atque comprehensas teneant, non posse non obscurè de iis loqui; quis enim in aliorum mentibus id rectè imprimat, quod in sua peruersè expressum habet? & quis à fonte turbido riuos crystallinos deriuet? Hunc itaque ingenij defectum vllatenus excusare iis quæ mox dicturi sumus, minimè intendimus; fatemur enim culpâ eius qui loquitur sæpiùs fieri vt non intelligatur; concedendum tamen putamus, nullam aliquando esse eius culpam, qui non intelligitur. *Istud*, inquit Tullius, *duobus modis sine reprehensione fit: si aut id de industria facias, vt Heraclitus, cognomento qui σκοτεινὸς perhibetur, quia de natura nimis obscurè memorauit: aut cum rerum obscuritas, non verborum facit, vt non intelligatur oratio: qualis est in Timæo Platonis. Epicurus autem, vt opinor, nec non vult, si possit, planè & apertè loqui: nec de re obscura, vt Physici, aut artificiosa, vt Mathematici; sed de illustri & facili, etiam in vulgus peruulgata, loquitur.* Hæc ille, cui assentior, si qui dedita opera obscurè loqui consectatur, iustam id faciendi causam habeat; alioqui enim, abutitur auditoris otio, & contra humanæ locutionis leges peccat, reprehensionémque meretur. Iure autem optimo artificiosa Mathematicorum collocat inter ea quæ sæpe non intelligantur absque vllo loquentis vitio.

II. Præterea negare nemo potest quin etiam iis qui præcognitorum apparatum habeant necessarium, quíque summa animi contentione demonstrantis mentem assequi moliantur, intellectu difficillima sint Archimedis, Apollonij, Euclidis & aliorum Antiquiorum plurima theoremata, præcipuè verò quæ Archimedes de æquiponderantibus scripsit, cuius causa nunc inquirenda nobis est. Primò quidem certò statuendum est eos animo clarè comprehendisse ea, quæ posteris tradiderunt; deinde nec minùs certò constare debet eos non caruisse copia verborum quibus cogitata sua promerent; videas enim quosdam qui gallicè, verbi gratiâ, planè explicent mentem suam, at verò si latinè eadem de re sermonem habeant, tenebris sua ipsi sensa tam densis obuoluant, vt discerni penitus non valeant. Tertiò neque existimandum est eos dedita opera obscuritatem dictorum affectasse; cur enim se summa illa voluptate priuasse credantur, quam quisque experitur dum sua inuenta & facile intelligi, & probari experitur? Quartò igitur id referri debet in eam rerum, quas tractant, naturam reconditam, procúlque à prima & communi mentis humanæ luce positam. Quoties in theorematis constructione adhibentur solida, eórumque sectiones variæ; noua adest causa difficultatis, eo quod trinæ illorum dimensiones nunquam perspicuè repræsententur in plano. Sæpe tamen figuræ descriptio est plana nihilque intricata, & tamen demonstratio perspicuè non apparet. Mihi certè quintus Euclidis liber semper difficilis captu visus est, cùm diagrammata sint facilia; ita quoque decimus difficultate summa comprehensus mihi fuit, cuius tamen figurarum descriptiones negotium non facessunt. In Hypsiclis deinde & Fluſ-

ſatis libris intelligendis ſemper laboraui plurimùm, ſed ibi ad difficultatis communis magnitudinem fit acceſſio ex vario planorum & linearum in ſolidis corporibus ductu. Specialem verò difficultatem paſſus fere ſemper fui, quoties demonſtratio proceſſit per reductionem ad impoſſibile; tales occurrunt mihi nunc nobiliſſimæ duodecimi Elementorum ſecunda, decima, duodecima; tales quoque ſunt illæ in quibus Archimedes probat proportionem cylindri ad ſphæram, coni ad cylindrum, ſpiralis ad circulum &c. & vt à libra exemplum petamus talis eſt decima ſexta quadraturæ parabolæ, vnde fluxit ſeptima noſtra libri ſecundi tetragoniſmicorum.

III. Diſſimulandum non eſt Antiquos illos multa in demonſtrandis ſuis inuentis reticêre, indéque nonnullam oriri difficultatem percipiendi ſtatim, quæ dicuntur, præſertim inexercitatis. Hunc ſcribendi modum in Eudemo Simplicius agnoſcit in primum Phyſicorum fol. 13 pag. 2. & refert ad ἀρχαϊκὸν ἔθος *ad Antiquorum morem.* Quiſque verò illum experitur eorum lectione, & manifeſtè patet in Archimede ex ſupplementis Commandini, aliorumque. Exiſtimo tamen remotæ illius ætatis Scriptores ita calluiſſe has diſciplinas, vt quæ inter ſcribendum omitterent, ea ſuppleri à Lectore facilè poſſe exiſtimarent: ſicuti nunc ſi quis dicat æquales eſſe angulos alternos qui fiunt à recta incidente in duas parallelas, quamuis Elementa Euclidis non adducat ad confirmationem ſuæ aſſertionis, ab omnibus Geometris intelligitur, nec ab vllo deſideratur illa Euclidis commemoratio. Quapropter ſi iam nobis non ſint in procinctu ea quæ ætate Archimedis obuia erant Geometris, non eſt vituperandus mos ille ſcribendi, vt pote eruditioni ſæculi illius accommodatiſſimus, ſed potiùs dolendum eſt noſtrum illi in hoc cedere. Fortaſſe etiam illud rerum compendium affectarint, vt vitarent illam minima quæque perſequentem μικρολογίαν demonſtrationum mathematicarum, cuius tædio nonnullos ab iis auerti teſtatur Ariſtoteles in extremo Metaphyſicorum libro ſecundo. Non abs re fortaſſe erit annotare, verſionem, qua vſus eſt S. Thomas, retinuiſſe vocem *micrologiam*; Interpretem quoque Auerrois Arabicam vocem illi græcæ reſpondentem, videri retinuiſſe, dum *ſcatinizare* ſcripſit; nam quod græcæ μικρὸν, id Hebraïcâ linguâ (à qua deriuata eſt Arabica) קטון dicitur; vnde ſicut ab illa deducitur μικρολογίζεσθαι, ita ab iſta *catinizare* vel *ſcatinizare* inflexione latinâ deriuari potuerit. Cæterùm illa vox de mente Ariſtotelis ſonat eo loci vitium illud quo minima quæque nonnulli conſectantur. Sicuti enim (inquit Philoſophus) in contractibus celebrandis ſi minima quæque ſordidè caues, odium contrahentis tecum incurris ex illiberali tuo facto; ita in demonſtrandis rebus, ſi minima percenſere velis, eorúmque cauſam longiùs excurrendo reddere, tædio eris auditori; cùm plurima ſint quæ ſatis ſubaudiuntur, & quæ ſine audientis faſtidio expreſsè ingeri non poſſunt. Hinc patet difficile dictu eſſe cur Beſſarion Cardinalis illam Ariſtotelis vocem reddiderit eo loci

Vu 2

curiositatem; sensus enim ille non conuenit assertis Aristotelicis: sed neque satis video, an textûs Arabici Interpres latinus planè intellexerit vitium quod ibi Philosophus ea voce designat, dum id esse ait *proteruire in contractibus*. Porrò voce illa græca notari aliquoties auaritiæ recularum omnium satagentis sordes accuratissimus & doctissimus Menagius in *Origine Vocum Francicarum* animaduertit: aliorum verò sit iudicium an eidem voci supponatur vitium illud litigantium cauillatorum, quod nos *chicanerie* dicimus; quam quidem dictionem nostram à voce hispana *chico* Menagius ille deduci vult; fortasse an veriùs ab istâ ipsâ Arabicâ, quasi dictum initio fuerit *chitania*, postea *chicania*. Vnde & vox ipsa hispana *chico* ortum forsitan duxerit.

IV. Tullius dum loco iam laudato libri secundi de finibus, geometriæ *artificiosa* ex se obscura esse affirmat, eiusmodi voci non subjicit tantum instrumenta machinalia; ita enim angustè nimis loqueretur, sed hac voce explicata haberi vult ea omnia Geometrarum inuenta, quorum demonstrationi κατασκευὴν *constructionem* præmittunt: demonstraturi enim aliquid construunt ex arte diagramma idoneum comprehendendæ veritati propositæ. Artificiosum itaque opponitur Physico, quod effectrice natura prodit in lucem; at diagramma istud geometrica arte efficitur. Huc spectat, vt opinior, quod Proclus in Euclidem docet dimensionem cylindri & coni spectare ad geometriam, quia cylindrus & conus sunt per mentem: ad Geodesiam verò pertinere vt metiatur σωροὺς ὡς κώνους, καὶ φρέατα ὡς κυλίνδρους, οὐδὲ δι' εὐθειῶν νοητῶν, ἀλλ' αἰσθητῶν, οἷον διὰ σπάρτων, καὶ διὰ σταθμῆς: *cumulos acuminatosque aggeres veluti conos, & puteos tanquam cylindros: neque per rectas mentis opus, sed per subiecta sensibus, veluti per amußim & perpendiculum*. Quod autem grauis Autor geometriã & Mathematicas disciplinas addisci docet faciliùs quàm physicam, id ita intelligo, vt velit facilius esse comparare sibi notitiam eorum omnium quæ in Mathematicis demonstrata sunt, quàm scientiam eorum quæ ad vniuersam physicam spectant: nam ad istam scientiam acquirendam oporteret innumera inueniri & demonstrari quæ vel inuenta non sunt, vel nondum demonstrata. At si comparentur ea quæ necdum reperta sunt in Mathematicis, cùm iis quæ nondum comperta habentur in Physicis, quis statuat quænam profundiùs lateant, quamdiu nescitur vbi vnumquodque eorum defossum lateat?

V. Ex hactenus dictis liquidò constat difficultatem & obscuritatem inuentorum Mathematicorum potiùs verti debere eorum laudi quàm vituperio; & siquidem sublimia ea sint, vti re ipsa sunt, inde veriùs accendi quam extingui studium illa cognoscendi: quod si quis natiuam, vt ita dixerim, rerum ipsarum difficultatem obscuret cogitationum suarum vel sermonis tenebris, id non esse Geometriæ, sed Scriptoris vitium. Si quis demum qui ne pictum quidem vllum (vt dici solet) antea vnquam Geometram viderit, conqueratur à se non intelligi demonstrationes illas; istâ querimoniâ non ostendi aliud contra Scriptorem illarum, quàm in-

fœlicem eum esse, quod nactus sit Lectorem nimis ineruditum. Cæterùm vnum, quod omisi dicere, prætereire non possum; Archimedem, licet in demonstrationis processu non statim planè intelligatur vbique, dum tamen ipsum theorema proponit, id facere mira perspicuitate; verbi gratia *parabolæ segmentum esse trientem trianguli cuius est quadratrix: cylindrum esse sesquialterum sphæræ in ipso inclusæ; superficiem sphæræ esse quadruplam circuli maximi in ea descripti* &c. Modus autem adeo clarus proponendi theoremata, satis indicat tenebras quas deinde experimur dum ducimur ad penetrale vbi illud latebat, pertinere ad longum & cœcum iter quod peragendum est vt eò veniatur.

VI. Reuocemus iam illud Aristotelicum, *puerum posse quidem fieri Mathematicum, non tamen Sapientem aut Physicum*, & monstremus male inferri mathematicos disciplinas esse faciles captu. Aristoteles enim ibi non inquirit an faciles difficilésve sint; sed tantùm cur pueri addiscere illas possint, & nequeant Sapientiam aut Physicam; respondétque id ea de causâ fieri, quod ad illas addiscendas non prærequiratur experientia multis annis parta, prærequiratur autem ad Sapientiam & Physicam. Neque opponas censuisse Aristotelem disciplinas illas conuenire ætati puerili, cuius tamen in iudicando vires sunt admodum debiles: nam in illis alia sunt facilia, ea videlicet quæ non procul absunt à primis principiis; alia sunt difficiliora, quæ longiùs absunt; alia difficillima, quæ longissimè. Vnde licet Plato voluerit pueris primùm tradi mathematicas scientias, in illis tamen addiscendis ad trigesimum vsque ætatis annum perstare eos iubet, prout rectè annotat Blancanus suprà pag. 24. vbi de hac ipsa re ita scribit; *dicam syncerè, quod ipse, dum eas per plures annos docerem, expertus sum; quoscunque reperi ingenio in mathematicis pollere, hi pariter in aliis omnibus excellebant. Requirit enim studium istud omnes ingenij partes, imaginationem, discursum, & memoriam. Idcirco Veteres puerorum ingenium ad Mathematicas quasi ad Lydium lapidem experiebantur, iisque inepti à reliquis studiis arcebantur. Audi Platonem 7. de Rep.* An & hoc aduertisti quod homines naturâ Arithmetici ad omnes doctrinas, vt ita dixerim, acuti videantur. Hactenus ille. Sed quod ad illam mathematicas disciplinas reliquis præmittendi legem attinet, non omnibus ea probatur: nam S. Thomas in librum Ethicorum sextum lectione septima ita loquitur, *erit ergo congruus ordo addiscendi: Vt primò quidem pueri logicalibus instruantur, quia logica docet modum totius Philosophiæ. Secundò autem instruendi sunt in Mathematicis, quæ experientia non indigent, nec imaginationem transcendunt. Tertiò autem in naturalibus, quæ etsi non excedunt sensum & imaginationem; requirunt tamen experientiam. Quartò in moralibus quæ requirunt experientiam, & animum à passionibus liberum, Vt in Primo habitum est. Quintò autem in Sapientialibus & diuinis, quæ transcendunt imaginationem, & requirunt Validum intellectum.* Ridiculus porrò sit quisquis ex hoc S. Thomæ loco inferendum contendat, Logicam puerilem & perfacilem esse scientiam; ipso quippe initio id ætatis adolescentes percipient quæ in Logica

faciliora erunt, progreſſu verò temporis reliqua maturiori ingenio addiſcent.

VII. Reſtat examinandum quod S. Thomas aſſerit ſub finem Commentariorum in ſecundum Metaphyſicorum lectione 5. ibi enim explicans Ariſtotelicum illud aſſertum [quoſdam reperiri qui omnia ſibi mathematico more probari volunt, eo quod aſſueti non ſint niſi mathematicis demonſtrationibus] addit, *hoc conuenit propter conſuetudinem his qui in Mathematicis ſunt nutriti, & quia conſuetudo eſt ſimilis naturæ. Poteſt etiam hoc quibuſdam contingere propter indiſpoſitionem, illis ſcilicet qui ſunt fortis imaginationis, non habentes intellectum multùm eleuatum.* Cùm igitur ex S. Thoma non opus ſit ingenio admodum ſublimi ad mathematicas diſciplinas percipiendas, iure merito quæritur cur homines ingenij acris, & phantaſiæ viuidæ admodum, atque tenacis, tantopere laborent in intelligendis iis quæ Archimedes ſcripta reliquit de ſpiralibus præſertim & libra. Reſpondeo S. Thomam non loqui ibi niſi de illis Mathematicis qui aſſuefacti tantummodo ſunt demonſtrationibus Euclideis primorum præcipuè librorum; poteſt enim contingere vt illorum aliquis *fortis ſit imaginationis*, parúmque polleat ingenij viribus; iſte igitur ſi dum ſublimia in aliis ſcientiis dicuntur, ea συνείρειν vt Ariſtoteles eo loci ait, hoc eſt rationis nexu iungere nequeat, id præ ingenij imbecillitate faciet, in iis præcipuè rebus quæ nulla linearum vel ſuperficierum deſcriptione continentur. De iſto quoque Mathematico intelligi debet, quod S. Thomas & Auerroes aſſerunt *in illo virtutem imaginatiuam dominari ſupra virtutem cogitatiuam.* Certum enim eſt eum qui noua & abſtruſa quærere inſtituit, non aſſequuturum quod vult, niſi *forti eius imaginatiuæ fortior dominetur cogitatiua.*

SCHOLIVM.

Punctum extremum lineæ circulum deſcribentis quò remotius fuerit à centrò, eò velociùs ferri ab eadem virtute motum, Archimedes initio libri primi de æquiponderantibus, inter poſtulata reponit. Petimus, *inquit*, grauia æqualia æquali diſtantia ſuſpenſa, inter ſe æqualiter ponderare: grauia item æqualia, diſtantiâ inæquali ſuſpenſa non æqualiter ponderare, ſed id quod in longiori diſtantiâ pendet deorſum ferri. *Poſtulat igitur idem in æquali à centro libræ diſtantiâ, pari impetu deorſum ferri. Inde enim exiſtit æquilibrium, quòd extrema libræ capita vtrinque premantur deorſum æquali impetu, id eſt, ea vi quæ æquè velocem in vtroque cauſaret motum, niſi ſibi mutuò ipſi motus obſiſterent: quanta autem eſt velocitas eiuſdem puncti, tanta eſt reſiſtentia ad motum oppoſitum. At verò Iordanus Autor non ignobilis, inter Scriptores Mathematicos vndecimi ſeculi relatus à Blancano noſtro, in opuſculo de ponderoſitate, grauia æquali diſtantiâ ſuſpenſa inter ſe æqualiter ponderare probat quæſtione 2. quæ quia nonnulla alia continet non inutilia lubet illam hic apponere emendatam, & iuxta Authoris, niſi fallor, mentem reſtitutam.*

PROPOSITIO XXXIV.

SI libra fuerit horizonti parallela, & æqualibus interuallis ab ea suspensa fuerint grauia æqualia, ab eo situ non discedet; & si ab eo submoueatur, sibi relicta ad eum reuertetur. Si verò inæqualia appendantur ex parte grauioris vsque ad perpendiculum declinare cogetur.

Sit (*Fig. 96.*) libra b c bifariam secta in a, & ex a pondera b, c æqualia, de punctis b, c pendentia liberè; sit f a e perpendicularis ad horizontem. Dico si libra ex a suspendatur ita vt sit parallela horizonti, ipsam permansuram in eodem situ; & si ab eo situ dimoueatur, ad eum redituram; denique & si b alterutrum ponderum ponatur esse maius, depressum tamdiu iri libram ad partes b, dum recta a b congruat perpendiculo a e.

Ad istud probandum Iordanus assumit primò; quod grauiùs est, velociùs descendere: secundò, idem eò velociùs descendere, ac proinde grauius esse, quò eiusdem deorsum motus rectior, & perpendiculo similior fuerit: tertiò obliquiorem descensum in eadem circuli quantitate minus capere de directo, id est respondere minori directo.

His ita positis, ex centro a interuallo rectæ a b descriptus intelligatur circulus b f c e; & per b, c actis rectis b h, c d æquidistantibus ipsi a e, sit primò b c parallela horizonti. Quoniam angulus b a e est ex constructione rectus, erunt quoque anguli h b a, a c d recti, ac proinde rectæ b h, c d tangent circulum in b & c; anguli igitur contactûs h b e, d c e erunt æquales. Cùm igitur descensus tam ponderis b, quam ponderis c fiat per circumferentiam circuli versus e, & cùm æquè obliquus sit hinc inde descensus, eo quod circumferentiæ b e, c e æquali angulo recedant à perpendicularibus b h, d c; aliunde verò pondera b, c sint ex se æqualia, libra non nutabit in alterutram partem; cùm neque ratione ponderum, neque ratione anguli in descendendo decliuioris se superent.

Secundò (*Fig. 97.*) libra b c non sit horizonti parallela; sed cæteris vt in priori casu manentibus; depressa sit ex parte b, & eleuata ex parte c. Per puncta a, c, b ducantur rectæ q p, c l, b g horizonti parallelæ, & inter c & p sumpto quouis puncto i, arcui c i fiant arcus c x, b o æquales, & per i, x, o ducantur i n, x s, o t horizonti parallelæ. Quoniam arcus c i, c x sunt æquales, erit recta m r maior rectâ r z; ergo cùm arcus i c, c x sint æquales, & arcus c x parallelis horizonti lineis x s, c l interceptus respondeat minori parti r z, arcus verò c i maiori m r, sint autem r z, u y æquales, erit descensus grauis c per arcum c i minùs obliquus, descensu b per arcum b o: ergo graue c descendet, cùm hoc ipso quod viam habet minus recedentem à perpendiculari c d, sit grauius: ergo libra b a c

mouebitur donec punctum b respondeat puncto q,& punctum c puncto p.

Tertiò (*Fig.* 98) sit pondus b maius pondere c,& libra b c sit parallela horizonti; ita vt punctum b respondeat puncto q, & punctum c puncto p; manifestum est inclinationem factum iri ad partes b, cùm enim sicuti in primo casu ostensum fuit anguli descensûs sint æquales vtrinque, & pondus b sit pondere c ex se grauius, manebit adhuc grauiùs respectu habito ad situm.

Rursus sit libra b t ad horizontem inclinata, & ponatur b inferius (vt libet) & c superius. Ex recta b c productâ auferatur recta c g ipsi a c æqualis; ex centro g describatur circulus c z: ex c excitetur ad b c rectam perpendicularis c m; tanget recta c m vtrumque circulum in c. Quoniam verò rectæ h b, d c sunt parallelæ, anguli h b a, d c g erunt æquales: sed anguli g c z, a b e mixti sunt etiam æquales; ergo si ex æqualibus rectilineis h b a, d c g auferantur æquales mixti a b e, g c z; residui mixti h b e, d c z erunt æquales: sed angulus d c z mixtus superat mixtum d c p excessu anguli curuilinei p c z: ergo angulus mixtus h b e superat mixtum d c p, excessu anguli curuilinei p c z: sed angulus p c z est duplus anguli contactûs m c z: ergo excessus quo angulus mixtus h b e superat mixtum d c p, est angulus duplus anguli qui ad contactum circuli fit ex peripheria ipsius circuli & ex recta contingente.

Quoniam igitur licet, vt in secundo casu ostensum fuit, pondus b habeat descensum obliquiorem pondere c, & eatenus pondus b fiat leuius, quia tamen proportio anguli h b e (qui est obliquitas descensûs ponderis b) ad angulum d c p (qui est obliquitas descensûs ponderis c) est minor qualibet proportione quæ est inter maiorem & minorem quantitatem, quarum excessus multoties repetitus superet minorem; minor etiam erit quàm ponderis b maioris, ad pondus c minus: cùm ergo pondus b plus addat super pondus c, quàm obliquitas super obliquitatem, grauius erit b in hoc situ quàm c: ergo cùm pondus b non possit quiescere in situ libræ horizonti parallelæ, aut inclinatæ ad illum: superest vt quiescat in situ perpendiculi a e. Quod autem proportio anguli h b e ad angulum d c p sit minor qualibet proportione quæ est inter maiorem & minorem quantitatem quarum excessus multoties repetitus superet minorem; & quod pondus b maius & c minus ita se habeant vt eorum excessus sæpius replicatus componere possit pondus ipso pondere c maius, ostenditur hoc pacto.

Quoniam inter d c & c m rectas nulla per c duci potest recta quæ non secet circulum, cùm c m recta tangat in c, omnis angulus rectilineus minor angulo rectilineo d c m, erit etiam minor angulo mixto d c p. Cùm ergo angulus m c p talis sit vt quantumuis repetitus non possit adæquare vel superare rectilineum angulum vel minimum vt ad propositionem 16. tertij Euclidis demonstratur à Clauio: ergo & angulus p c z curuilineus, cùm, vt ostensum est, sit duplus anguli contactûs, talis erit vt quantumuis duplicatus

duplicatus non possit adæquare vel superare vllum rectilineum angulum: ergo multò minus poterit adæquare vel superare angulum mixtum d c p, quem ostendimus esse maiorem quocunque rectilineo angulo abscisso ex angulo rectilineo d c m; ergo angulus d c z seu h b e maior ita se habet ad angulum d c p minorem, vt excessus maioris, qui est angulus curuilineus p c z, quantumuis repetatur non adæquet vel superet, ipsum angulum d c p.

Iam verò quòd excessus quo pondus b maius superat minus c, tale sit vt sibi ipsi coaceruatus superare possit grauitatem c; assumitur inter postulata: sicuti, quòd inæqualium spatiorum excessus quo maius superat minus sibi ipsi toties possit accumulari, vt definitum spatium excedat, assumptum est (λῆμμα vocat Archimedes in epistolâ præfixâ quadraturæ paraboles) quo vsi sunt omnes Geometræ vt testatur idem Archimedes, & quo ipse vtitur in ipsa quadratione paraboles proposit. 16. & 20. & de Conoid. prop. 5. Semel autem eo concesso in spatiis inæqualibus, eadem rationis euidentia constat admittendum esse in ponderibus, & in omnibus aliis in quibus non reperiuntur partes ita dissimiles, sicut sunt duo anguli mixti angulum rectilineum constituentes, quorum vnus est angulus contactûs, alter est huius complementum ad totum rectilineum: quapropter Archimedes hoc ipsum de duabus lineis inæqualibus recta videlicet & circuli circumferentia assumpsit propositione 4. de lineis spiralibus. Quòd si de linea recta, vel de circumferentia circuli est verum; verùm quoque erit de angulo rectilineo, cum anguli rectilinei partes per 33. sexti sint in ratione partium peripheriæ circuli quibus insistunt. Ergo &c. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXV.

SI brachia libræ fuerint inæqualia, æqualibus appensis fiet ad partes longioris inclinatio.

Istud demonstrat Iordanus quæstione 5. in hunc fermè modum. Sit (*Fig. 99.*) libra a b horizonti parallela, sitque c g perpendicularis ad eundem; brachia ex centro c prodeuntia sint c a maius, c b minus, pendeantque ex a & b pondera æqualia. Dico inclinationem debere fieri ad partes brachij c a longioris.

Interuallo rectæ c a describatur circulus a g i, & factis b c, i h æqualibus ex centris c, h describantur circuli æquales b f, i u per puncta b, i. Ex a, i, & b excitentur perpendiculares e a, d b, l i ad rectam a i, quæ tangent circulos in a, i, b; circulus autem i u tanget circulum i g interiùs: ergo angulus l i g erit pars anguli l i u: sed angulo l i u æqualis est angulus d b f; angulo vero l i g, angulus e a g: ergo angulus e a g est minor angulo d b f: sed angulus e a g est obliquitas descensûs ponderis a, & angulus d b f est obliquitas ponderis b: ergo cùm pondera b & a sint ex se æqualia, & pondus a habeat descensum minùs obliquum, eatenúsque

ſit grauius, præponderabit: ergo inclinatio libræ fiet ad partes a; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVI.

NOnnullæ animaduerſiones in demonſtrata à Iordano proponuntur.

Primò apertum eſt demonſtrationes iſtas procedere ex illo poſtulato, grauia ferri deorſum per lineas inuicem parallelas; ac proinde caſtigandum eſſe primum Iordani poſtulatum, quod ita habet, *omnis ponderoſi motum eſſe ad medium*: & pro eo reponendum eſſe, *ponderoſa ferri deorſum per lineas parallelas.*

Secundò dato pondera ferri deorſum per parallelas, ſi libra cuius brachia ſunt æqualia, & vtrinque ſuſpendunt pondera ex ſe æqualia, à ſitu horizonti parallelo ſubmota habet vim reſtituendi ſe eiuſmodi poſitioni. Dico eandem quoque vim obtinere quando brachia fuerint inæqualia, modo pondera ſuſpensâ ſint ſubcontrariè in proportione brachiorum. Ratio huius eſt quòd pondera, quæ ita inuicem ſe habent, æquiponderare ſibi inuicem oſtenduntur in 6. & 7. Archimedis libri primi de æquiponderantibus, ex eo quòd reducantur ad libram habentem brachia, & onera æqualia.

Tertiò ſi motus grauium ſit ad medium quod eſt centrum mundi; dico libram æquis brachiis & oneribus à ſitu horizonti parallelo ſubductam non redituram ſponte ſua in priſtinum ſtatum.

Sit enim (*Fig.* 100.) libra b c in ſitu ad horizontem obliquo, ſitque b depreſſius, c elatius pondus; inter ſe vero b & c ſint æqualia. Sit præterea g centrum mundi, ad quod conueniant rectæ b g, c g: per b & c agantur tangentes b h, c d. Quoniam c eſt ſuperius & b inferius, erit recta g c ex centro educta maior rectâ g b: ergo in triangulo g b c, angulus g b c erit maior angulo g c b: quoniam verò arcus b e eſt quadrante minor, angulus b a e erit acutus: ſed angulus a b h eſt rectus; ergo duæ a g, b h concurrunt ad partes g.

Ex angulo g b c maiori auferatur c b u æqualis minori b c g; cadet ergo punctum u inter puncta c, g. Et quoniam c d, b l ſunt parallelæ, anguli alterni b l c, l c d erunt æquales: ſed b l c externus eſt maior interno & oppoſito l b g in triangulo l b g; ergo angulus l c d eſt maior angulo g b l: ſed anguli l b c, d c b ſunt æquales, vt pote recti, item ablatiu c b, u b c: ergo reſidui l b u, u c d ſunt æquales: cum ergo u c d ſit maior angulo g b l, erit l b u maior angulo g b l; exceſſus autem erit angulus rectilineus, ac proinde maior angulo contactûs.

Vel ergo recta b l cadit inter rectas b u, b g; vel congruit cum b g: vel inter b l, b u cadit b g. Primò cadat recta b l inter b u, b g (*Fig.* 100.) Cùm ex maiori angulo u b l ablato angulo contactûs e b l relinquatur angulus mixtus u b e, & ad minorem g b l addito eodem angulo conta-

ctûs conficiatur g b e, erit g b e minor adhuc, quam u b c, siue quàm u c m: ergo cùm descensus per b e minùs declinet à recto descensu qui fieret per b g, magis verò declinet descensus per c m à recto qui fieret per c g, erit pondus b, ratione sitûs, grauius pondere c: ergo pondus b descendet.

Secundò recta b l congruat rectæ b g (*Fig*. 101.) Cùm angulus l b e mixtus, sit angulus contactûs demptus ex rectilineo u b l, erit u b e, hoc est u c m, maior quam l b e: ergo sicut in priori casu ostensum est, graue b ratione sitûs erit ponderosius, & descendet.

Tertiò inter rectas b l, bu cadat recta b g (*Fig*. 102.) Quoniam recta b l tangit circulum in b: recta b g secabit circulum inter puncta b, o: ergo angulus mixtus g b n erit minor angulo mixto u b n seu u c m: ergo, sicut in primo casu ostensum est, punctum b descendet; quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

In quarta huius libri propositione monuimus libram nullam appellari ab Archimede, nisi fuerit horizonti parallela; cuius rei causa haud scio an fuerit illa ipsa quæ mouit Iordanum ad scribendas propositiones superiores. Vtcunque tamen se tunc habuerit cogitatio Archimedis, demonstrata nunc à Iordano nihil obsunt iis quæ in illa quarta scripsimus; quia possumus in omnibus illius casibus adiungere libram grauitate carentem è qua graue quodcunque suspensum pendeat per parallelas ad horizontem perpendiculares, & nulla grauitate præditas; sicuti ipse Archimedes idipsum facit in libro de quadratura paraboles. Quòd si rotundiùs solui nodum optes, dici potest libræ Archimedeæ principia ita progredi, quasi nullum esset Iordani assumptum, *idem eò velociùs descendere, ac proinde grauius esse, quò eiusdem deorsum motus rectior, & perpendiculo similior fuerit*: Siue enim assumptum istud sit verum, siue falsum; rectè potest aliquid ratione concludi ex hypothesi, quod nullum sit, vt vberius explanatum suprà fuit.

PROPOSITIO XXXVII.

EXperimentum quod ope libræ cœpit Villalpandus in ponderando congio Farnesiano, discutitur.

Villalpandus tom. 3. pag. 351. testatur congium Farnesianum aquâ plenum bilance, quam iustam fuisse ait, filo suspensâ examinatum à se fuisse; inter examinandum autem hoc contigisse. Cùm congius in vnâ lancium statutus fuisset, in alterâ verò pondera primùm inani vasi æquiponderantia, tum lapis decem æquas libras pendens; & cùm deinde in congium aquam P. Griembergerus è quadam ampullâ effunderet, *mirum*, inquit, *dictu effusâ tandem sexies ampullâ vas vsque ad colli terminum ex æquo plenum, pondera simul eleuata, libræque examen ita in medio fixum stetit, vt non mobilis libra*

videretur, sed fixa ac permanens: atque ita permansit donec cominus omnes accedentes, oculati possent esse testes iustæ librationis vasis ex æquo pleni.

Ludouicus Sauot in libro gallicè scripto de numismatis antiquis tertiâ parte c. 32. existimat Villalpandum narrare pondera eleuata fuisse sola vi congij & aquæ immissæ; ergo verò existimo id neque ita narrari, neque re ipsâ factum esse; sed id, vt solet, manu zygostatæ (is erat Grembergerus vt ex narratione conjicitur) sensim totam libram adducentis ad æquilibrij positionem: simul autem atque ita adducta fuere, libram hæsisse in illo situ.

Demus tamen pondere solius congij pleni eleuata fuisse pondera; causamque illius eleuationis simul & æquilibrij consequuti inquiramus. Perdoctus Sauot existimat causam esse reducendã in genus libræ (quod Italis & Hispanis familiare esse dicit) habentis centrum in superiore scapi parte, quod fallacissimum esse satis patet. Istud vt negem duo aut tria faciunt: primum quod ipse Villalpandus paulò ante nimirum pag. 349. libræ veram formam descripsit, vt doceret cuiusmodi libra ad istud adhibenda foret. *Libræ* inquit *perfecta ratio in eo potissimum consistit quod ex rectâ regulâ à medio suspensâ ex vtraque parte sit sibi vniformiter æqualis, crassitudine, longitudine, figurâ, & pondere, atque vt* OMNINO RECTA *sit, & ab eius extremis binæ, æquales, & vniformes pendeant lances.* Cùm ergo deinde testetur libram quam vsurpauit fuisse *æquam*, cæteras verò ipse appellet *iniquas*, satis docet à se adhibitam esse libram, quam paulò superiùs adhibendam esse docuerat.

Alterum est, quod quamuis libra Villalpandi habuisset centrum supra lineam horizonti parallelam ex cuius extremis lances suspenduntur, attamen non apparet causa cur in æquilibrio consistere debuissent, quod tamen factum narratur; nec dubito quin ita euenerit saltem iudicio sensûs, ita vt nullum inclinatæ libræ vestigium agnoscerent quicunque præsentes aderant. Vnde vlteriùs conficio discrimen ponderum admodum exiguum fuisse, si enim notabile fuisset, notabilis quoque inclinatio libræ eiusmodi contigisset. Quod verò Sauot ait, lancem cui impositus erat congius *longè* à mensa cui opposita lanx cum suo pondere incumbebat, eleuatam fuisse; fateor eleuatam narrari à Villalpando; nego tamen *longè* eleuatam dici. Quod cùm non soleat vulgo fieri, nec dicatur factum, placuit tamen huic Authori, vt tantò verosimiliùs dicat aquam ponderis nouem librarum in lance eleuatâ fusam potuisse non solùm attollere vtcunque pondus decem librarum in lance depressa situm, verum etiam vsque eò donec libræ iugum parallelum esset horizonti; quod postremum est prorsus impossibile; nam cùm brachia libræ ponantur æqualia, & horizonti parallela, si pondera sint inæqualia, non æquiponderabunt sibi inuicem. Laudatus itaque Autor gratis dicit cap. 30. tertiæ partis isto Villalpandi in libra tractanda errore induci magnam ponderum varietatem; nullus enim, vt puto, fuit error, & quamuis aliquis fuerit sensu per-

cipi non potuit, nec proinde in eo genere trutinæ quod adhibitum fuit, notabilem aliquod causare ponderum discrimen.

Dixerit fortasse aliquis eleuationem illam libræ potuisse accidere, ex eo quod quando centrum libræ est in medio librili & in eius grauitatis centro, ipsa sua sponte redit ad æquilibrium ab illo deturbata, si causa deturbans cesset vt ex Iordano demonstratum fuit quod contingere nequit si punctum suspensionis fuerit in superiori vel in inferiori scapi parte, prout apertè colligitur ex naturâ huius libræ, & ipse Iordanus huc respicit quæstione 25. ex. Edit. Veneta citata *si sub regula centrum designetur vix continget in hoc situ stabiliri pondera.* Imo Villalpandus postquam dixit vitiosas esse libras quas Romæ vidit omnes, eò quòd earum lances *ex curuatis sursum regulis pendent*, subdit ex harum constitutione hoc vnum necessariò sequi, *vt quamuis æquissima pondera lancibus adhibeantur, quiescere tamen nullà ratione possint.* Vnde colligi posse videtur Villalpandum exponendo libræ vltroneum (si tamen vltroneus fuit) motum donec scapus parallelus horizonti existeret, voluisse indicare omni vitio eam caruisse. Istud tamen non placet, quia iam demonstrauimus illum libræ motum non euenire quando pondera in mundi centrum feruntur, prout ferri iam certum est apud Physicos, & apud ipsum Villalpandum pag. 319.

Non deerit qui dicat germanam huius causam extitisse, quòd cum libra omni ratione exacta esset, cùm primum ventum est ad æqualitatem ponderum, impetum quamuis leuem quo infusa labebatur aqua præponderasse, illumque euanuisse dum ad situm horizonti parallelum peruentum fuit: ergo &c. quod erat propositum.

SCHOLIVM.

Libet hoc loco animaduertere in restituendis ponderibus antiquis & mensuris multos mirâ opinionum varietate laborasse, singulosque in refellendis aliorum sententiis aliquid adducere vnde earum fundamenta conuellantur. Agricola Alciatum Budæumque redarguit, quod cùm per denarios antiquos explorare istud tentarint, iustos non adhibuerint, neque eos quos adhibere debuissent. Villalpandus pag. 305. *Lucam Pætum reprehendit quòd cùm istud aggrediatur per Congij Farnesiani (quem decem aquæ librarum capacem esse ex inscriptione contendit) examen librâ factum; trutinam illam adhibeat quam* Romanam *appellamus; eam enim indicari putat his Pæti verbis* sicque plenum cùm iustissima trutina (qua hodie Romæ vtimur) appendissem, inueni &c. *Eiusmodi autem trutinam*, infinitis propemodum erroribus subjacère *contendit; imò & bilances omnes quas Romæ vidit, iniquas esse eo quod ex* curuatis sursum regulis *constent. Villalpandi rationem in eodem congio trutinando castigat postremus eorum, quos vidi, Sauot, quo autem successu iam diximus. Pede antiquo pondera & mensuras restitui posse concedunt omnes; sed Pætus Colotianum reijcit, aliumque probat; è contrario Sauot cap. 29. partis tertiæ aliis reiectis Colotiano vtendum censet. Pedis ipsius longitudinem in libris editis repræsentatam ab Autoribus, castigandam censent Autores, eò quod charta à prælo madida, postea con-*

trahi soleat, dum exsiccatur; sed contractionis modum alij alium statuunt: Snellius contendit chartam sexagesima sui parte fieri minùs latam, Ricciolus l. 2. Almag. c. 7. n. 2. quinquagesimâ tantùm.

PROPOSITIO XXXVIII.

QVid Aristoteles problemate decimo tertio Mechanicorum intelligat per τὸ ζυγὸν, quod Leonicus *libram* vertit.

Quod Aristoteles cap. 10. proponit his verbis διὰ τί ῥᾷον ὅταν ἄνευ βάρους ᾖ, κινεῖται τὸ ζυγὸν, ἢ ἔχον βάρος, ὁμοίως δὲ καὶ τρόχος &c. Leonicus ita vertit. *Cur faciliùs quando sine pondere est, mouetur libra, quàm cum pondus habet? similique modo rota &c.* Manifestum certè est ex ratione quam Philosophus assignat, vt soluat quæstionem, τὸ ζυγὸν ibi esse machinam quandam quæ circa axem horizonti perpendicularem voluatur, sicuti & ipsa figuli rota cuius etiam meminit, torqueri solet. Istius porrò machinæ vsus est ad onera imposita circumquaque in orbem deferenda, cuiusmodi est in Nonnarum cœnobiis tympanum illud quod gallicè *le tour* (eò quòd torni ratione versetur) & quo foris asportata intrò inuehuntur. Rationem itaque huius reddit Philosophus, quia grauia non solum resistunt quando sursum & in oppositum eius quo sponte vergunt, impelluntur, verùm etiam quando in obliquum & ad latus, vt euenit in versatione huius machinæ quam ζυγὸν appellant.

Cæterùm de hac ipsâ machinâ intelligi consequenter debet idem ipse Aristoteles cap. 13. διὰ τί ῥᾷον κινοῦνται περὶ τὸ αὐτὸ ζυγὸν οἱ μείζους τῶν ἐλαττόνων κόλλοπες, καὶ οἱ αὐτοὶ ὄνοι λεπτότεροι ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἰσχύος τῶν παχυτέρων; An quia, inquit, ζυγὸν & ὄνος pro centro sunt, quæ autem inde procedunt magnitudines sunt instar linearum à centro eductarum? Celeriùs autem & plus mouentur quæ maiorum sunt circulorum ab eadem vi, quàm quę minorum. Subdit post pauca διὸ πρὸς μὲν τὸ ζυγὸν τοὺς κόλλοπας ὄργανα ποιοῦνται, οἷς ῥᾷον στρέφουσι, ἐν δὲ τοῖς ὄνοις πλεῖον γίνεται τὸ ἔξω τοῦ ξύλου, αὕτη δὲ γίνεται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου. Censeo tamen ζυγὸν hic sumi non pro totâ machinâ, sed (prout in aliis plurimis per synecdochen solet) pro eius parte circa quam tanquam cardinem versatur; ab illâ enim vt centro prodeunt trabes seu vectes totum tympani ambitum dimetientes, & tabulatum sustinentes. Κόλλοπες autem vel sunt trabes inde procedentes, vel certè cylindraceum organum, aut aliud simile.

Ex his liquet ζυγὸν hîc non esse *ergatam* vt volunt Henricus Stephanus in lexico, & Philander in cap. 4. libri 9. cùm ergata fune ductorio leuet onera, ζυγὸν autem non leuet, sed circumferat in orbem. Sed omnium longissimè aberasse mihi videtur Budæus in Commentariis linguæ græcæ pag. 471. dum ζυγὸν iugum lyræ interpretatur, quod manu sinistrâ tenent cytharoedi, & κόλλοπας veluti verticilla quibus chordæ intenduntur: cùm lyræ istud iugum nec ad sustinenda onera, eáque circumferenda sit factum; nec appareat quo pacto citiùs versetur quando nullo premitur

onere ; quæ tamen omnia de ſuo iugo tanquam nota Ariſtoteles aſſumit ; cauſa verò huius experimenti allata quid ad lyram ?

Faciliùs conceſſerim Stephano & Philandro, ipſíque interpreti Leonico ὄνον eſſe ſuculam, machinam ſcilicet illam tractoriam, quæ axe horizonti parallelo, & vectibus verſata circumuoluitur fune quo leuantur onera; quò autem gracilior fuerit iſte axis ligneus, eò longior erit pars vectis extra lignum eiuſdem axis excurrens, ac proinde cùm id tantùm quod eſt extra eiuſmodi lignum habeatur pro linea ex centro, tanto erit eiuſmodi linea longior vt Philoſophus docet, quo axis fuerit gracilior. Ergo &c. quod erat propoſitum.

COROLLARIVM.

Hinc patet perfacilè eſſe viros etiam peritiſſimos errare in exponenda vera vocum aliquarum ſignificatione, quoties eæ ſunt deſumptæ ex arte quam ipſi ignorent; quis autem omnes calleat, ſitque omnibus, vt dicitur, armis ornatus ? id certè optandum potius eſt quàm ſperandum ; quamuis enim eiuſmodi generalem omnium comprehenſionem Vitruuius exigat à ſuo quem efformat Architecto, ſatis tamen intelligitur plus exigere quàm oporteat, & quàm fortaſſe velit. Duo hîc referam de quibus interrogatus aliquando fui ab homine qui ex Geometria peti poſſe aliquam lucem ſuſpicabatur, in interpretandis Scriptorum aliquot locis. Quæſiuit de loco illo Liuij l. 8. *Clypeis antea Romani vſi ſunt, deinde poſtquam facti ſunt ſtipendiarij, ſcuta pro clypeis fecere* : vbi (vt rectè notat Turnebus. l. 11. c. 27.) niſi clypeum à ſcuto diſtinguamus, neceſſe eſt à ſenſu aberremus : idem ipſe Liuius iam libro primo ſcripſerat *imperatum eſſe ſecundæ claſſi pro clypeo, ſcutum* ; vbi Halicarnaſſeus pro clypeo ἀσπίδα græcè habet, pro ſcuto θυρεὸν. Reſpondi ſicuti ex Virgilio intelligimus clypeum fuiſſe rotundum, cùm cyclopis oculum, qui rotundæ figuræ eſt, argolico comparet clypeo; ita ex Geometris conſtare θυρεὸν eſſe figuræ periphericæ oblongæ, quæ vulgò dicitur *oualis* : Geometræ enim iſtam figuram vocant ſæpius quidem ἔλλειψιν, aliquando tamen θυρεὸν, vt Eutocius obſeruat Commentariis in Apollonij conica ſub initium. Alterum verò quod rogatus ſum attinet ad locum ex Anaſtaſio Bibliothecario deſumptum, in vita Gregorij II. Autoris hæc ſunt verba ; *trecenta ſeptuaginta quinque millia Sarracenorum vno ſunt die interfecti, vt eiuſdem Eudonis Francorum Ducis miſſa Pontifici epiſtola continebat : mille tantùm quingentos ex Francis fuiſſe mortuos in eodem bello dixerunt. Adijciens quod anno præmiſſo in benedictionem à prædicto viro eis directis tribus ſpongiis, quibus ad vſum menſæ Pontificis apponuntur, in hora qua bellum committebatur idem Eudo Aquitaniæ Princeps populo ſuo per modicas partes tribuens ad ſumendum eis, nec vnus mortuus ex his qui participati ſunt.* Hunc locum emendatiùs repræſentat Typographiæ Regiæ Pariſinæ codex pag. 275. ita enim habet, *qui Pontifex anno præmiſſo in benedictionem eis direxerat tres ſpongias, quibus ad vſum menſæ Pontifices vtebantur.* Quæſiuit igitur à me vir Hiſtoriæ

amantiſſimus an quid edules illæ ſpongiæ ſint ad geometram attineret dicere: ſibi enim non ſatis probari quod doctiſſimus alioqui Scriptor ait illas fuiſſe ſine vlla metaphora ſpongias quibus menſa Pontificis detergi soleret. Reſpondi ſpongias illas tres, mihi videri fuiſſe tres ex illis panes, qui Eulogiarum nomine mitti ſolebant; quem vſum olim viguiſſe, doctè oſtendit Cardinalis Baronius tom. 3. ad ann. 313. Geometram verò ſtatim ſuſpicari à figura & ſimilitudine iſtos panes appellatos fuiſſe ſpongias; ſpongiæ enim, quibus vulgò vtimur, figuram habent quaſi Hemiſphæricam, vt & panes; ſuntque molles & innumeris ocellis præditæ, quod & panibus præſertim primariis competit. Ille quidem nutu fauit coniecturæ; autorem tamen illius ſignificatûs deſiderare viſus eſt, ne minimè dubitaret de meo ſenſu: ſed ſtatim ad manum fuit vigeſimus Iſidori de Originibus liber, vbi cap. 1. panem quemdam deſcribit *ſpongiæ* nomine appellatum: *panis*, inquit, *aqua diutiſſimè laxatus, ſimilam modicam accipit, & fermentum modicum, & habet humectationis pluſquam omnis panis, vnde & ſpongiæ nomen accepit*. Tum planè acquieuit reſponſo, pronuntiauitque illud quod hîc inculcatum volumus, *nunquam Interpretem poſſe nimis cautum eſſe in perquirenda vi verborum quæ vertenda habet, veniáque digniſſimum eſſe, ſi quid propterea tantùm peccet in iſto genere, quia non omnes artes calleat; iuréque potiori in Interprete quàm in Architecto vniuerſum ſcientiarum apparatum requiri oportere.*

SCHOLIVM.

Animaduerſione dignum cenſeo. Primò eſſe quaſdam voces quas Ariſtoteles hic vſurpat in duplici ſignificatione σπάρτον *enim vel* σπαρτίον *apud ipſum eſt aliquando punctum ſuſpenſionis quod* κρεμαστὸν *Archimedes appellat propoſ. 6. quadraturæ parabolæ, aliquando eſt perpendicularis ad horizontem per punctum ſuſpenſionis ducta* τὸ γὰρ σπαρτίον *inquit cap. 2.* ἐστὶ κάθετος. *Vox* πλάστιγξ *ſimiliter modo ſumitur pro totâ librâ cap. 1.* γίνεται γὰρ τὸ μὲν σπάρτον κέντρον, μένει δὲ τοῦτο τὸ δὲ ἐπὶ μέρος τῆς πλάστιγγος, αἱ ἐκ τοῦ κέντρου *modò accipitur pro lance vna quæ ex ſcapo pendet vt cap. 20.* τὸ μὲν οὖν ἐπὶ θάτερα ἔχει πλάστιγγα, τὸ δὲ ἐπὶ θάτερα, ἀντὶ τῆς πλάστιγγος, τὸ σφαίρωμα. *Vox* φάλαγξ *pariter aliquando ſumitur pro ſcapo ſeu pro iugo tranſuerſo vnde lances pendent, vt dum loco citato purpurarij dicuntur excauare occultè ſcapi alteram partem, & in eam liquatum fundere plumbum; aliquando accipitur pro totâ trutinâ* Romana, *capite nimirum 20. de qua fuſiùs poſtea. Porrò vocem* τὸ ζυγὸν *videtur mihi Ariſtoteles quoties pro libra vſurpat, ſumere ſemper pro ea cuius brachia vtrinque ſunt æqualia; cùm tamen* ὁ ζυγὸς *in proëmio & initio cap. 1. ſumi videatur pro quacunque trutinâ, ſicuti ſumitur apud Archimedem propoſitione 6. tetragoniſmi paraboles. Porrò ſicuti apud Græcos eadem vox* ζυγὸς *ſonat & iugum quod ſubeunt boues agrum araturi, & libram de qua nunc agimus; ita pariter* iugum *apud latinos duplicem illum ſignificatum obtinuit; vnde in 2. de diuina. apud Tullium Roma dicitur nata* cum eſſet in iugo luna, *id eſt in ſigno cœleſti quod libra nuncupari ſolet.*

Secundò libræ ſcapum tranſuerſum ætate Ariſtotelis fieri ex ligno conſueuiſſe, vnde technarum ſuarum anſam ſumebant viles illi purpurarij; purpurarios *enim appello*

pello respiciens ad purpurariam *illam Actorum 16.* πορφυρόπωλιν; *quid autem ponderando venderent conchasne, an lanam pannosque infectos colore purpureo an quiduis aliud mihi satis non constat: viles autem fuisse eiusmodi artifices satis illigitur ex eo quòd tam illiberalem fallendi modum adhibere vulgò censerentur; & quòd Plutarchus in vitâ Periclis vt notum ponat, nos quædam mirari, vt purpureas vestes, quorum artifices contemnamus, contra quàm accidat in operibus virtutis, eorum enim admiratio creat in nobis æmulationem, & imitandi studium.*

PROPOSITIO XXXIX.

QVid Aristoteles in Mechanicis scripserit de conuenientia circuli, libræ, & vectis.

I. Aristoteles causam admirationis quam scientiæ machinalis effecta pariunt, in circulum refundit ipso initio Mechanicarum quæstionum, ita vt quæ admiranda vulgò videntur in libra, ad circulum referantur; quæ in vecte, ad libram; reliqua verò prope omnia in machinalibus motibus, ad vectem τὰ περὶ τὸν ζυγὸν γινόμενα εἰς τὸν κύκλον ἀνάγεται τὰ δὲ περὶ τὸν μοχλὸν, εἰς τὸν ζυγὸν, τὰ δ᾽ ἄλλα πάντα σχεδὸν τὰ περὶ τὰς κινήσεις τὰς μηχανικὰς, εἰς τὸν μοχλόν. Hinc problemate tertio inquirens cur exiguæ vires vecte magna mouent pondera, vectis insuper onus accipientes: an inquit huius causa est quod vectis libra sit; ὁ μοχλὸς ζυγὸν κάτωθεν ἔχων τὸ σπαρτίον, καὶ εἰς ἄνισα διῃρημένον; τὸ γὰρ ὑπομόχλιόν ἐστι τὸ σπαρτίον μένει γὰρ ἄμφω ταῦτα ὥσπερ τὸ κέντρον. Problemate verò 20. cur statera paruo appendiculo magna trutinet causam interrogando reddit, ἢ ὅτι ἅμα συμβαίνει ζυγὸν καὶ μοχλὸν εἶναι τὴν φάλαγγα. deinde explicaturus quo pacto φάλαγξ fit μοχλὸς ait πᾶσαν φάλαγγα γίνεσθαι μοχλὸν ἀνεστραμμένον. Libra igitur reducitur ex Aristotele ad circulum quia sicut in circulo est centrum, ita in libra est punctum suspensionis; & sicut in circuli descriptione dum lineæ motu fit, extremum lineæ immotum hæret in centro, ita dum libræ versationes fiunt, longitudines eius describunt circulum ex puncto suspensionis tanquam ex centro; τὸ γὰρ σπαρτίον ἐστὶ κέντρον cap. 9. & cap. 3. dixit tàm ὑπομόχλιον in vecte, quàm σπαρτίον in librâ manere ὥσπερ τὸ κέντρον: ibidem dixit σπαρτίον esse κάθετον quod intelligendum est, quia perpendiculum vnde pendet libra, vel quod libræ examen dirigit, transit per libræ punctum illud manens; vnde fit vt tam ipsum punctum, quàm perpendiculum eodem σπαρτίου nomine donentur; denique sicuti in circulo ab eadem vi illud punctum mouetur citiùs, quod longiùs à centro distat, ita in librâ illud punctum mouetur citiùs ab eadem vi, quod longiùs abest à σπαρτίῳ.

II. Vectis reducitur ad libram; eò quod sicuti in librâ distinguntur σπαρτίον siue punctum immobile, & hinc inde duæ longitudines cum duobus ponderibus examinationem facientibus: ita in vecte est aliquid immobile velut centrum, appellaturque ὑπομόχλιον, latinè apud Vitruuium lib. 10. cap. 8. *preßio* eò quod vecti ad onus admoto suppositum maximè prematur: sunt item duæ longitudines vectis, vna quæ quasi lingua sub

onus ſubditur, altera ex aduerſo quam ſuis viribus premit vectiarius; vnde mouens & motum pondus reſpondent duobus libræ appenſis ponderibus. Hinc facile intelligitur ratio quam problemate 3. paulò ante propoſito aſſignat: cùm enim vectis ea pars quam vectiarius viribus ſuis deprimit ſit inſtar brachij libræ, id verò quod ὑπομοχλίῳ incumbit, inſtar centri; alterũ verò brachium ſit ea quæ velut roſtrum ſub onus mittitur: & cùm mouentis vires admotæ & oneris rurſum leuandi grauitas ſint inſtar ponderum ſuſpenſorum: dicendum eſt ideo faciliùs elationem oneris fieri, quoniam ab æquali pondere celeriùs mouetur longior recta earum quæ à centro ſunt: & quia ſicuti in libra *Vt ſe habet graue mouens ad motum, ita ſubcontrariè ſe habet longitudo moti ad longitudinem mouentis* ὃ τὸ κινούμενον βάρος πρὸς τὸ κινοῦν, τὸ μῆκος πρὸς τὸ μῆκος ἀντιπέπονθε.

III. Ex his clarè liquet Ariſtoteli cognitum fuiſſe theorema illud quod Archimedes longo poſt interuallo temporis demonſtrauit propoſitionibus ſexta & ſeptima libri primi de Æquiponderantibus, quod & nos in alio etiam libræ genere oſtendimus ſuprà propoſitione 18. 19. 20. Archimedes igitur hoc ſummùm ibi præſtitit vt theorema à maioribus acceptum noua ratione demonſtrarit; quod facilè mihi perſuadeo, præcipuè cùm ex principio Ariſtotelico vſurpato initio Mechanicorum poſſit oſtendi diuerſa prorſus via ab Archimedea vt propoſitione ſequenti patebit: ergo &c. quod erat propoſitum.

PROPOSITIO XL.

Grauia ex longitudinibus à centro prodeuntibus ſuſpenſa ſi pari velocitate deſcendant ſe habent vt longitudines ipſæ contrario ordine ſumptæ.

Sit pondus (*fig.* 103.) a b ex ſe grauius, & pondus c ex ſe leuius, affixa punctis b, c ita vt ex illis liberè pendeant: puncta autem b & c ſint extremitates rectarum f c, f b ex centro f eductarum, & horizonti parallelarum. Pari velocitate grauia a b & c intra idem tempus lata fuerint, & graue c decurrerit arcum c e; graue verò a b arcum b d. Dico vt pondus b a ad pondus c, ita eſſe lineam f c ad lineam f b.

Ponderi c pondus a æquale auferatur ex pondere b a, reſiduumque ſit pondus b. Quoniam igitur pari velocitate pondera a b & c feruntur, & pondus a b eſt maius, linea f b erit minor linea f c: ſi enim eſſet maior velociùs ferretur ſolum pondus a, quia deſcriberet peripheriam maiorem intra æquale tempus: ſi autem eſſet æqualis, ſolum pondus a æquevelociter ferretur ob parem rationem: ergo addito pondere b, compoſitum pondus a b velociùs ferretur: eſt ergo recta f b minor recta f c.

Recta f c occurrat arcui b d in u. Quoniam recta f u eſt minor quàm f c; & vt f u recta ad f c rectam, ita eſt arcus c e ad arcum b u, erit c e maior arcu b u; ſed b d arcus eſt æqualis arcui c e: ergo b d arcus eſt maior arcu b u; ergo u cadit inter b & d. Rurſus quoniam ſi ſolum gra-

ue a moueretur ex b, quando ipſum a eſſet in u, graue c eſſet in e, & ſemper angulus b f u foret æqualis vel idem cum angulo c f e: ergo intra illud tempus graue a cauſarit velocitatem b u: ergo pondus b cauſarit reliquam velocitatem u d: nam compoſita velocitas conſtat ex velocitatibus, quas ſingulæ partes totius grauis producunt; ergo vt pondus a ad pondus b, ita arcus b u ad u d arcum: & inuertendo vt pondus b ad pondus a, ita arcus u d ad b u: ergo componendo vt pondus b a ad a ſeu ad c, ita arcus b d ad b u arcum.

Quoniam igitur vt arcus b u ad c e, ita ſe habent ſemidiametri b f, c f: & quoniam arcus c e, b d ſunt æquales, vt arcus b u, b d ita erunt ſemidiametri b f, c f: ſed arcus b u, b d ſe habent vt pondera c & b a, ſicuti oſtenſum fuit; ergo vt pondera c & b a, ita ſemidiametri b f, c f; & inuertendo vt pondus b a ad pondus c, ita ſemidiameter c f ad ſemidiametrum b f; quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM I.

Hinc manifeſtum fit, ſi ex recta b f abſcindatur f h æqualis ipſi f c, & pondus c intelligatur transferri in h, committi æquilibrium. Cùm enim pondera a b & c ex extremis libræ b c ex f ſuſpenſæ punctis b & c, ſint æqualis velocitatis, in deſcendendo erunt pariter æqualis reſiſtentiæ in aſcendendo: ergo committetur æquilibrium & æquiponderabunt ſibi mutuò: recta enim b h ſi ſit horizonti parallela quieſcet; ſi autem ſit ad illum inclinata, ſeſe propria vi in eiuſmodi ſitu collocabit, vt cum Iordano oſtendimus.

COROLLARIVM II.

Grauia, ſi fuerint vt brachia libræ ſubcontrariè ſumpta, æquè ponderabunt. Hæc propoſitio, vt patet, eſt conuerſa illius quam modò oſtendimus: ita verò demonſtratur. Vt b f ad f h brachium libræ, ita ſit pondus h vel c ad pondus a b: dico pondus h æquiponderare ponderi a b; ſiue velocitatem ponderis h eſſe æqualem velocitati ponderis a b. Si enim velocitas ponderis h non eſt æqualis velocitati ponderis a b; erit vel maior vel minor. Sit igitur, ſi fieri poteſt, maior vel minor. Sit verò pondus g, cuius ex h ſuſpenſi velocitas ſit æqualis velocitati ponderis a b ex b ſuſpenſi. Quoniam ex b & c pendent pondera a b & g æquè velocia, pondus a b ad pondus g erit vt recta f h ad f b ex iam demonſtratis; ſed vt recta f h ad f b, ita ponitur eſſe pondus a b ad pondus h: ergo vt pondus a b ad pondus h, ita ipſum pondus a b ad pondus g: ergo pondera g & h ſunt æqualia quod eſt abſurdum, cùm ponantur eſſe inæqualia. Si ergo grauia &c.

COROLLARIVM III.

Hæc eſt, vt puto, via qua vtebantur Mathematici ante Archimedeam demonſtrationem, quam ego quidem iſti quamuis ingenioſè excogitatæ præfero. Cæterùm hanc etiam, quantum diuinare licet in tanta codicis

corruptela methodum adhibuit Iordanus in opuſculo de ponderoſitate editionis Venetæ apud Curtium Troianum anno 1565. nam prima quæſtione hoc videtur velle quod nos propoſitione 34. 35. 36. propoſuimus; & in ſexta, illud quod modò demonſtrauimus.

Iſtud ἀντιπεπονθὸς quod in æqualitate vtrinque conſtituenda interuenit in eò eſt poſitum, quòd quantum vna pars libræ exceditur in pondere, tantum alteram excedat in longitudine à centro, prout enim longiùs receditur ab eo, creſcunt vires premendi deorſum; ac proinde quando libra in æquilibrio poſita diuidi dicitur bifariam, & in æquas partes, ſenſus non eſt vel longitudines eſſe æquàles, vel pondera ipſa inuicem; ſed virtutem ponderandi quæ ex ipſo pondere & ex ipſa diſtantia ſimul ſumitur, eſſe vtrinque æqualem. Quapropter mirum videri non debet ſi ab Ariſtotele quæſtione 20. id quod excurrit à centro φάλαγγος (genus eſt ſtateræ vt propoſitione ſequenti dicemus) ad eam partem cui adhæret pondus, quod σφαίρωμα nominauit, ἥμισυ τῆς φάλαγγος dicatur: eſt enim ἥμισυ vnà cum pondere quantum ad virtutem ponderandi. Atque hoc loquendi genere id pondus quod in ſe eſt minus, dicitur tamen ab Archimede propoſitione 5. aliàs 7. libri primi Æquiponderantium μεῖζον ὥστε ἰσοῤῥοπεῖν: vel vt interpretatur Eutocius μεῖζον κατὰ τὴν ἰσοῤῥοπίαν *maius quantum ad virtutem deprimendæ libræ ſpectat.* Quia vero virtutis Iuſtitiæ genuinum ſymbolum eſt libra, ideo illam etiam teſte Ariſtotele ἀντιπεπονθὸς κατὰ ἀναλογίαν ſectatur, quod etiam δίκαιον à δίχα quaſi bipartitum græcè nominari idem affirmat; vnde parœmia δίκαιον σταθμίον & δικαιότερος ζυγάνης.

PROPOSITIO XLI.

QVodnam trutinæ genus ſit φάλαγξ, & quâ ratione paruo appendiculo magna penſitet onera de mente Ariſtotelis in Mechanicis quæſtionibus.

Philoſophus problemate 20. inquirit cur φάλαγξ qua carnes ſuo tempore ponderabantur paruo appendiculo magna trutinaret onera, cùm alioqui tota non eſſet niſi ἡμιζύγιον; qua enim parte carnes imponebantur ſolùm ſuſpendebatur lanx: in alterâ verò parte ſola erat φάλαγξ.

I. Vt Ariſtotelis mens planè percipiatur prænoto quædam. Primò eſſe vulgare trutinæ genus quam *Romanam* dicunt, & quæ vt ait Iſidorus l. 16. orig. cap. 24. *duas lances non habet; ſed virga eſt ſignata libris & vnciis, & vago pondere menſurata.* Subdit abſolutè dici *Campanam*, idque à regione Italiæ nomen accepiſſe vbi primùm eius vſus repertus eſt. Quod ad inuentores & nomen attinet, crediderim ita verum eſſe, vt id nominis, cùm apud Antiquiores non extet, poſt irruptionem Gottorum inditum ſit ſtateræ; ideóque Campani inuentores eius dicantur, quòd, poſtquàm hac hominum illuvie omnes pæne artes extinctæ erant, ipſi ſtateram reſtaurarint, ſuóque opificio nobilitarint. Cæterùm iſto ipſo Iſidori loco abu-

titur Angelus Rocca Episcopus Tagastensis in tractatu de Campanis pag. 26. dum ex eo probat tintinnabulum æreum iam tum *campanam* esse appellatum. Rectiùs ista *campanæ* voce pro staterâ vtitur Anastasius Bibliothecarius in vitâ Eleemosynarij.

II. Secundò idem trutinæ genus longe ante Isidorum descripsit Vitruuius l. 10. cap. 8. appellatque *stateram*: itáque eam describit vt *ansa quâ sustinetur sit propiùs caput illud scapi collocata, Vnde lancula pendet* (hodiè pro lance, vncos substituunt artifices) *æquipondium verò in alteram partem scapi per puncta vagando, quo longiùs, aut etiam ad extremum perducitur paulò, etiam pari pondere, amplissimam pensionem parem perficit, per scapi librationem & examinationem longiùs à centro* (id est à puncto vbi axiculi quibus immittitur ansa, prominent) *recedentem.*

III. Tertiò Eustathius Iliad. μ. pag. 876. animaduertit ab Homero describente Achiuorum & Troianorum diu inuicem pugnantium ἰσοπαλὲς, & si ita loqui liceat ἀτάλαντον, in neutram partem inclinante victoriâ, vsurpari comparationem petitam à pauperculâ æquitatis tamen amante fœminâ quæ summa exactione lanæ pensum aliis distribuendum exploratura, adhibet vel τάλαντα, vel σαθμὸν. Quibus verbis duo genera trutinarum designari ipse putat, illo libram geminis lancibus instructam, ideóque non in singulari τάλαντον, sed in plurali τάλαντα scriptum esse à Poeta, vt indicaret τὰς δύο πλάστιγγας τῦ σαθμῦ; isto verò ὁλκλώ τινα ὄγκυ πρὸς ὃν ἀντιστηκῦσι τὰ σαθμώμενον, *magnitudinis cuiusdam pondus cui ex aduerso quæ ponderanda sunt, pari pensione opponuntur* quibus verbis apertum est istud aliud trutinæ genus ad *stateram* esse reuocandum; cùm non duas lances, sed ex vna parte pondus quoddam habeat, ad quod examinantur ea quorum pondus perspectum habere cupimus. Talem porrò esse ait τὴν λίτραν, καὶ τὰ τοιαῦτα. Sciendum verò est ipsum paulo ante docuisse hanc vocem σαθμὸς posse sumi latè & strictè (quod & multis aliis competit) latè quidem & ὁλικῶς vsurpari pro trutina binis constante lanculis, cui quinque respondeant voces τάλαντον, τρυτάνη, σαθμὸς, ζυγὸς, πλάστυγγες. Vnde liquet λίτραν, esse diuersam trutinæ formam, & ex vna parte constitui *pondere*, quod quia communiter librale erat, libra à pondere vago vel fixo, fortasse appellata fuit: dum autem dixit *alia id genus* fortasse indicauit φάλαγγα.

IV. Quartò staterarum duplex concipi potest genus primò quidem ita vt pondus illud sit vagum; centrum autem vnde fit suspensio sit fixum idemque in omni libratione; quo pacto contingit in *Romanis* nostris, & in illa quam ex Vitruuio, Isidoroque retulimus. Secundò ita vt pondus ipsum fixum semper hæreat eidem scapi capiti: centrum autem sit vagum, & scapus modo ex vno puncto suspendatur, modo ex alio, prout ratio ponderis & rei ponderatæ exiget. His positis in hunc modum.

V. Assero problema illud vigesimum intelligi debere de postrema hac stateræ ratione, cuius vagum sit centrum, & pondus fixum. Esto scapus (*Fig.* 104.) a b parallelus (vt solet) horizonti, sustinens ex puncto b lan-

cem b c, & in puncto a habens fixum pondus a in ſphærulæ, ſi placet, modum. Iſte ſcapus hac arte ſit compactus vt ex quotlibet punctis o, n, m, l, h, g, f liberè ſuſpendi poſſit. Appoſitæ præterea ſint notulæ indices ponderis quod in lance eſſe oportuerit, cum ſcapus ex punctis ſingulis ſuſpenſus hæſerit in æquilibrio, horizonti parallelus; vt ita dignoſci poſſit quanti ſit ponderis res quæ lance ſuſtinebitur. Dico hanc eſſe φάλαγγα, de qua problema agit, pondúſque a eſſe illud σφαίρωμα ὃ τῷ ζυγῷ πρόσκειται, & quod ibidem τὸ σταθμὸν dicitur: puncta verò f, g, h &c. eſſe illa σπαρτία ratione quorum φάλαγξ a b habet vt æquiualeat multiplici libræ, ὧν τῶν σπαρτίων ἕκαστον γίνεται τὸ κέντρον τῆς φάλαγγος, *quatenus vnumquodque ſpartorum euadit centrum phalangis*; dum ſcilicet æquilibrium committitur phalange a b ſuſpenſa modò ex f, modò ex g &c. Quid autem adderetur ſcapo vt ſuſpendi ex illis punctis commodè poſſet, non explicat Ariſtoteles; vnde nec ſatis conſtat cuiuſmodi eſſent hæc σπαρτία, quæ Blancanus in illam quæſtionem Mechanicorum vigeſimam vertit *trutinas*; Philander verò in Vitruuij cap. 8. lib. 10. *puncta, lineas, ſiue denticulos* interpretatur. Quomodocunque tamen explicetur illorum σπαρτίων modus, certum eſt phalanga eſſe ſtateram poſtremo loco ſuprà propoſitam; ſubdit enim Ariſtoteles τοιοῦτον δὲ ὄν, πολλὰ ζυγά ἐστι καὶ τοσαῦτα, ὅσαπερ ἐστι σπαρτία, ἀεὶ δὲ τὸ ἐγγύτερον σπαρτίον τῆς πλάστιγγος καὶ τοῦ ἱσταμένου βάρους, μεῖζον ἕλκει βάρος, διὰ τὸ γένεσθαι τὴν μὲν φάλαγγα πᾶσαν μοχλὸν ἀνεστραμμένον, ὑπομόχλιον μὲν γὰρ τὸ σπαρτίον &c. *Cùm ita ſit exſtructa phalanx, multis æquiualet libris; tótque, quot habet ſparta: ſemper verò ſpartum quod propinquius eſt lanculæ & ponderi ſuperpoſito facit leuationem maioris oneris; quia phalanx omnis eſt vectis inuerſus: nam hypomochlij vicem ſubit ſpartum* &c.

VI. At cuius ſtructuræ fuerit hæc phalanx, vt hypomochlij vicem gereret ſpartum illud, quod & centrum libræ exiſteret; & vt libra eſſet vectis inuerſus, quis planè explicet? Cùm enim hypomochlio innitatur vectis ab ipſo hypomochlio diuerſus, qui fieri poteſt vt phalanx ſit pro vecte; & pro hypomochlio, centrum phalangis vnde ipſa pendet? Et cùm inuerſus vectis ſit propriè quando hypomochlion eſt ſupra vectem, pondúſque vecte ipſo non eleuatur ſurſum, ſed deorſum truditur; quis explicet quonam pacto iſtud quadret phalangi? Blancanus ait *ſtateram eſſe vectem, quamuis quodammodo inuerſum, quia ipſius fulcimentum ſiue hypomochlium eſt trutina ipſa ſupernè collocata, pondus verò leuandum eſt ipſa merx, potentia verò appendiculum a.* Hæc explicatio mihi non ſatisfacit non ſolùm quia σπαρτία facit eſſe diuerſa à phalange, cùm tamen Ariſtoteles dicat ea eſſe centrum ipſius phalangis quà libram repræſentat; ſed etiam quia licet anſa libræ ſit ſupra ſcapum, quà tamen ſcapum ſuſtinet, vt liberè in alterutram partem inclinetur, eſt ſub ipſum ſcapum. Licet autem clarè intelligere nequeamus modum huius inuerſionis, quam ſatis non explanauit Ariſtoteles; propterea tamen confundere non debemus quæ ipſe apertè diſtinxit: ea propter Philandro non aſſentimur exiſtimanti Ariſtotelem hîc loqui de primo & vulgari genere ſtateræ deſcriptæ à Vitruuio eo loci: attamen

excusamus rei difficultate inconstantiam illius in explicandis σπαρτίοις; modò enim concedit esse puncta, seu lineas atque denticulos quibus scapus est distinctus, modò negat eadem puncta in scapo esse, cum pro hypomochlio sunt.

VII. Manifestum ex Aristotelis verbis est ζυγὸν hoc problemate vsurpari pro trutina quacunque siue eius à centro longitudines fuerint æquales siue inæquales, dummodo vnum centrum fixum habuerit; phalanga autem esse illud stateræ genus cuius pondus est fixum quidem, centrum autem non est idem, sed vagum.

VIII. Manifesta denique est solutio problematis: cum enim idem ab eadem vi impulsum eò velociùs feratur affixum termino lineæ circulum describentis, quò ipsa linea fuerit longior, & cùm in librâ centrum circuli sit punctum supensionis; & in vecte hypomochlium; causa, cur magna suspendantur onera, erit quia centrum sumitur prope scapi illud caput à quo lanx pendet: ergo &c. quod erat propositum.

PROPOSITIO XLII.

VTrum antiquitùs, apud Hebræos maximè, fuerit vsus stateræ *illius quam vulgus Romanam* appellat.

I. Villalpanda tom. 3. in Ezechielem pag. 349. & 350. repudiat istud stateræ genus veluti *deceptionum* seminarium, ideoque quodammodo prohibitum fuisse contendit Hebræis, nullamque eius mentionem extare in sacris eorum codicibus, quod ipsum penè affirmat de Romanis antiquioribus. Ego verò licet libram eiusmodi vitiosam fore concluserim in corollario secundo vigesimæ primæ, si suspensio eius fieret proximè centrum mundi, nolim tamen videri assignasse causam eiuscemodi deceptionum, cùm inde nulla oriatur quæ sensu percipi queat, eò quod vt ibi dixi, portio circuli ex centro mundi descripti & scapus libræ rectus, iudicio sensûs, nihil discrepent. Ex dictis verò satis constat eiusmodi fallacias, si quæ sint, oriri ex vitio vel artificis, vel materiæ, & perinde posse esse communes alteri cuiuis librandi instrumento; constat præterea iam olim apud Græcos, & saltem ætate Vitruuij apud Romanos stateram fuisse in vsu; nec Vitruuium de eâ vt recens inuectâ, aut nullo adhuc nomine insignitâ scribere.

II. Reliquum igitur est vt ostendamus sacras paginas illius meminisse. Egregius ad istud se offert locus Isai. 42. *quis librauit in pondere montes, & colles in statera?* vbi Dei potestas & sapientia ἀνθρωποπαθῶς describitur ex eo quod soleant homines maiora pondera trutinis *Romanis* librare, minora verò bilancibus. *Quis* inquit textus originalis *phalange* בפלס (acutè animaduertit Plantauitius Pausanus Episcopus Lodouiensis pag. 574. primi tomi ab Hebræâ voce פלס profectam fuisse græcam φάλαγξ) *montes* vt pote immensæ molis *pensitauit*, & *bilancibus* במאזנים *colles* instar leuiorum sarcinarum trutinauit? Ista enim vox Hæbraica ex origine & di-

numero trutinam duarum lanqium, quaſi duarum aurium ſonat; vt *biſaurem* potius quàm *bilancem* eam dixerit ſapientiſſimus ſacræ linguæ Autor, quò oſtenderet Iuſtitiam, (cuius ſymbolum eſt bilanx) duas aures in iudicando adhibere, vnamque ita præbere vni partium, vt alteri ſeruet alteram. Neque tantùm vocem פלס phalangem interpretor ex identitate radicalium literarum, & ex eo quòd trutinæ duarum lancium ad quam leuiora exiguntur, nulla alia meliùs opponi poſſit eâ quæ illarum altera ſaltem caret, & loco illius pondus aut centrum vagum habet trutinandis magnis oneribus opportuniſſimum: verùm etiam quia omnia paſſim onomaſtica tam Rabbinorum quàm Chriſtianorum, præcipuè Pagnini, in eam ſignificationem conſentiunt.

III. Interpretes LXX. videntur omne dubium tollere dum priorem vocem vertunt ἐν σταθμῷ, poſteriorem ἐν ζυγῷ. Cum propoſitione quadrageſima prima oſtenderimus τὸν σταθμὸν eſſe trutinæ illud genus quod vni lancium ſuſtinenti onera examinanda opponit certum aliquod pondus, quod vel re ipſa, vt in ſtatera Vitruuiana, vel δυνάμει, vt in phalange Ariſtotelica, ſit vagum. Hoc ipſum indicat originis affinitas, vnde enim σταθμὸς græcè, inde *ſtatera* latinè nimirum vt ait Euſtathius à στάσει, ἱστᾶ γὰρ ἐν ἰσότητι τὰς ὁλκάς. Non modicum denique fauet verſio vulgata, dum ἐν σταθμῷ reddidit *in pondere*: & *non in ponderibus*: iſte enim trutinæ modus non habet niſi vnum pondus, quod vagando per puncta ſcapi ampliſſimas penſiones facit, & quod *æquilibrium* in ſuæ ſtateræ deſcriptione vocat Vitruuius; Ariſtoteles verò in ſua phalange modò σφαίρωμα, modò τὸ σταθμὸν appellat; Iſidorus autem prop. 41. antecedenti laudatus *pondus vagum* nominat. Neq; vllum mouere debet, quòd ἐν ζυγῷ verterit *in ſtatera*: ſicuti enim, vt memorata iam propoſitione diximus, vox græca σταθμὸς nunc latè, nunc ſpecialiter ſumitur teſte Euſtathio; ita & quæ ipſi latinè reſpondet *ſtatera*.

IV. Hoc ipſum enenit aliis eiuſmodi inſtrumenti nominibus; alioqui frigidè admodum interpreteris hunc Procli locum l. 2. in Euclidem p. 18. vbi hoc laudi Matheſeos vertit quòd ζυγὰ καὶ τρυτάνας ἐδημιούργησεν, & alium Vitruuij l. 10. cap. 1. ſub finem *trutinarum librarumque ponderibus examinatio reperta vindicat ab iniquitate iuſtis moribus vitam.* Ariſtoteles plurima eiuſmodi paſſim habet vt ex adnotatis ſatis liquet, & ex eo quòd phalangis vocem ipſi ζυγῷ attribuat in fine cap. 1. Mechanicarum quæſtionum: phalanx enim ſeu phalanga eſt teres fuſtis, indeque *phalangarij* ſunt baiuli à phalangis quibus onera ponderáque ferunt, id maximè cauentes vt onus ex media phalanga pendeat, alioquin inæqualiter premunt ſuſtinentes, vt rectè aduertit Vitruuius l. 10. c. 8. Cùm igitur φάλαγξ ſit teres fuſtis quo onera quaſi librata tranſuehuntur, non eſt mirum quod modo pro ſcapo cuiuſcunque libræ accipiatur, modò pro ſcapo *ſtateræ* preſsè ſumptæ, ſeu potiùs pro tota ipſa *ſtaterâ*, quam primo aſpectu fuſtem eſſe dixeris. Euſtathius Iliad. B. pag. 149. nomen partis attrbui toti docet in aliis eiuſdem ſignificationis vocibus tribus τρυτάνη, πλάστιγξ, ζυγὸς: propriè ζυγὸς eſt ſcapus,

pus, diciturque metaphoricè iugum eò quod illi lances vt iugo iuuencæ sint alligatæ: πλάστιγξ propriè est lancula cui onera imponuntur: τρυτάνη denique quid sit non explicat. Cornutus in saty. 1. Persij scribit trutinam esse foramen intra quod est lingua bilancis ad quod est examinatio; idem fortasse dici possit de τρυτάνη quod de trutina, ipsa enim vocum similitudo satis insinuat eiusdem illas esse significationis, vnamque ab altera esse profectam. Ergo &c. quod erat propositum.

PROPOSITIO XLIII.

CVius momenti sit libræ vsus ad discernendum quanta in integro opere sit portio argenti auro mista.

Vitruuius l. 9. cap. 3. agens de coronâ illâ Hieronis votiuâ cui Artifex, cum eam ex auro puro conflare debuisset, argentum admiscuerat, narrat furtum ab Archimede deprehensum fuisse hac ratione. *Duas*, inquit, *dicitur fecisse massas æquo pondere, quo etiam fuerat corona, vnam ex auro, alteram ex argento. Cum ita fecisset, vas amplum ad summa labra impleuit aquâ, in quo demisit argenteam massam; cuius quanta magnitudo in vase depressa est, tantùm aquæ effluxit. Ita exemptâ massâ quantò minus factum fuerat refudit, sextario mensus, vt eodem modo, quo prius fuerat, ad labra æquaretur. Ita ex eo inuenit quantum ad certum pondus argenti certa aquæ mensura responderet. Cum id expertus esset, tum auream massam similiter pleno vase demisit, & eâ exemptâ, eadem ratione mensurâ additâ, inuenit ex aquâ non tantum defluxisse, sed tantum minus, quantum minus magno corpore eodem pondere auri massa esset, quàm argenti. Postea verò repleto vase in eadem aquâ ipsâ coronâ demissâ, inuenit plus aquæ defluxisse in coronam quam in auream eodem pondere massam; & ita ex eo quod plus defluxerat aquæ in coronâ quàm in massa ratiocinatus, deprehendit argenti in auro mixtionem, & manifestum furtum redemptoris.*

Ego ægrè admodum adducor vt credam ab Archimede exploratum hoc pacto fuisse eiectæ aquæ pondus. Primò quidem, quoniam illi non poterat perspecta non esse via istud inquirendi per libram; cùm theoremata quibus demonstratur istius modi methodus, ab illo ad nos profecta sint, vt ex dicendis patebit. Secundò quia ille modus à Vitruuio non tam ex propriâ quã ex vulgi opinione expositus (non enim id de suo affirmat, sed ita *dici* testatur) valde remotus est ab eâ diligentia quam Mathesis sectatur. Non enim constare potest quandonam tantum aquæ infusum sit in vas plenum, vt amplius nihil capere possit; cùm quotidiano experimento doceamur, plures nummos in vas quod plenum putamus immitti, absque eò quod quicquam aquæ efluat: quomodo ergo extractâ massâ tantundem aquæ refundi poterat, quantum exundarat? & quomodo ratio iniri poterat eius aquæ quam massa illa, dum ex vase eximebatur, sibi adhærescentem asportabat? Multò igitur probatior in hoc genere est libra, quâ venamur aquam ipsis nummis depressis respondentem, nec quod ipsis

adhæret liquoris dispendium in ratiocinio isto facimus, vt ex sequentibus problematis manifestum erit.

PROBLEMA I.

PEr duas eiusdem corporis non liquidi, & aquâ grauioris suspensiones, vnam in aëre, alteram in aquâ ipsâ factam, inuestigare pondus aquæ quæ tantæ sit magnitudinis, quantæ ipsum corpus suspensum: hæc autem est quam demersum pondus in vas plenum expelleret.

Quoniam propter irregularem quorundam corporum compositionem non potest eorundem magnitudinis per geometriam certa proportio inueniri; & quoniam pretia quorundam quæ emuntur & venduntur, debent magnitudinibus ipsorum corporum proportionari, necessarium fuit, inquit Iordanus sub finem opusculi de ponderositate fol. 16. editionis Venetæ suprà laudatæ, *per ipsorum pondera corporum, eorum magnitudinum proportionem reperire, vt singulis magnitudinibus per proportiones suorum ponderum cognitis, valeant certa pretia sociari. Primò igitur instrumenti per quod examinantur ponderum quantitates, ratio danda est. Est ergo examinis ponderum virgula recta, in cuius medio est foramen recipiens perpendiculum, cum quo sustinetur virgula, cum ponderibus in extremitatibus ipsius appensis, cum debet magnitudinis alicuius quantitas per mensuras ponderũ deprehendi &c.* Hæc ille emendatis Typographi erratis; quæ omnia perspicua sunt, & ostendunt non vtilitates solùm alias huius suspensionis, verùm instrumentum etiam examinis cuiusmodi sit docent; virgula enim illa est librile transuersum, quem scapum appellauit Vitruuius. Hoc verò addi debet, secundam, suspensionem quæ fit in aquâ, ita intelligi debere, vt tàm scapus, quàm pondus ex aduerso magnitudinis examinandæ appensum, extent in aëre; solaque magnitudo vinculo quod in mole & grauitate cum aquâ conueniat, pendula mergatur: eiusmodi autem sunt pili equini ex Marino Gethaldo apud Cabæum Meteor. lib. 2. tex. 6. qu. 13. initio; his ita positis.

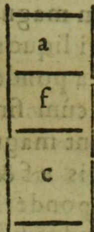
a

b . . . . c . . . d

Sit magnitudo a aquâ grauior, cuius in aëre libratæ pondus sit b d, & in aquâ sit b c: erit b c minus ipso b d, per ea quæ Archimedes demonstrat lib. 1. in 7. propositione de iis quæ vehuntur in aqua. Dico magnitudinis aqueæ ipsi a paris, pondus esse c d. Quoniam enim magnitudo a in humido leuiore mersa suspenditur pondere b c, erit per 7. illam Archimedis, in eodem humido tantò leuior, quanta est grauitas humidi magnitudine æqualis: atqui illud, quanto est leuior, est pondus c d: ergo pondus c d est pondus magnitudinis aqueæ ipsi a paris. Si ergo ex pondere b d auferatur pondus b c, differentia c d erit pondus quæsitum; quod erat faciendum. Idem verò sequetur si loco aquæ ponatur quiuis alius liquor ipso graui a leuius; quod & in sequentibus intelligi debet.

PROBLEMA II.

PEr duas eiusdem corporis non liquidi, aquâ leuioris suspensiones, vnam in aëre, alteram in aquâ modo infra præscribendo factas, inuestigare idipsum quod in priori propositum fuit.



Sit magnitudo a f aqua leuior, & ligetur vnà cum magnitudine c aqua grauiore, ita vt tota magnitudo a c sit ipsâ aquâ grauior. Magnitudo igitur a f in aëre suspendatur pondere d g; magnitudo verò sola c in aqua suspendatur pondere g b; ipsa autem composita magnitudo a f c in aqua æquiponderet ponderi e b: pondus b e erit minus pondere b g, per 5. Archimedis in libro laudato. Dico magnitudinis aqueę ipsi a f paris pondus esse d e conflatum ex g d, & ex differentia g e.

Quoniam magnitudo a f est aqua leuior, demissa in humidum vsque eò demergetur, vt tanta moles humidi quanta est partis demersæ, eandem quam tota magnitudo a f, grauitatem habeat, ex demonstratis ab Archimede propositione 5. Pars ergo demersa sit f: ergo aqua tanti ponderis, quanti est magnitudo f a, erit æqualis mole ipsi f. Rursus quoniam composita magnitudo a f c in aquam proprio pondere mersa fuit, & eius pars a f est aqua leuior; tota magnitudo a f c sursum tanta vi feretur; quantò aqua, magnitudine par ipsi a f, grauior est ipsa magnitudine a f, per sextam eiusdem libri Archimedis: atqui moles aquæ ipsi a f æqualis & distributa in duas partes quarum vna sit æqualis moli f, altera moli a, per grauitatem partis prioris est æquè grauis atque moles a f: ergo aqua tantæ molis quantæ est a f, superat grauitatem magnitudinis a f, grauitate posterioris partis, quam diximus magnitudine æqualem esse ipsi a: ergo leuitas qua a f sursum fertur tanta est, quanta est grauitas molis a. Atqui leuitas qua a f sursum fertur, tanta est quantum est pondus e g; cùm tantò leuior effecta sit magnitudo c, ex accessu magnitudinis a f: ergo d e grauitas composita ex grauitatibus g d, g e est grauitas molis aqueæ paris ipsi magnitudini a f. Si ergo ponderi g d inuento addatur e g differentia ponderum b e, b g inuentorum; habebitur pondus d e, quod inuestigandum erat.

PROBLEMA III.

PRoportionem quam in grauitate habent duo dati liquores, positâ paritate magnitudinis, inuenire per suspensionem eiusdem grauis non liquidi.

Sint duo liquores a & b; oporteatque inuenire eorum in grauitate proportionem, posita æqualitate molis. Habeatur graue d non liquidum,

a. b.

d.

e...h..g....f

& grauius singulis liquoribus. Pondus magnitudinis d in aëre sit e f; in liquore a, sit e g, (quod vt in problemate primo ostensum fuit erit minus ipso e f) pondus eiusdem d, in liquore b suspensæ sit e h, (quod etiam erit minus ipso e f propter eandem causam.) Dico vt f g pondus ad pondus f h, ita esse grauitatem liquoris a ad grauitatem liquoris b, posita æqualitate eorundem liquorum in magnitudine. Quoniam enim pondus g f est per primum problema æquale ponderi liquoris a parem magnitudini d molem obtinenti; & pondus h f est etiam æquale ponderi liquoris b parem eidem magnitudini d molem obtinenti: ergo liquor a ponderis f g, & liquor b ponderis h f sunt magnitudine pares inter se, cùm sint pares vni tertiæ magnitudini d: ergo liquores a & b si pares sint magnitudine habent se inuicem in grauitate, vt f g, f h. Si ergo ponderis e f & ponderis e g sumatur differentia, inuentum erit pondus g f; & si ponderis eiusdem e f & ponderis e h sumatur differentia inuentum erit pondus h f: atque ita factum erit id, quod faciendum proponebatur.

PROBLEMA IV.

DAtâ massâ in quâ admixtio sit duorum metallorum in mole æquali inæqualiter ponderantium, inuenire quantum vniuscuiusque metalli commixtum sit nullâ massæ solutione factâ.

Habendæ sunt duæ aliæ massæ singulæ tantùm ponderantes quantùm data, quarum vna sit ex vno metallo puro; altera ex altero item puro. Præterea inueniendum est (quo autem pacto dicetur paulò post) quanti ponderis aquam quælibet trium massa excludat dum in eius locum succedit.

Massa igitur data sit s t mixta; pura & ponderosior sit m n; pura minus ponderosa sit p q. Præterea numerus partium aquæ æqualis ponderis & molis exclusarum à massâ s t sit i l; numerus verò exclusarum à massa m n, sit a c; & denique numerus exclusarum à massa p q sit d h. His ita positis propositum sit inuenire quantum ex vnaquaque massâ purâ sit in mixta s t.

Sit peractum id quod quæritur; sitque pars s u ex pura m n, & numerus partium aquæ expulsarum ab ipsa sit i κ; sit verò pars u t ex pura p q: numerus igitur partium expulsarum ab ipsa erit κ l. Quoniam massa m n in æquali mole ponitur ponderosior quàm p q, erit moles p q maior mole m n, cùm illi æquiponderet: moles autem s t erit maior quàm m n, minor verò quàm p q; cúmque vt se habent moles, ita se habeant aquæ expulsæ, erit aqua d h maior aqua a c, & aqua i l; ipsa autem i l erit maior aqua a c; cúmque aquas a c, d h, i l vniformes in mole & pondere (vt ponimus) communis mensura metiatur, erit numerus mensurarum quas aqua d h continet maior numero a c: numerus autem i l erit minor numero d h; maior verò numero a c.

Vt pondus partis s u ad pondus partis u t, ita fiat pondus p r ad r q & pondus m o ad m n. Quoniam massa p q ponitur vniformis in mole & pondere, ergo vt moles p r ad molem r q, ita pondus molis p r ad pondus molis r q: similique ratione vt moles m o ad molem o n, ita erit pondus m o ad pondus o h; ponitur enim moles m n esse vniformis mole & grauitate. Ex numero a c abscindatur a b æqualis numero i κ, erit a b numerus minor numero a c; si enim esset vel æqualis vel maior, partes metalli m n ipsi respondentes vel æquè vel magis ponderarent quàm omnes m n, quod est contra hypothesim: nam partes metalli puri m n quæ sunt in mixta s t, minus ponderant quàm tota massa s t, & quàm m n ipsi s t æquiponderans. Numero κ l fiat h f æqualis, quoniam i l est minor quam h d, erit κ l seu h f numerus multò minor numero h d. Et quoniam a c est minor quam i l, ipse verò i l minor quam h d, erit excessus quo numerus i l superat numerum a c, minor excessu quo numerus d h superat eundem a c. Sit ergo h g excessus quo numerus i l superat numerum a c: ergo numerus g d est maior numero c a. Fiat g e ipsi c a æqualis; quoniam g h est excessus quo numerus i l superat numerum a c seu e g: ergo numerus e h est æqualis numero i l.

Rursus quoniam massa p q est vniformis; ergo vt moles p q ad r q, ita erit aqua d h, quam grauitate & mole vniformem esse ponimus, ad aquam f h (sunt enim t u, r q mole & grauitate pares, ac proinde excludunt mole & grauitate pares aquas κ l, f h) ergo diuidendo vt moles seu pondus p r ad molem seu pondus r q; ita erit moles seu pondus d f, ad molem seu pondus f h: sed vt moles d f ad molem f h, ita est numerus d f ad numerum f h: ergo vt pondus p r ad pondus r q, ita est numerus d f ad numerum f h. Simili prorsus ratione ostendetur vt pondus m o ad o n ita esse numerum a b ad b c: sed vt pondus m o ad o n, ita est pondus p r ad r q: ergo vt numerus d f ad f h, ita est numerus a b ad b c.

Rursus numero a c fiat i z æqualis; erunt ergo g h, z l æquales numeri, ac proinde cùm κ l f h sint tiam æquales, residui κ z f d erunt etiam æquales: cúmque i z a c sint æquales: & i κ a b sint etiã æquales ex constructione, erunt b c κ z æquales: ergo tres numeri b c, f g, κ z sunt æquales, tresque residui a b, e f, i z sunt etiam ęquales.

a . . . . . b c   m——o——n

d . . . e . . . . . . f . . . . g . . h   p————r——q

i . . . . . . k . . . . z . . l   s————u——t

Quoniam ergo vt numerus d f ad f h, ita est numerus a b ad b c vt ostensum fuit, siue ita est numerus e f ad f g: ergo alternando vt numerus d f ad e f, ita numerus f h ad f g: & per diuisionem rationis vt numerus d f ad d e, ita est numerus f h ad g h: & alternando vt numerus d f ad f h, ita est numerus d e ad g h. Sed vt numerus d f ad f h, ita est pondus p r ad r q;

& vt pondus p r ad r q, ita est pondus s u ad u t: ergo vt numerus d e ad numerum g h, ita est pondus s u ad pondus u t.

Componetur autem hoc modo: ex noto numero i l auferatur notus a c, & habebitur numerus z l vel g h. Rursus ex noto numero d h auferatur notus e g seu a c: & habebuntur duo simul d e, g h: si ergo inuentus g h auferatur ex duobus simul d e, g h relinquetur d e. Inuenti ergo erunt numeri d e, g h ostendentes rationem ponderis s u ad pondus u t; quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Archimedes tantâ animi voluptate hoc inuento perculsus fuisse dicitur vt nudus balneo, in quo tunc casu lauabat, exiliens domum versus, identidem græcè clamaret εὕρηκα, εὕρηκα: *istud narrant Vitruuius loco citato, & Plutarchus in opusculo contra Epicurum. Proclus in primum Euclidis pag. 18. edit. Heruagianæ narrat Perionem ex hoc tam inopinato Archimedis inuento perhiberi dixisse* ἀπὸ ταύτης τῆς ἡμέρας Ἀρχιμήδει λέγοντι πιστευτέον, in posterum Archimedi quiduis affirmanti fides erit adhibenda. *Addit verò eo loci Plutarchus à Pythagorâ bouem sacrificatum fuisse ob inuentionem cuiusdam propositionis mathematicæ, siue,* inquit, *illa fuerit,* basim trianguli rectanguli posse spatium æquale spatiis quæ duo reliqua latera possunt; *siue extiterit problema* περὶ τοῦ χωρίου τῆς παραβολῆς, de areâ parabolæ: *quibus verbis tetragonismum parabolæ adscribere videtur Pythagoræ; sed id, vt in prolegomenis tetragonismicis iam diximus, creditu perdifficile est; Archimedes siquidem huius se authorem profitetur ipso initio suæ quadrationis, testaturque vir sincerus & in veterum lectione versatus à nemine, quem ipse sciat, istud fuisse vnquam tentatum; quamuis non defuerint qui licet inutili operâ conati sint circulum & ellipsin quadrare.*

COROLLARIVM I.

Cabæus noster l. 2. Meteor. text. 25. qu. 4. pag. 150. 151. ad solutionem problematis mox proponendi, à se ideo adhibitam fuisse Algebram testatur; *quia,* inquit, *mihi hæc facillima visa est, & accommoda etiam iis qui Algebram ignorant:* ex demonstratis tamen longè facilior eruitur, vt ad libri pœnam cuilibet perspicuum fiet. Ponit argenti defæcatissimi massam ad istud destinatam expellere ex vase aquam cuius pondus sit 97. æris autem purissimi massam ad id similiter paratam expellere aquam cuius pondus sit 105. denique *monetam* datam & æquè ponderantem subire in locum aquæ, cuius pondus sit 99. Hoc posito proponitur inuestigandum, quantum argenti puri sit in numismate illo proposito. Istud arithmetica vulgaris longè facillimè conficit in hunc modum præscriptum in præsenti propositione. Differentia ponderum æris & argenti puri & grauioris ipso ære inuenitur esse 8. subductis 97. ex 105. differentia ponderum argenti puri & numismatis dati inuenitur eadem methodo esse 2. Si igitur numisma diuidatur in 8. partes, quot videlicet vnitates continet differentia primò inuenta, duæ illarum notatæ per differentiam secundò repertam

sunt æris: sex reliquæ sunt argenti puri. Aliud ponit exemplum quo pondus aquæ ab argento puro eiectæ est 489. ab ære puro 561. à numismatis 495. quod soluitur eadem ratione. Nam differentia puri argenti & auri inuenitur 72. differentia verò argenti puri & numismatum est 6. Si igitur numismata diuidantur in 72. partes, sex illarum sunt æris, reliquæ 66. sunt puri argenti. Periculum facit in tertia *quadam mixturâ in ære campano antiquo ex ære & stanno composito*. Pondus aquæ à stanni puri massa eiectæ est 113. ab ære puro & æquiponderante 146. à *campano ære* 142. differentia æris puri & stanni puri & ære ipso grauioris est 33. differentia stanni puri & ęris campani est 29. Si igitur æs campanum diuidatur in 33. partes æquales, 29. ex illis sunt æs purum: reliquæ 4. sunt stannum purum. En tibi problematis facilem, breuémque solutionem, pro qua iste Autor aliam via abstrusiore, longioréque quæsiuit, quæsitámque Lectori dedit tanquam omnium, suo quidem iudicio facillimam. Cæterùm solutionem problematis de corona illa, Archimedis inuento nobilitatâ Q. Rhemnius Fannius Palæmon in fine libelli de ponderibus & mensuris exposuit versibus; quis verò Recentiorum Arithmetices præcepta scribentium non meminit illius? Peletarius non in Arithmeticâ solùm, sed in Algebrâ etiam illud tractauit l. 1. c. 24. exemp. 11. Peletarium Cabæus in hoc secutus est; sed Algebram aduocare vt via longior & spinosior inde euadat, non puto operæ pretium; laudem tamen industria suam meretur. Porrò Archimedem vsurpasse istud genus suspendendæ coronæ in aqua existimarunt alij plures in quibus est Cabæus lib. 2. Meteor. suprà laudato p. 149. col. 1. vbi ait se non posse adduci vt aliter sentiat de Archimedis accuratissima praxi.

COROLLARIVM II.

Ex demonstratis in problemate tertio liquet, si idem graue suspendatur in liquoribus inæqualis ponderis, ab excessu ponderum graui illi respondentium, peti differentiam grauitatis liquorum. Hinc igitur habemus viam experiundi vtra duarum aquarum sit leuior; & ita fortassis conciliabuntur inter se contrariæ opinantium sententiæ. Nam ex Antiquis Plinius cap. 3. lib. 31. ita scribit *leuitas illa deprehendi vix potest, nullo penè momento ponderis aquis inter se distantibus .... quidam statera iudicant de salubritate, frustante diligentiâ, quando perrarum est vt leuior sit aqua*. Ex Recentioribus V. C. Sauot tertia parte de numismatis cap. 34. sub finem, *suspendi egomet*, inquit, *diuersis tempestatibus, & locis, aquas pluuiales, fluuiaticas, fontanas, cisterninas & puteales; sed tam exiguo momento ponderis inter se discreparunt, vt discrimen potius procedere videretur ex vitio aliquo leui & occulto libræ, aut ex manûs vacillatione, quàm ex vlla grauitatis inæqualite, cùm illud vix attigerit ad quingentesimam suspensi partem; qua tamen leuior visa est aqua pluuia, suspensa statim atque è cœlo deciderat*. Villalpandus in Apparatu pag. 350. idem ferè sentit de hoc experimento, *aqua*, inquit, *minimùm pondere variat, quippe cùm ego ipse viginti aqua*

Vncias ex diuersißimis aquis ponderauerim, vixque repererim drachma vna à se inuicem distare. Cabæus loco supra laudato pag. 146. col. 1. parum discrepat ab illis duobus, *inter aquas*, inquit, *non reperio æquale pondus data paritate molis, & in 100. libris aquæ erit differentia 1. 2. 3. & plurium Vnciarum.* Differentia suspensorum iuxta Sauot est vna quingentesima; iuxta Villalpandum vna octogesima; iuxta Cabæum vna, vel duæ, vel tres, vel paululò plures millesimæ ducentesimæ: vnde liquet eos vix discordare inter se, sed Plinio fauêre plurimùm. Attamen oppositam sententiam sequi videtur Hippocrates aphoris. 26. sect. 5. vbi aquam quæ citò calefit, & citò refrigeratur leuissimam esse definit, ὕδωρ τὸ ταχέως θερμαινόμενον, καὶ ταχέως ψυχόμενον, κουφότατον. Ad istum locum responderi posset cum Galeno pag. 290. edit. Basile. 1538. οὐ τῷ σταθμῷ κουφότερον εἶναι τὸ τοιοῦτον λεκτέον.... ἀλλὰ κουφότερον εἶπεν νῦν τὸ μὴ βαρῦνον τὴν γαστέρα, καὶ διεξερχόμενον ταχέως ὥσπερ καὶ βαρὺ τὸ ἐναντίον αὐτῷ, τὸ μὴ διεξερχόμενον ταχέως. *Istud librâ non esse pensandum: sed id leuißimum dixisse hoc loco, quod non grauat stomachum, & egeritur citò; sicuti & graue dicitur quod è contrario non digeritur cito.* Ratio tamen Galeni non multùm cogit, quia, *inquit*, circuitione illa non fuisset vsus Hippocrates, sed directò ad libræ iudicium nos remisisset: nam illud κριτήριον libræ non ita est in promptu, vt videtur existimare Galenus. Sed demus Hippocratis locum facere illum sensum; quid dicemus ad inscriptionem illam antiquam apud Sauot ex Grutero; *Imp. Diocletianus C. Aug. hoc excauato saxo quæsitam aquam iugi profluuio scatentem inuenit Martiâ salubriorem, Tiberinâ leuiorem curandis ægritudinibus, statera indicatum.* Vides apertè ex stateræ indicio leuiorem iudicatam fuisse istam Diocletiani aquam. Fortasse igitur qui aquam trutinando leuiorem repererint, accuratum illum & non vulgarem libræ vsum adhibuerint; qui vix ac ne vix quidem leuiorem inuenerint, illam, vt vulgò solet fieri, suspenderint. R. P. Zucchius hunc explorandi ponderis quo vna aqua excedit aliam annotauit in noua de Machinis Philosophia pag. 87. edit. Roman. 1649. vbi vir experientissimus videtur compertum habere vnam esse alia leuiorem; ita enim quæstionem absolutè proponit, *qua ratione grauitas aquæ, & quidem vnius supra aliam, facillimè & exactißimè deprehendatur.*

COROLLARIVM III.

Ex iisdem principiis quibus monstrata in præsenti propositione nituntur, peti debet causa experimenti cuiusdam celebris quod R. P. Maignan refert cursûs Philosophici tom. 4. cap. 16. prop. 3. à n. 8. pag. 1685. Illud autem, prout à nobis non semel captum fuit, ita se habet. Selige inter phialas vitreas communes vnam aliquam, ita collo angustam, vt cùm eam aqua penitus impleueris, & pollicem eius ori impegeris, eo illud planè obtures, & aqua digito compressa supereffluere nequeat: para præterea aliam phialam vitream instar glandis vel nucis, cuius collum perangusto foramine pateat; & circumligetur filo sustinente pondus aliquod aptum ad hoc vt istius phialulæ immissæ in aquam ipsum collum deorsum vi

ponderis

ponderis vergat, & venter ampullæ ſurſum verſus, aquis extet. Phialulæ nomine intelligemus corpus compoſitum ex ipſo vitro phialæ, ex perpendiculo quo ceruix eius prona tenetur, & ex aëre intra ventrem incluſo; tria enim iſta cùm colligata ſint, mouentur ſimul, vt patet. Experti autem ſumus. I. Iſtud pondus appendendum, eligi certa quadam ratione oportere: aliquando enim totam machinulam pertrahebat ad imum vaſis, ſiue phialæ maioris; ac proinde minuendum erat; aliquando ita leue erat vt quantumlibet digito premeretur aqua vaſis, non deſcenderet phialula; aliquando ita accommodatum prodibat, vt leui compreſſione aquæ eiuſdem deprimeretur; fuit denique cum ita ſe haberet, vt mitteretur quidem deorſum, ſed non niſi vehementi compreſſione. II. Dum pollice immiſſo in vaſis, hoc eſt maioris phialæ oſculum, premebatur aqua; perſpicuè conſpeximus in ventrem phialulæ ingredi aquæ aliquid; & dum laxata compreſſione aſſurgebat phialula, exire aquæ illud ipſum quod vi preſsûs intruſum fuerat. III. Quando autem compreſſiuncula leui demittebatur, paululum aquæ admittere in ventrem deprehendebatur: & quando grauiori compreſſione opus erat, plus etiam aquæ trudi, & extrudi ex eodem ventre. Hinc factum eſt, vt cùm tres eiuſmodi phialulæ in eodem vaſe ſimul natarent; vnâ compreſſione validiore tres ſimul deſcenderent; minus validâ, duæ tantùm, & vna ſupernataret; mediocri, vnica tantùm deprimeretur. IV. Hæc omnia experti fuimus, ſiue vas collocaretur oſculo cœlum ſpectante, ſiue ad pauimentum inuerſo, ſiue etiam ad latus & parietes. V. Accidit etiam iſtud mirabile, vt cum vnus aſtantium ex calami, quo ſcribimus, ſuperiore parte ſpongioſâ, fruſtulum abſcidiſſet, illique aciculam pro perpendiculo fixiſſet, perinde deſcenderet & aſcenderet, atque phialula; preſsâ, laxatâque vaſis aquâ. VI. Experientia frequente conſtitit poſt aliquantum tempus aſcendendo & deſcendendo impenſum, phialulam quaſi laſſatam concidere, in imóque vaſe iacêre, nec aſſurgere preſſu omni intermiſſo; extractam tamen inde & aëre nouo repletam, ad ludum priſtinum redire.

Cauſa cur phialula deſcendat eſt, quod acceſſione aquæ pulſæ; corpus illud compactum ex vitrea ampullulæ ſubſtantiâ; ex perpendiculo adiuncto; ex aëre qui intra aluum machinulæ ante compreſſionem incluſus continebatur; & ex aqua intrò populſa (nam aër vt aduertit R. P. Maignan n. 10. pag. 1688. *non difficulter patitur ſe denſari*, & ita denſatus præbet locum intromiſſæ aquæ) ſi extra aquam lance penſaretur, eleuaret illam aquam, quæ locum illius corporis impleret, vel quæ paris eſſet molis illi machinulæ ex quadruplici illo corpore compactæ; illa verò eadem machinula ſemoto aquæ intruſæ pondere, eleuaretur ab eadem illa aqua paris magnitudinis. Locus phialulæ eſt vt patet vnus & idem, ante & poſt aduentum ingeſtæ aquæ; vnde fit vt eiuſdem molis magnitudo extra aquam penſitata nunc eſſe leuior, nunc grauior debeat. Cauſa itaque cur natet eſt quia examine libræ extra aquam facto foret leuior eâ aquâ quæ neceſſa-

ria ſit ad implendum totum machinulæ locum; ratio verò cur poſtea cadat deorſum, eſt quia poſtea foret grauior; ratio denique cur aliquando pendula hæreat vel in deſcendu, vel in aſcenſu, eſt quod eadem illa aqua eodem examine librata, neque grauior, neque leuior reperiretur machinulâ illâ ex quatuor corporibus compoſita. Quando loco phialulæ ſpongioſa ſubſtantia ponitur, cauſa ſubmerſionis & emerſionis eſt eadem, vt patet; intruditur quippe aquæ aliquid in cauernulas ſubſtantiæ illius. Cur verò phialula tandem alternis ire & redire neget, ratio eſt quod aër incluſus, ſiue omnino corrumpatur, ſiue multùm, vt dicere ſolemus, *alteretur*, ita tandem debilitatur, vt non habeat vim dilatandi ſe, & expellendi aquam inditam, cum pollicis compreſſio ceſſat.

COROLLARIVM IV.

R. P. Maignan cap.14. prop. 27. n. 2. pag.1325. ita ſcribit *Video communem eſſe in contrarium opinionem, quæ tenet grauia non grauitare in propriis ſedibus; ſed non ſatis video quo firmo argumento id ſibi perſuaſerint Autores phyſici, ſi grauitare intelligant dicto meo ſenſu.* Ergo cùm agnoſcat ſe contra communem, pro qua veritatis præſumptio ſtat, pugnare ſententiam, validioribus ſibi machinis aduerſus illam opus eſſe intelligit; vnde iſtam quam modo deſcripſimus adhibet, cap. 17. prop. 3. n. 8. p. 1685. *eáque euidentius comprobari* contendit falſitatem communis illius ſententiæ. Ratio verò inde petita hæc eſt, anſer (ita vocat machinulam illam) grauitatem aſſumit vt deſcendat; deponit, vt aſcendat; ſed aquam ſolam aſſumit vt deſcendat, & deponit vt aſcendat; ergo aqua grauitat in ſuo loco. Prima propoſitio negari poteſt; nam ſecunda eſt in confeſſo apud omnes, cùm accuratis experimentis conſtet. Sed ecce ſyllogiſmum qui rem demonſtrare videtur: *illud corpus grauitat in aquis, cuius aduentu mergitur aliud, quod extabat iiſdem aquis: atqui aduentu aquæ ſolius, anſer antea enatans mergitur: ergo aqua grauitat in ipſis aquis.* Subtile, fateor, argumentum iſtud eſt, non tamen cogit, vt equidem reor. Hoc vt explicem, aduerto illum anſerem componi ex quatuor corporibus, quorum vnum eſt aër, qui dum vitro incluſus mergitur, non grauitat; neque enim id omne quod deorſum rapitur, grauitare dicitur; ita ſi cucurbitam aëre plenam appenſo graui pondere demittas in maris fundum; non ideo grauitabit; ſed potius deſcenſui illi reſiſtet per leuitatem ſuam. Non igitur id omne grauitat quod trahitur deorſum; ſed id tantùm quod motum deorſum per ſe cauſat; non autem quod illi pro viribus repugnat, vel quod ſe habet ad illum indifferenter. Ponamus iniectum vna compreſſione eſſe tantum aquæ in ventrem anſeris, vt nouem eius partes ſufficerent ad illum deprimendum; ponamus quoque pondus aquæ eſſe ad olei in pari mole pondus, vt 10. ad 9. Si igitur cogitemus in locum aquæ intrò coniectæ ſuccedere parem olei molem, adhuc anſer (eſtò ſegniùs) deſcendet, oleo licet repugnante; ergo corpori natanti ſuperuenit aliud corpus, quod ex ſe in aqua leuitat, & ex illius tamen ac-

ceſſione, corpus immergitur. Si igitur corpus quod adjicitur natanti removeat tantùm illud quod impediebat ne motus deorſum produceretur à cauſa præexiſtente ſed impedita; illud non dicetur *grauitare*; ſed remouendo prohibens poterit vel *leuitare*, quamuis minùs, illo quod ſubmouet; vel indifferenter ſe habere ad motum deorſum. Prima igitur ſyllogiſmi illius propoſitio eſt abſolutè falſa, & vt vera euadat ita corrigi debet, *illud corpus, cuius acceßione aliud antea extans, vndis mergitur; vel grauitat, vel ſubmouet impedimentum, quo corpus cui aduenit, ſponte ſua deſcendere nequibat.* Qui autem cenſent partes aquæ ſeſe nihil comprimere, ita vt ſi ſentiendi vi prædità forent, vna non ſentiret onus alterius ſibi ſuperpoſitæ, dicent illud aquæ quod ingeritur in aluum anſeris habere ſe indifferenter ad deſcenſum; tollere tamen aduentu ſuo id quod impediebat ne ſubſtantia vitri apta per ſe grauitare in vndis, grauitaret de facto; impediebat autem aër intra aluum anſeris nondum compreſſus alio corpore extra vndas grauiore.

PROPOSITIO XLIV.

Breuiarium præcipuarum rerum quæ in hoc libro tractatæ fuerunt.

I. Explicatur propoſitione prima & quarta quid Antiquiores velint eſſe centrum grauitatis, in quo Archimedis iſorrhopica fundantur. Alicuius magnitudinis centrũ grauitatis poſſe eſſe extra ipſam magnitudinẽ oſtenditur propoſitione ſecunda & tertia: vnde colligitur neceſſitas rectæ illius rigidæ; nempe vt ope illius poſſit graue è ſuo centro extrà poſito pendêre: eam autem cenſeo ſubaudiri ab iis qui in tradenda definitione centri grauitatis mentionem illius non faciunt. Illud Archimedis pronuntiatum, *vnumquodque ſuſpenſorum ex quo puncto conſtitutum eſt, manet; cum in linea perpendiculari fuerit punctum ſuſpenſionis, & centrum grauitatis*, demonſtratur propoſitione nona. Propoſitione vndecima oſtenditur vnum aliud ab Archimede aſſumptum, cuius demonſtratio non extabat; in propoſitione autem duodecima proponuntur dubia nonnulla aduerſus poſtulata Archimedea; ea porrò dubia magnam partem à nobis cogitata ſunt; nec enim vllum legimus, qui libram Archimedeam oppugnarit.

II. Libræ curuæ ab Archimedea diuerſæ definitiones & poſtulata habentur ſub finem duodecimæ; huius autem libræ æquilibrium fit grauibus pendentibus per lineas non parallelas, ſed conuenientes in centrum; quæ duo libræ genera vulgò in vnam confunduntur, cùm longè diuerſa eſſe oſtendantur in decima tertia & ſequentibus decem; in quarum decima octaua & decima nona monſtratur in hoc libræ genere grauia ſuſpenſa eſſe etiam reciprocè vt brachia, quoties æquilibrium committitur: hoc ipſum in vniuerſum tam pro Archimedea recta, quàm pro curua alia, demonſtratur in vigeſima. In corollario ſecundo vigeſimæ primæ oſtenditur libras omnes quas vulgò *Romanas* appellamus eſſe fallaces, ſi ad geo-

metricas rationes exigantur. In propositione vigesima tertia, ostendimus centrum grauitatis absolutè dictum non dari in omni magnitudine, comparata ad libram curuam.

III. Propositio vigesima quarta soluit tria dubia ex propositis in duodecima, nihil videlicet obstare certitudini principiorum Archimedeorum quod figuræ planæ careant grauitate, ac proinde suspendi nequeant; quod grauia non ferantur lineis parallelis; quod lineæ quibus grauia pendent, ponantur ἀβαρεῖς, cùm tamen superficies ponantur graues; & quod à graui brachium libræ eodem modo grauari ponatur; siue graue breuiori, siue longiori linea pendeat; istud verò postremum in vigesima quinta propositione monstratur. Vigesima sexta soluit quartum dubium ex coaptatione figurarum petitum; sub cuius finem ad solutionem sexti dubij propositi in duodecima, ponuntur definitiones *loci asymptotici, & perpendiculi quietis*. In quatuor sequentibus propositionibus ea de hyperbola demonstrantur, ex quibus liquidò constat præter vulgi opinionem inter magnitudines non vndecunque clausas, dari quandam quæ maior sit omni finita data; dari etiam quæ sit æqualis figuræ, siue finito spatio; dari præterea maiorem quacunque data, cui certum & finitum pondus æquiponderet; dari quæ careat tam centro grauitatis, quàm perpendiculo quietis; dari qnæ careat centro grauitatis, habeat tamen perpendiculum quietis; dari denique quæ centrum grauitatis obtineat. In quatuor postremis corollariis trigesimæ primæ occasione loci asymptoti proponuntur mirabilia quædam de hyperbola quam extrema styli vmbra in sciothericis describit motu solis diurno. Quod sub finem corollarij quinti scripsi de sectione tangentis cum linea meridiana, intellexi etiam de ea linea quæ in murorum planis efficitur à circulo maximo recto ad planum eiusdem muri, ducto per polos æquatoris. Propositione trigesima secunda soluitur quintum dubium ex centro grauitatis petitum, & sextum ex eo quod spatium finitum æquiponderat immenso. R. P. Maignan tom. 3. Cursûs Philosophici cap. 14. pag. 1309. propositionem sibi probandam præmittit his verbis, *quodlibet corpus graue habet in seipso centrum grauitatis suarum partium*. Certè si haberet *in seipso*, non esset necessaria illa, quam diximus linea connectens, & falsa forent quæ demonstrasse nos putamus. Cùm autem Archimedes non demonstrarit, sed postularit dari illud centrum, neque nos suppleuerimus vllam ea de re demonstrationem geometricam; videndum est numquid inde subsidij petatur; quapropter transcribo illius verba. [Centrum, *inquit*, grauitatis in quouis graui voco cum Luca Valerio *illud punctum à quo suspensum graue per se manet, partibus quomodocunque circà constitutis*. Et tale punctum dico necessariò esse in omni graui: ratio autem est, quia quæcunque lineæ habent extrema, habent etiam medium; ergo cùm radij grauitatis (id est lineæ sumptæ non secundum longitudinem de qua nunc non agitur, sed secundum momenta grauitandi) quæ in quouis corpore, sunt quasi diametri ductæ ab vna par-

te circumferentiæ ad oppositam, ibidem habeant extrema; erit necessariò aliquod cuiusque medium secundum momenta grauitatis; ac proinde erit aliquod cuiusque in particulari punctum ex quo si suspenderetur haberet vtrinque momenta æqualia, id est, maneret in æquilibrio. Ac insuper si dictæ lineæ sunt æquales tum in longitudine tum in momentis grauitatis, aut etiam si sint vtrouis modo vel vtróque simul inæquales; facta hinc inde compensatione, vt manifestum est fieri posse, quatenus ei cui deest potest adjici ex eo quod alteri redundat: his inquam positis, consequens est esse vnum omnium dictarum linearum, seu totius grauis ex eis constantis centrum vnum commune grauitatis.] Hactenus vir eximiè doctus non in Philosophicis solùm sed in Mathematicis etiam; ac proinde nihil dubito quin ipse agnouerit probationem istam non esse inter mathematicas demonstrationes, sed summùm inter physicas verisimilitudines reponendam. Dum lineas sumi vult *non secundum longitudinem, sed secundum momenta grauitandi*, id equidem non ita interpretor, vt velit intelligi lineam sine longitudine, istud enim fieri nequit; cùm lineæ definitio includat *longitudinem* pro genere: existimo igitur eum velle sumi non quamcunque lineam, sed lineam grauem quà grauem. Peto igitur vtrum istam lineam velit esse mathematicam qualem illam describit Euclides *longitudinem sine latitudine*; an lineam physicam, id est gracile longúmque corpusculum? Mathematicam, non respondebit; quia & illas lineas à structura solidorum rejicit, & quia graues re ipsa non forent, si adessent; & quia, quamuis adessent forentque graues, demonstrata de lineis in vniuersum, non continuò possunt ad solida transferri; nisi ratio specialis ita faciendi demonstretur. Omitto dicere illarum linearum bisectiones in plurimis corporibus, ex iis quorum forma *irregularis* vulgò dicitur, non posse cadere omnes in idem punctum, vt obuia geometriæ demonstratio probat. Dicet ergo à se intelligi virgulam vel bacillulum teretem. At hoc ipsum est quod demonstrari debet; videlicet in illo solido terete dari medium eiusmodi, nempe centrum grauitatis, siue *punctum à quo suspensum graue per se manet, partibus quomodocunque circà constitutis*; neque enim manifestum est tale medium dari, ex eo quod bacillus habeat vtrinque extrema: postea verò quàm istud demonstratum fuerit, facilè ex primo æquiponderantium Archimedis libro ostendetur totius ex illis bacillis compacti solidi dari centrum grauitatis.

IV. Demum in trigesima tertia soluitur vltimum dubium desumptum à labore intelligendi demonstrationes ex principiis libræ deriuatas. In propositionis istius progressu n. 4. Proclum in primum Euc. p. 12. edit. Heruag. ita reddidi, vt dicat *Geodæsiam non metiri per rectas lineas geometriæ proprias, & quæ in sola mente consistunt; sed per sensiles; Vt per amußim & perpendiculum*; διὰ σπάρτων καὶ διὰ σάθμης. Licet enim verborum istorum græcorum varia possint afferri significata; non dubito tamen quin ille sit germanus Procli sensus; scio equidem vocem σάθμη ex Eustathio Iliad. ο. pag. 1028.

metricas rationes exigantur. In propositione vigesima tertia, ostendimus centrum grauitatis absolutè dictum non dari in omni magnitudine, comparata ad libram curuam.

III. Propositio vigesima quarta soluit tria dubia ex propositis in duodecima, nihil videlicet obstare certitudini principiorum Archimedeorum quod figuræ planæ careant grauitate, ac proinde suspendi nequeant; quod grauia non ferantur lineis parallelis; quod lineæ quibus grauia pendent, ponantur ἀβαρεῖς, cùm tamen superficies ponantur graues; & quod à graui brachium libræ eodem modo grauari ponatur; siue graue breuiori, siue longiori linea pendeat; istud verò postremum in vigesima quinta propositione monstratur. Vigesima sexta soluit quartum dubium ex coaptatione figurarum petitum; sub cuius finem ad solutionem sexti dubij propositi in duodecima, ponuntur definitiones *loci asymptotici, & perpendiculi quietis*. In quatuor sequentibus propositionibus ea de hyperbola demonstrantur, ex quibus liquidò constat præter vulgi opinionem inter magnitudines non vndecunque clausas, dari quandam quæ maior sit omni finita data; dari etiam quæ sit æqualis figuræ, siue finito spatio; dari præterea maiorem quacunque data, cui certum & finitum pondus æquiponderet; dari quæ careat tam centro grauitatis, quàm perpendiculo quietis; dari quæ careat centro grauitatis, habeat tamen perpendiculum quietis; dari denique quæ centrum grauitatis obtineat. In quatuor postremis corollariis trigesimæ primæ occasione loci asymptoti proponuntur mirabilia quædam de hyperbola quam extrema styli vmbra in sciothericis describit motu solis diurno. Quod sub finem corollarij quinti scripsi de sectione tangentis cum linea meridiana, intellexi etiam de ea linea quæ in murorum planis efficitur à circulo maximo recto ad planum eiusdem muri, ducto per polos æquatoris. Propositione trigesima secunda soluitur quintum dubium ex centro grauitatis petitum, & sextum ex eo quod spatium finitum æquiponderat immenso. R. P. Maignan tom. 3. Cursûs Philosophici cap. 14. pag. 1309. propositionem sibi probandam præmittit his verbis, *quodlibet corpus graue habet in seipso centrum grauitatis suarum partium*. Certè si haberet *in seipso*, non esset necessaria illa, quam diximus linea connectens, & falsa forent quæ demonstrasse nos putamus. Cùm autem Archimedes non demonstrarit, sed postularit dari illud centrum, neque nos suppleuerimus vllam ea de re demonstrationem geometricam; videndum est numquid inde subsidij petatur; quapropter transcribo illius verba. [Centrum, *inquit*, grauitatis in quouis graui voco cum Luca Valerio *illud punctum à quo suspensum graue per se manet, partibus quomodocunque circà constitutis*. Et tale punctum dico necessariò esse in omni graui: ratio autem est, quia quæcunque lineæ habent extrema, habent etiam medium; ergo cùm radij grauitatis (id est lineæ sumptæ non secundum longitudinem de qua nunc non agitur, sed secundum momenta grauitandi) quæ in quouis corpore, sunt quasi diametri ductæ ab vna par-

te circumferentiæ ad oppoſitam, ibidem habeant extrema; erit neceſſariò aliquod cuiuſque medium ſecundum momenta grauitatis; ac proinde erit aliquod cuiuſque in particulari punctum ex quo ſi ſuſpenderetur haberet vtrinque momenta æqualia, id eſt, maneret in æquilibrio. Ac inſuper ſi dictæ lineæ ſunt æquales tum in longitudine tum in momentis grauitatis, aut ètiam ſi ſint vtrouis modo vel vtróque ſimul inæquales; facta hinc inde compenſatione, vt manifeſtum eſt fieri poſſe, quatenus ei cui deeſt poteſt adjici ex eo quod alteri redundat: his inquam poſitis, conſequens eſt eſſe vnum omnium dictarum linearum, ſeu totius grauis ex eis conſtantis centrum vnum commune grauitatis.] Hactenus vir eximiè doctus non in Philoſophicis ſolùm ſed in Mathematicis etiam; ac proinde nihil dubito quin ipſe agnouerit probationem iſtam non eſſe inter mathematicas demonſtrationes, ſed ſummùm inter phyſicas veriſimilitudines reponendam. Dum lineas ſumi vult *non ſecundum longitudinem, ſed ſecundum momenta grauitandi*, id equidem non ita interpretor, vt velit intelligi lineam ſine longitudine, iſtud enim fieri nequit; cùm lineæ definitio includat *longitudinem* pro genere: exiſtimo igitur eum velle ſumi non quamcunque lineam, ſed lineam grauem quà grauem. Peto igitur vtrum iſtam lineam velit eſſe mathematicam qualem illam deſcribit Euclides *longitudinem ſine latitudine*; an lineam phyſicam, id eſt gracile longúmque corpuſculum? Mathematicam, non reſpondebit; quia & illas lineas à ſtructura ſolidorum rejicit, & quia graues re ipſa non forent, ſi adeſſent; & quia, quamuis adeſſent forentque graues, demonſtrata de lineis in vniuerſum, non continuò poſſunt ad ſolida transferri; niſi ratio ſpecialis ita faciendi demonſtretur. Omitto dicere illarum linearum biſectiones in plurimis corporibus, ex iis quorum forma *irregularis* vulgò dicitur, non poſſe cadere omnes in idem punctum, vt obuia geometriæ demonſtratio probat. Dicet ergo à ſe intelligi virgulam vel bacillulum teretem. At hoc ipſum eſt quod demonſtrari debet; videlicet in illo ſolido terete dari medium eiuſmodi, nempe centrum grauitatis, ſiue *punctum à quo ſuſpenſum graue per ſe manet, partibus quomodocunque circà conſtitutis*; neque enim manifeſtum eſt tale medium dari, ex eo quod bacillus habeat vtrinque extrema: poſtea verò quàm iſtud demonſtratum fuerit, facilè ex primo æquiponderantium Archimedis libro oſtendetur totius ex illis bacillis compacti ſolidi dari centrum grauitatis.

IV. Demum in trigeſima tertia ſoluitur vltimum dubium deſumptum à labore intelligendi demonſtrationes ex principiis libræ deriuatas. In propoſitionis iſtius progreſſu n. 4. Proclum in primum Euc. p. 12. edit. Heruag. ita reddidi, vt dicat *Geodæſiam non metiri per rectas lineas geometriæ proprias, & quæ in ſola mente conſiſtunt; ſed per ſenſiles; Vt per amuſſim & perpendiculum*; δια σπάρτων ϗ διὰ στάθμης. Licet enim verborum iſtorum græcorum varia poſſint afferri ſignificata; non dubito tamen quin ille ſit germanus Procli ſenſus; ſcio equidem vocem στάθμη ex Euſtathio Iliad. ο. pag. 1028.

ſignificare aliquando funiculum illum quem Fabri materiarij & carpentarij rubrica aut atramento imbuunt, vt eo ſuper materia tenſo & eleuato deſcribatur linea rubra vel atra, dum infligitur ſubiecto tigno; & in eo ſenſu accipi ab Homero. Altera eiuſdem vocis ſignificatio ab Antiquis vſurpata eodem teſte, eſt κάνων vel γνώμων *regula vel norma*: dum autem dicit hanc ſignificationem eſſe Antiquorum τῶν παλαιῶν, non vult dicere priorem alium ſignificatum eſſe tantùm Recentiorum, cùm vt ipſe ibidem monſtrat, Homerus eo loci illum vſurpet: forſitan innuit illam vim vocis fuiſſe tunc exoletam. Tertia quoque ad rem geometricam ſpectans ſignificatio eiuſdem vocis apud Suidam, eſt illud *perpendiculum* è quo plumbum pendere ſolet; hanc apertè indicat is quem profert locus Poëtæ appellantis σάθμην μολιβαχθέα *plumbo-grauatam*. Itaque σάθμην non malè interpretati fuerimus *perpendiculum*; ſed ſi ea voce malis ibi intelligi funiculum illum cuius ictu recta delineatur, non repugno; dum modo σπάρτον, quæ vox multò generaliorem habet ſignificandi vim, interpreteris *perpendiculum*. Hæc leuiora videri poſſent, niſi attinerent ad Geometricas voces, quas nuſquam negligimus. Vnde iſtud etiam aduertimus ipſam vocem latinam *amußis*, ſicuti & græcam σάθμη, ſignificare modò funiculum illum, modo regulam & normam; ipſúmque vocabulum *linea* denotare apud probos Autores nunc funiculum illum tintilem, nunc perpendiculum; quo ſenſu Tullius *ad lineam* dixit, quod alij *ad perpendiculum*.

V. Propoſitionibus 34. 35. 36. nonnullæ Iordani propoſitiones circa libram reſtituuntur, & quædam in illas adnotantur; illud verò in illis paradoxum iure cenſeatur, libram mathematicam, & omni vitio carentem, ſi ab æquilibrio dimoueatur vi aliqua externa, vbi ſibi relicta fuerit, regredi ad æquilibrium: Propoſitione trigeſima ſeptima examinatur Villalpandi celebre experimentum in congio Farneſiano de lance ſuſpendendo. Propoſitione trigeſima octaua τὸ ζυγὸν apud Ariſtotelem in Mechanicis quid ſit inquiritur, & oſtenditur nec eſſe libra vt Leonicus vertit, nec ergata, vt Stephanus, nec iugum lyræ vt Budæus, ſed ſpeciale organum tympano illi Nonnarum, quod vulgò *tornum* dicunt, ſimile. In corollario oſtenditur vtilitas geometriæ ad locos aliquot Scriptorum intelligendos, vt quo differant ſcuta à clypeis apud Liuium, & quid apud Anaſtaſium Bibliothecarium ſint ſpongiæ tres à Pontifice Gregorio II. Eudoni Duci miſſæ.

VI. Propoſitionibus 39. 40. 41. vectis, libræ, & circuli conuenientia ab Ariſtotele in Mechanicis relata exponitur: ad quod libræ genus ſpectet illa, quam ibidem appellat φάλαγγα, agitatur: lex illa reciproca ponderum & brachiorum libræ, Ariſtoteli cognita fuiſſe oſtenditur, & noua quadam ratione demonſtratur. Hanc adeo peruulgatam legem non fuiſſe legitimè probatam ab Archimede ſcripſit R. P. Ricciolus in noua de Machinis philoſophia part. 2. ſect. 4. & part. 3. ſect. 2. fortaſſe ad id permotus fuerit quod nihil tunc cogitarit de principio illo *Vnumquódque*

ſuſpenſorum ex quo puncto conſtitutum eſt, *manet*; *cum in linea perpendiculari fuerit punctum ſuſpenſionis*, *&* *centrum grauitatis*; cùm tamen eo maximè nitatur illa demonſtratio Archimedea, ſicuti & ea quam ſuprà dedimus in propoſitione vigeſima. Speramus futurum vt Archimedeæ rationi acquieſcat cum illius principij probationem legerit in nona huius libri propoſitione, & cum principij eiuſdem vſurpandi methodum examinarit in propoſitionibus noſtris 18 19. 20. Ratio verò illius reciprocæ legis phyſica quam ipſe profert in hypotheſi quæ re vera eſt, grauium ſcilicet ad idem centrum vergentium, nonnihil eneruari videtur per demonſtrata in corollario ſecundo vigeſimæ primæ; ibi enim oſtendimus legem illam *grauia inæqualia vtrinque pendentia tunc committunt æquilibrium*, *cùm reciprocè ſe habent vt recta brachia libræ* non conuenire iſti libræ, ſed Archimedeæ tantùm.

VII. propoſitione 42. oſtenditur contra Villalpandum libram quam *Romanam* dicimus, apud antiquos Romanos & Hæbræos fuiſſe in vſu: denique propoſitione vltima monſtramus methodum non vnam ex Archimedeis principiis examinandi pondera rerum per duas ſuuſpenſiones libræ, quarum vnâ res eadem pendeat in aëre, alterâ, mergatur in aquâ. Ex illis verò iiſdem principiis oſtendimus cauſam cur machinula mirabilis quam *anſerem* appellat R. P. Maignan in curſu philoſophico, modo ſubeat vndas, modo emergat ex illis, modo ſtet in medio itinere pendula pro arbitrio moderatoris: illo verò experimento non probari aquam *grauitare* in aqua ibidem demonſtramus.

VIII. Cæterùm quæ ad principiorum libræ elucidationem hoc libro ſcripſimus, ea nunc ſufficiant; ne ad quæſtiones phyſico-mathematicas ab iſorrhopicis dependentes tranſitum faciamus; id enim foret præter inſtitutum præſentis libri, & propè infinitum; cùm Recentiores quidam nec ignobiles Philoſophi in ſingulis penè cauſarum naturalium effectis explicandis ad *æquilibrium* confugiant. Sed de iis alius eſſe debet agendi locus; nempe is vbi quæſtionum magna pars magis diſceptatur, quam demonſtretur; quanquam & hoc ipſum, ſi rectè fiat, laudis & vtilitatis plurimum habere cenſemus. Quoniam enim phyſicarum rerum hæc eſt natura, vt obſcuriores ſæpe ſint, quàm vt mathematicè demonſtrari queant; non erit vlla eas contemplantis culpa,quod euidenti mentis luce illas non detegat; ſed ille ſummè laudandus, qui rationes excogitet quarum aliæ in obſucriſſimis aſſenſum auditoris rogent, vt ſimile quid in veteri agriculturæ prouerbio dicitur; aliæ in minus obſcuris exorent; aliæ deniq; in minimè nubiloſis, cogant. Cùm itaque Geometræ ſit non verſari niſi in iis quæ cogunt, conſultè abſtinuimus in duobus hiſce poſtremis libris à quæſtionibus phyſico-mathematicis, quæ ſe plurimæ offerebant; pauculas tamen propè inuiti attigimus propter ſummam quam habebant connexionem cum re mathematica quam tunc pertractabamus. At, inquies, in libro ſexto, cum ageretur de grauium accelerato deſcenſu, ea ſaltem ex Phyſice referri inter poſtulata non oportebat, quibus non ſtantibus,

reliqua corruunt: nam ſi tempus & ſpatium deſcensûs iſtius non componuntur ex partibus in infinitum diuiduis, euerti neceſſe eſt omnia ibi conſtituta. Reſpondeo primò iſtud nequaquam eſſe neceſſarium; neque enim propoſitionis hypotheticæ veritas corruit, ex eo quod res de facto non inueſtiatur illâ hypotheſi; ipſo etenim meridie iſta aſſertio eſt vera *ſi ſol eſt ſub horizonte, nox eſt*, de quo ſatis egimus ſupra in propoſitione vigeſima quarta. Reſpondeo ſecundò illam quæſtionis ſolutionem de compoſitione phyſica temporis & ſpatij hîc neceſſariam non iudicari ab iis quorum maximè intereſſe videtur, hoc eſt, qui tempus & ſpatium pernegant componi phyſicè poſſe niſi ex partium numero finito. Nam R. P. Maignan, qui inter illos vnus inprimis eſt, cap. 14. curſûs philoſ. prop. 30. in ſcholio, contendit contra R. P. Fabry, dogma Galilæi de acceleratione ſecundum numeros 1. 3 5. 7. 9. non corruere ſublata phyſica ſpatij & temporis *diuiſibilitate* in infinitum; imò optimè ſtare cum ſententia quæ non niſi numero finitas phyſicas partes in tempore & ſpatio ponit. Sed hac lite inter duos iſtos Autores iniudicatâ, perſto in prima reſponſione; cùm apertum ſit id nihil officere veritati demonſtratorum. Hac certè machina euerti pari ſucceſſu poſſint Euclidis elementa; negando videlicet puncta, lineas, & ſuperficies eſſe poſſibilia. Quòd ſi aliquid à nobis poſtulandum ibi fuerat, quis nobis ſuccenſeat quòd poſtulare ea maluerimus, quæ communi & receptiſſimâ Philoſophorum ſententiâ iamdiu in Academiis defenduntur, & quibus datis facilè intelligimus accelerationem illam ſecundum numeros impares 1. 3. 5. 7. fieri poſſe; ſicuti de facto fieri contendunt Galilæus & Gaſſendus, quibuſcum eo loci diſputamus. Addimus denique neque à nobis abſolutè poſtulari lineam eſſe in infinitum *diuiſibilem* quocunque ſenſu; ſed eo, *ſine quo non conſiſterent Euclidis Elementa*; in hæc enim verba concepimus poſtulatum ſub finem trigeſimæ quintæ libri ſexti.





APPENDIX PRIMA.

VBI RECIPROCA LIBRÆ CVRVÆ lex defenditur contra nonnulla, quæ Typographicâ libri septimi operâ iam nauatâ, opponi posse vidimus.

I. Reciprocam illam curuæ libræ legem quam in propositionibus 18.19.20. libri septimi demonstro, videri repugnare cum propositione quinta R. P. Mersenni in libro de Mechanicis, postea audiui quàm prælo mandatus & excusus erat liber ille huius Operis vltimus: quæ fuit causa vt attentiùs rem totam perpenderem; sed examine peracto, hæc fuit conclusio mea; *methodum nostram in librâ curuâ adhibitam non posse accusari, saluâ methodo quam Archimedes in recta vsurpauit.* Si quis enim propiùs rem nostram inspiciat, illam comperiet non esse nisi extensionem methodi Archimedeæ, eiúsque nos vestigiis diligenter insistere. Dubitare certè non possumus quin demonstratio nostra inconcussa debeat stare, si steterint postulata sub finem duodecimæ propositionis adscripta, in quibus illud est potissimum, *grauia æqualia vno sui tantum puncto terminis peripheriarum æqualium alligata, & liberè inde pendentia, nec vltra centrum porrecta, æqualiter inter se ponderare.* Quamuis ad legis illius demonstrationem nihil necesse est grauia illa in peripherias concentricas æquè dispersa, ex terminis peripheriæ centro grauium concentricæ pendêre ope linearum; sed satis est si committant æquilibrium, vbi eiusmodi peripheriarum bisectio fuerit collocata in extremis arcûs illius concentrici, qui vicem libræ sustinet, & suspenditur tantum ex puncto hinc & inde æqualiter distante ab extremis quibus grauia adhærent. Postulamus quidem sub finem vigesimæ secundæ, *grauia esse eiusdem ponderis liberè pendentia per lineas directionis*, sed ad alterius cuiusdam probationem eo egemus; non autem ad rem præsentem; de hoc tamen pòst agemus n. 14. Illud porrò principium propositione nona demonstratum, *vnumquodque suspensorum* &c. necessariò adhiberi debet in curuæ libræ demonstratione ista, sicuti & in rectæ; vnde si quis contenderet illud esse verum in libra recta, falsum autem in curuâ, labefactaret sine dubio structuram nostræ demonstrationis: attamen ratio adducta in illa nona propositione

paribus vrget momentis pro curua & recta. Ista enim propositio, *si magnitudo aliqua grauis ex vno libræ ad horizontem parallelæ puncto semel pendeat; postea verò quàm fuerit in duas partes secta, singulæ pendeant immotæ ex singulis eiusdem libræ punctis; libra ipsa ex eodem illo primæ suspensionis puncto suspensa, & duas illas partes sustinens, manebit horizonti parallela*; ista inquam propositio ad demonstrationem illius legis reciprocæ necessaria, non aliter probatur, quàm *quod eadem magnitudo non fiat magis vel minus ponderans, nisi quia, quem ad libram ex eodem sui semper puncto suspensam situm semel habet, deinde mutat*: ergo quamdiu eundem situm retinebit, pari quoque linea directionis premet libram; ergo ita premendo illam, non mutabit priorem illius situm. Hæc verò ratio competit tota libræ curuæ, vt patet: non igitur potest Archimedea demonstratio firmis inniti fundamentis, quin illis ipsis par pro librâ curuâ theorema insistat.

II. Sed vt istud ampliùs declaremus, assumimus maioris perspicuitatis causâ casum vnum particularem; esto itaque (*Fig.* 113.) h b d u peripheria circuli centro i descripta, grauitate carens, & in ea sumptus sit arcus a h b c, qui sit ad totam peripheriam vt 10. ad 16 vel vt 5. ad 8. diuisusque sit bifariam in b: arcus a b, b c secti sint in arcus alios inter se æquales a h, h l, l m, m f, f b, b n, n g, g e, e d, d c; rursus singuli istorum secti sint bifariam in punctis 1. 2. 3. 4 5. 6. 7. 8. 9. 10. in quibus ponantur decem magnitudines inter se æquales, & in commune grauitatis centrum i vergentes innumeris nutibus; iisdem videlicet quibus tendant, si singulæ vno modo dispensentur in arcus a h, h l, l m &c. Ex postulato concesso ab aduersariis, si arcus a b c sustinens istas decem magnitudines suspendatur ex solo puncto b, non mutabit situm. Manebit quoque vt iacet, si intra arcum a b c grauitate destitutum intelligatur alius arcus æqualis, similis, similitérque positus, iste verò arcus sit loco sustentaculi fixi, quod connecti intelligatur punctis 1. 3. 5. b. 6. 8. 10 peripheriæ a b c sustinentis pondera pendentia liberè & pro nutu quæque suo: istud enim manifestum est. Sed neque minùs apertum est, si soluantur connexiones punctorum 1. 5. b. 6. 10 maneantque solæ duorum 3. 8. mansurum quoque vt iacet: quia videlicet partes ex 3. 8. suspensæ, solutis vinculis aliis, manent vt priùs collocatæ fuerant; ad quod *per accidens* se habet partium suspensarum æqualitas, dummodo maneant vt antea, & suspensio sustentaculi fiat ex eodem b. Ex eodem postulato sequitur si arcus h b c frangi intelligatur in e, (ita vt a e, e c partes non cohæreant, & vnâ motâ alia non debeat propterea trahi) & si a b e pendeat ex solo puncto sustentaculi quod congruit puncto f; arcum a b e cum suis ponderibus mansurum vt iacebat antea, quia vtrinque pari interuallo pendent quatuor magnitudines graues 1 2. 3. 4. & 5. 6. 7. 8. Similiter si arcus e d c intelligatur suspendi ex sustentaculi puncto quod congruit puncto d, portio arcûs e d c manebit cum suis ponderibus sicuti ante diuisionem iacebat, nec vllatenus mouebitur. Hactenus conuenit inter omnes.

Ostendendum superest si sustentaculum ex puncto in quo est b, intelligatur suspendi, & ex illo vnico pendôre liberè, sustinendo arcus a e, e c onustos suis ponderibus, quorum octo pendent ex f, duo ex d, illud ita liberè pendens non mutaturum esse positionem; sed mansurum, vt antea iacebat; ac proinde vt est e b arcus ad b f, hoc est vt 4. ad 1. ita vicissim esse pondus pendens ex f ad pondus pendens ex d. Id verò patet ex eo quod illa magnitudo composita ex decem grauibus suspensa puncto b, & cohærens primo arcui a b c antequam diuideretur, diuisa postea fuit in duas partes cohærentes arcubus separatis a b e, e d c; quarum singulæ pendentes de punctis f, d, manent vt priùs iacebant; ergo habent eandem positionem ad punctum b, vnde pendent: ergo cùm sustentatæ librâ de puncto b suspensâ non mutent vim eleuandi sese mutuò nisi quia fiunt viciniores vel remotiores puncto b sustentanti; & cùm non fiant viciniores vel remotiores neutra pars fiet debilior, neutra fortior; ergo manebunt vt antea iacebant: vel si hoc non consequitur in isto genere libræ, negandum est cogere in Archimedea: ergo &c. quod erat demonstrandum, & quod clariùs patebit ex solutione nonnullorum quæ opponentur.

III. Ex demonstrandi ratione patet quod accuratè hîc inculcandum censeo, vt solutio obijciendorum liquidò constet; & vt obuiam eatur paralogismis, qui in hac materia facilè obrepunt in exercitatorum etiam cogitationes. Illud verò est demonstrationem ex Archimede nostram probare grauia a e, e c de libræ f b d punctis f, d suspensa committere æquilibrium eiusdem libræ ex b pendulæ; illa tamen grauia poni certo quodam modo dispersa & dispensata per curuas a b e, e d c, ita vt partes eorum singulæ suas habeant lineas directionis non parallelas, emissas ad i centrum ex singulis arcuum punctis. Cogita vniuersam illam grauitatem, quæ ex arcu a e suspenditur, conferri in punctum f; vniuersam verò, quæ ex arcu e c, in punctum d: in hoc casu lineæ directionis vnius brachij erunt in vnam collectæ emissam ex puncto f; alterius verò brachij in alteram ex puncto d; dum verò ita colliguntur, mutant penitus directionis positionem priorem, qua fiebat vt sese secarent omnes; cùm hîc sibi mutuò congruant; non mutarent autem, si in priore situ fuissent parallelæ ad rectas f i, d i; vnde nec suspensæ magnitudines habuissent nisi duos directionis modos diuersos; hîc verò habent innumeros. Graue istud vocetur *dispersum* siue *distributum*; aliud dicatur *coactum* siue *collectum*. Si igitur partes illæ grauitatis non ponatur manêre dispersæ, nihil concluditur vi demonstrationis, vt patet: debet ergo ad effectum demonstrationis obtinendum suspendi graue distributum per innumeras directionis lineas, & manêre cùm iisdem directionis lineis, quando eius partes ex solis punctis f & d ponuntur suspendi; ille autem modus iam explicatus est, generaliúsque patet ex vigesima propositione libri vltimi. Atque hæc libra curua per hoc *essentialiter*, vt loquimur in Scholis, differt à rectâ, vel à compositâ ex duabus aut pluribus rectis, in quarum singulis rectæ directionis inter se æquidistant om-

nes, quamuis non æquidistent directionis rectis librarum non suarum. Quòd si inferas posse dispersa grauia in curuas a b e, e d c colligi in puncta f, d absque vllo æquilibrij & demonstrationis dispendio, gratis & ἀγεωμετρήτως istud colligis, nisi ex naturâ cuiusque generis libræ id demonstres. In librâ quidem Archimedeâ, cùm lineæ directionis omnes sint parallelæ, id verum esse vltro admittimus; at in libra curua sine demonstratione concedi non debet; immò est falsum, vt magis patebit ex subijciendis. Quæcunque igitur super æquilibrio curuæ libræ sustinentis grauia, sunt à nobis demonstrata in libro septimo, intelligi tantùm volumus de grauibus distributis, & non de collectis, vt pote mutantibus naturam libræ curuæ; idque necessariò subaudiri declaramus nunc, licet expresse ibi tunc non monuerimus: etenim demonstrationis vis nihil aliud euincit, vt iam diximus. Præterea aduertimus debere ita assumi quemlibet arcum a b c, & in eo ita dispensari grauia, vt collectio omnium premat punctum b ad i: si enim nihil vrgeat; arcus a b c nihil sustinet, nec fungitur munere libræ, ideóque nec libra appellari potest; poterit tamen si fixum punctum b, vnde arcus a c b suspenditur, prematur iuxta positionem aliarum directionis linearum, quæ à linea b i diuersæ fuerint; vt numero mox sequenti constabit ampliùs. Progredior iam ad ea quæ obstare videntur veritati demonstrationis nostræ.

IV. Primum quod opponi posse videtur est, si libra a b c sustinens ex punctis f, d duas illas magnitudines manet in æquilibrio, apertè hinc sequitur, graue ex d pendens propellere tantumdem punctum b ad i centrum commune per lineam b i, quantum per eandem lineam impellit graue f: hoc enim est committi æquilibrium grauium duorum, nempe vnum tanta vi vrgere punctum suspensionis b, quanta aliud ex opposito vrget. Vnde etiam conficitur decem illas magnitudines ita dispensatas in decem partes, pari vi premere punctum b, & trahere ad i, quantum traherent omnes positæ in d. Atqui ista sunt manifestè falsa; non igitur committitur æquilibrium; sed latet aliquis paralogismus in nostra illa demonstratione.

V. Ostenditur autem facilè punctum b plus pelli versus i à puncto graui f, quàm à puncto graui d: graue enim d, cùm tendat in i per iter d i, non vrget punctum b nisi quantum obstat illi itineri; non obstat autem nisi per lineam rectam parallelam rectæ d i. Faciamus enim punctum b non esse fixum, & carere omni ῥοπῇ, sicuti & totum arcum b d, cui graue d cohærere ponitur: graue igitur d liberè pergens à puncto d ad i mouendo arcum b d cui inhæret, mouebit punctum b per rectam parallelam itineri d i; ergo quatenus b, quod fixum hæret, resistit sui lationi per illam parallelam, eatenus premitur à graui d: premitur igitur ad positionem solius d i, & nullatenus ad positionem rectæ b i. Hinc fit vt si ex arcûs h b d punctis h, d suspendantur grauia æqualia, non premant sustentaculũ b versus i; sed vt ad positionem rectæ d i, æqualibus oppositísque viribus illud premant. Iam verò ponamus graue e ferri sponte & nutu suo ad i

per directionis lineam e i; si punctum b non esset fixum, dum graue e pergit ad i pelleret punctum b, cui per arcum b g e cohæret, per parallelam rectæ e i, fieretque simul & semel appropinquatio puncti b ad punctum i, & recessus eiusdem b à recta b i u: quà itaque fieret approximatio ad punctum i, si b non maneret fixum, eatenus b premitur versus i, à graui e, dum ob adhæsionem illam resistit potentiæ grauis e. Quia verò graue g tendit per g i ad i; & semita g i magis accedit ad situm rectæ b i, quàm accedat recta e i; fit vt graue g plus premat b versus i, quàm premat graue e; quamuis g, & e ponantur æqualia. Hinc clarè liquet graue vnum & idem ex puncto quouis arcûs b h suspensum numquam tantum grauare b versus i, quantum si collocetur in ipso b: graue igitur dispersum 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. ex f pendens non ita premit punctum f, vt premeret collectum. Atque hæc est proprietas curuæ libræ in qua nullæ sunt duæ lineæ directionis æquidistantes (nisi ita volueris appellare lineas h i, i d grauium ex diametro oppositorum) cùm in rectâ librâ pressus sit idem à graui collecto, qui à disperso.

VI. Ista quæ numero quinto iam demonstrata sunt, verissimâ esse fateor: sed nego inde quicquam fieri contra assertionem nostram: nego, inquam, ex nostra conclusione confici tantumdem pelli punctum b versus i à graui ex d pendente, quantum à graui ex f; nempe quia etiam pernego æquilibrium prout conuenit omnibus librarum generibus oriri ex eo quod punctum b, vnde libra pendet, æquè prematur & propellatur ad i per lineam b i: dicendum enim est procedere ex eo quod vires neutri partium sint sufficientes ad eleuandam oppositam, hoc est, ad longiùs remouendam illam à termino ad quem sponte vergit; eatenus enim tantùm pugnant, quatenus obsistunt suis vicissim propensionibus, siue, ῥοπαῖς. Aio itaque licet b inæqualiter prematur versus i à suspensis f & d; æquilibrium tamen ideo fieri, quia neque graue f potest longiùs à centro i promouere oppositum d; neque ipsum d potest quid simile in graue f: est ergo ἰσοπαλὲς requisitum vt eueniat æquilibrium. Ex demonstratis vero in illo n. 5 satis patet neque consequens esse, vt omnes decem partes graues æquè pellant punctum b ad punctum i, dispersæ atque collectæ.

VII. Alterum quod objici potest est propositio illa R. P. Mersenni quinta Mechanicorum. *Vectis & libræ proprietas est, vt potentiæ quæ sunt in ratione linearum perpendicularium ductarum à centro vectis aut libræ super lineas directionis potentiarum, reciprocâ; sint æquilibres, hoc est æqualiter trahant aut pellant.* Additur huiusce theorematis ea probatio, quæ me nunquam adegit ad assensum: ego illud ita demonstro. Esto (*Fig.* 114.) circulus d c r centro b descriptus, à quo educti vtcunque sint radij b d, b c, & ex punctis d, c emissæ tangentes d e, e c; intelligatur libra d b c infracta; cuius duo brachia d b, b c sint rigida, & firmissimo nexu colligata; in punctis verò d, c statuantur centra grauium æqualium vergentiū ad e. Aio si libra infracta d b c suspendatur vt iacet ex puncto b, indéque liberè pendêre permitta-

tur, ipsam permansuram esse in eodem situ, absque vllo sui motu; hanc verò libræ ita suspensæ quietem voco *æquilibrium*. Quoniam enim grauia d & c eandem prorsus positionem habent ad punctum suspensionis b (etenim anguli d b e, e b c, necnon d e b, c e b, & latera d b, b c sunt æqualia; itemque d e, e c) non apparet vel tenuis vmbra rationis cur graue d vires maiores habeat ad eleuandum graue c, & vicissim; ergo clarum est omnibus pensatis æqualitatem esse virium, ideóque mansura illa esse, vt iacent, immota; quod erat demonstrandum. Hoc ipsum perinde euidens est, si pro tangentibus d e, e c sumamus secantes d f, f c conuenientes in rectæ b e punctum quodlibet f diuersum à puncto e. Secundò brachia infractæ libræ d b g sint inæqualia, sitque b g minus; per d, centro b descriptus sit circulus d c r, sintque d e, e c tangentes; per g autem ducta sit g h æquidistans rectæ c e. Aio si d e, g h ponantur lineæ directionis, & graue g sit vicissim ad graue d, vt recta b g ad b d, fiatque suspensio ex solo b puncto, mansura grauia d, g vt iacent. Istud patet ex eo quod iuxta leges libræ rectæ, cùm g h, c e æquidistent, & cùm vt b c brachium ad b g, ita vicissim sit pondus g ad d vel ad c illi æquale (quod in c poni iam volumus) pondus g in trahenda recta g b per lineam directionis g h æquales vires habeat atque pondus c in trahenda illa eadem recta b g per lineam directionis c e: sed pondus c habet vires æquas ad cohibendum pondus d ne ab eo eleuetur, hoc est remotius fiat à centro e; ergo pares vires habet pondus g; ergo pondera d, g, vt iacent, committunt æquilibrium; quod erat demonstrandum. Hoc ipsum perinde euidens est, si secantes d f, c f ponantur lineæ directionis, & rectæ c f ducta sit æquidistans g l, sintque d f, g l lineæ directionis; nempe pondus d esse ad pondus g, vt est perpendicularis ex b demissa in lineam directionis g l ad perpendicularem ex b demissam ad lineam directionis d f. Tertiò denique si anguli f b d, f b c fuerint inæquales, aio pondera ex d, c suspensa esse vicissim vt perpendiculares ex b demissas ad f c, f d. Priùs tamen monstrandum est lemmatium istud. Esto d b g (*Fig.* 114. eadem) planum suspensum ex b quolibet puncto, carens omni ῥοπῇ, in quo ponantur duo grauia d, c ita collocata, vt graue d nutum habeat ad positionem cuiuslibet rectæ d e, graue autem c ad positionem cuiuslibet c i; neutra verò rectarum d e, c i transeat per b; præterea siue nutus d e, c i æquidistent, siue non, grauia d, c ita sese mutuò cohibeant, vt planum non mutet situm quem ante ipsorum aduentum habebat. Patet si in eodem illo plano intelligantur rectæ d b, b c cohærentes, planum d b c non posse moueri à grauibus d, c retinentibus eosdem nutus, quin moueatur planum m b n, cùm sint vnum & idem. Patet quoque si rectæ m b, b n occurrant nutibus d e, c i in m, n, planum e m b n i, non motum iri ob eandem causam. Si igitur m b n ponatur libra infracta sustinens pondera d, c per lineas directionis m d, n c, ipsam vi ponderum moueri, nihil erit aliud, quàm planum e m b n i moueri vi eorundem ponderum; & si vi eorundem ponderum non possit moueri e d b c i, neque poterit pla-

num e m b n i. Hoc posito (quod sanè concedendum videtur sincero cuilibet veritatis Geometricæ indagatori) demonstratur assertum hoc pacto. Sit libra infracta m b n suspensa ex b, sustineatque ex m, n pondera d, c, quæ vicissim sint vt perpendiculares ex b in lineas m e, c n: aio libram infractam m b q mansuram vt iacet, si ex solo puncto b suspendatur. Perpendiculares sint d b, b q: ergo cùm pondus d sit ad pondus c, vt perpendicularis b q ad b d, si libra infracta ponatur d b q, planum e d b q i non mouebitur ab illis ponderibus, vt primo loco ostendimus; ergo cùm libra infracta d b n sit in eodem plano e d b n i, neque ipsa mouebitur suspensa ex eodem puncto b; ergo quomodocunque se habeant rectæ directionis d e, c i, si pondera d, c sint reciprocè vt perpendiculares ex b in rectas d e, c i demissæ, committetur æquilibrium libræ infractæ, quod erat demonstrandum. Si itaque perpendiculares ex b puncto suspensionis actæ in lineas directionis iam explicatas, vocentur brachia libræ, verum est in libra infracta non minùs quàm in recta, *vt sunt pondera, ita vicißim esse brachia.*

VIII. Tria hîc genera librarum distinguimus plurimùm diuersa, quamuis eadem reciprocationis proprietate prædita sint; nempe libram rectam, infractam, & curuam. Recta habet brachia in directum posita; infracta habet illa angulum constituentia; curua habet circuli arcus pro brachiis. Differunt autem maximè diuersitate linearum directionis: nam in recta omnes sunt parallelæ inter se; in infracta, omnes vnius ponderis partes suos exercent nutus per parallelas inter se; & omnes alterius æquè prementis ex opposito, per parallelas quoque inter se, quamuis parallelæ ponderis vnius cum parallelis alterius angulum constituant. At verò in libra curua omnes vtrinque directionis lineæ (quæ innumeræ necessariò sunt) vergunt ad vnum & idem punctum. Hæc porrò libra curua propiùs accedit, vt patet, ad proprietates grauium solidorum prout ea de facto suspenduntur à machinariis. Istam verò tam enucleatam explicationem trium librarum debemus dubitationi quæ emersit, & cuius tollendæ causa necessaria fuit. Vnum hîc præteriri non debet libram videlicet infractam à Mersernno explicatam non constare nisi duobus brachiis, siue duabus directionis lineis; posse tamen intelligi libram, quæ constet longè plurimis. Vt si (*Fig.* 311.) arcui a h b c intelligas circumscribi figuram rectilineam decem laterum tangentium peripheriam in punctis 1. 2. 3. 4. &c. & in singula latera dispensari parem grauitatem æquabili & vniusmodi lege, ita vt partes grauitatis dispensatæ in singula latera habeant nutus parallelos radio ad tactum emisso. Si ista latera intelligantur firmo nexu colligari, fiatque compositæ lineæ suspensio ex b, & ponatur sustinere ex solis punctis f, d grauia colligata 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. ex puncto autem d grauia 9. 10. connexa inter se, & soluta ab aliorum octo nexu; æquilibrium committetur. Erret verò plurimùm quisquis putarit rationem & virtutem premendi istius libræ non esse diuersissimam à ratione & virtute qua premeret eadem grauitas dispensata in arcum a b c iuxta leges libræ cur-

uæ; aliud enim eſt grauia diſpenſata eſſe vtrobique eadem, aliud pari modo, paribúſque viribus premere ſuas libras. Vnde liquet iuxta noſtram methodum aſſignari rationem ponderum vtrinque pendentium in libra infracta, etiam quando plura quàm duo habet latera, quoties nempe ea ſunt æqualia, circumſcripta vel inſcripta circulo; comprehenduntur autem eo numero a b c, qui ſecetur bifariam in b; & ita in e, f, vt dimidium numeri e c ſit æquale numero b f.

IX. Reſpondemus nunc tandem ad illud quod n. 7. obiectum fuerat; propoſitionem Merſennianam nihil prorſus obſtare veritati noſtræ propoſitionis: agit enim de libra infracta; nos verò de curuâ, id eſt, de ea cuius partes vno modo graues ad centrum commune vergunt innumeris lineis directionis.

X. Sed ecce in omni genere libræ oſtenditur graue ſuſpenſum in f ad graue ſuſpenſum in d, illíque æquiponderans, eſſe vt eſt (*Fig.* 113.) recta d i ad f q, vel vt ſinus arcûs b d ad ſinum arcûs f b. Quoniam enim centrum grauitatis decem ſimul grauium eſt in recta b i; & quoniam partium duarum ex f & d ſuſpenſarum centra grauitatis ſunt in rectis f i, d i; idem verò manet æquilibrium in quocunque puncto radiorum f i, i d collocentur eiuſmodi centra; ergo ſi locentur in f, d, iungaturque recta f d occurrens rectæ b i in o; cùm centrum grauitatis duorum ſimul grauium f, d ſit in recta f d connectente eorum grauitatis centra, & cùm ſit etiam in recta b i, ipſum erit o: ergo vt o d recta o f, ita in triangulis ſimilibus o d i, o f q ſunt homologa latera d i, f q: ergo vt d i recta ad f q, ita eſt pondus f ad pondus d. Demonſtratio verò eſt eadem in aliis caſibus.

XI. Reſpondemus primò vim argumenti retorqueri poſſe in aduerſarium. Quoniam enim æquilibrium perinde committetur ſi graue quod in d collocatum fuit, ponatur in B; id ita fiat, & eſto B centrum grauitatis, iungaturque recta f B occurrens rectæ b i in p: punctum igitur p eſt centrum grauitatis magnitudinis compoſitæ ex duobus grauibus f, B: ergo vt recta p B ad p f, vel vt B i ad f q, ita eſt graue f ad d, vel ad B: ſed vt idem graue f ad d vel ad B, ita etiam oſtendimus eſſe rectam d i ad eandem f q: ergo d i, B i ſunt æquales rectæ, totum & pars, quod eſt abſurdum. Obiecta igitur ratio peccat in aliquo.

XII. Reſpondemus ſecundò illam perpetuo paralogiſmo laborare, dum ea quæ ſunt libræ planæ attribuit curuæ. In libræ planæ principiis omnis magnitudo habet centrum grauitatis, at in libræ curuæ genere nullam ſcio præter ſphæricam, quæ extra grauium commune centrum poſita pendere poſſit ex vno puncto indifferenter in quocunque ſitu, quod tamen definitio centri grauitatis requirit: eſto quælibet habeat centrum grauitatis *aptitudine proximâ*, punctum videlicet quod in centro grauium cõmuni ſtatutum, verè fungitur munere centri grauitatis, & dat magnitudini ἀδιαφορίαν illam ad quemcunque ſitum. Præterea quod recta connectens *centra aptitudinalia* (ita loqui nunc liceat) duorum grauium in hoc genere

libræ

libræ curuæ, ita à totius centro *aptitudinali* diuidatur, vt ficut fufpenfa pondera ita fint viciffim portiones ipfius rectæ, eft proprietas libræ rectæ, quæ curuæ concedi non debet, nifi poftquam fuerit demonftrata: gratis igitur concluditur *vt o d recta ad o f, ita esse pondus f ad pondus d*, quamuis daremus punctum o effe illud *aptitudinale* centrum.

XIII. Refpondemus igitur vltimò nihil Geometricè contra nos demonftrari vi rationum n. 10. oppofitarum; cùm in illis plurima affumantur contra leges Geometricæ demonftrationis. Occafione illius paralogifmi, quo quæ funt libræ rectæ traducuntur ad curuam, moneo fimile peccatum commiffum iri ab eo qui grauitatis vniufmodi difpenfatæ per totum arcum ab e (*Fig.* 113.) fiue decem illorum fimul grauium centrum quod fuprà vocauimus *aptitudinale* putaret inueniri debere methodo, quam in vigefima prima quinti libri præfcripfimus, & qua euincitur iftud generale & rotūdè expreffum, *vt arcus a f e quicunq; semiperipheria circulari non maior se habet ad subtensam a e, ita est radius f i ad rectam i r, qua grauitatis centrum arcûs a f e distat à centro i.* Illa enim methodus fundatur in libræ planæ principiis, in qua omnes partium nutus fiunt per parallelas: at in ifta curua fiunt per rectas conuenientes in idem centrum i. Præterire non poffum ifta quæ hoc in loco aduerfus noftra afferta objiciuntur, non cohærere fecum: fi enim ad æquilibrij rationem neceffe foret vt pondera vtrinque fufpenfa (*Fig.* 113.) premerent punctum b, vt obiectorum primo contenditur; non poffet libra f b d compacta ex rectis f b, b d ita pendêre ex b, vt immota fuftineret graue vnum ex f pendens per lineam directionis f i, alterum verò ex d per lineam directionis d i; nam graue in d pofitum non premeret punctum b. Atqui ex hac quæ objicitur Merfenni propofitione id fieri poteft, fi graue in f collocatum, fuerit ad graue in d pofitum, ficut eft b i finus anguli b i d, ad f q finum anguli b i f.

XIV. Reftat vnum quod quæri poffe video, vtrum fi graue difperfum collocaretur totum in r, ita vt per vnicam directionis lineam r i, omnes eius partes vergerent ad i; perinde premeret punctum f verfus i. Refpondemus fi poftulatum illud feruetur in curuâ librâ, *idem graue per eandem directionis lineam f i pariter trahere punctum b versus i, siue collocetur in b, siue ab eo pendeat per lineam f r, partem radij f i*; dicendum effe magis premendum effe punctum b per totam grauitatem collectam in r, quàm per difperfam in 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. partibus: ratio eft quia fi poneretur tota in r, fingulæ partes premerent punctum b directò verfus i; at verò quando funt difperfæ premunt obliquè, ac proinde minùs potenter, vt fupra oftendimus n. 5. Quod fi quis nollet dare illud affumptum, malletque afferere graue idem in hac librâ minùs premere punctum f in minori à centro i diftantiâ, quàm in maiore, poffet refpondere aliter: mihi tamen longè verifimilius eft retinendum effe illud poftulatum: Eo autem retento fi diametro b i defcribatur circulus b y i z, & ex arcu h b d per lineas directionis ad i porrectas transferatur ex arcu h b d fufpenfa grauitas in arcum byiz, idem

consequetur effectus libræ curuæ b y i z suspensæ ex b; eruntque vt brachia huius curuæ, ita reciprocè suspensa. Clariùs autem hoc posito dicetur, quæcunque sit curua b i y z cui grauitas arcûs h b d iam dicta ratione aptetur, vt sunt anguli qui ad i constituuntur, ita reciprocè esse pondera; quem loquendi modum iam sub finem duodecimæ septimi libri indicauimus. Præterea manente b y i z circulo, esto b z quadrans eiusmodi peripheriæ, & b y vncia eiusdem peripheriæ totius; ex y, z ducantur rectæ y b, z b, fiatque libra infracta y b z, sustinens ex y, z grauia committentia æquilibrium per lineas directionis y i, z i. Pondus igitur y erit ad pondus z per demonstrata n. 7. vt recta b z ad b y; hoc est, vt diameter quadrati ad latus eiusdem. At si arcui s z æqualis abscindatur z t, & ex arcu b y i resecetur b y x æqualis ipsi b z t, arcus x b s ad arcum s z t erit in hoc casu vt ternarius ad vnitatem, vel vt 180. gradus peripheriæ circuli b x i z, ad 60. gradus; hoc est, vt arcus b z ad b y. Ex principiis igitur libræ curuæ si per arcum x b t dispensetur æqua lege grauitas x b z tendens ad i per lineas directionis ex i emissas ad quodlibet peripheriæ x b t punctum; libra x b z de b suspensa, & arcubus x y s, s z t ex y, z pendentibus, atque vt iacent manentibus, committetur æquilibrium; ergo in hoc genere libræ, graue x y s pendens ex y ad graue s z t pendens ex z se habet vt ternarius ad vnitatem; in alio autem genere infractæ, graue ex y pendens ad pēdens ex z, se habet vt diameter quadrati ad latus eiusdem. Si igitur pondus libræ istius infractæ dispensetur per arcum x b s, pondus verò pendens ex z, per arcum s z t; libra non manebit in æquilibrio; sed inclinatio fiet ad partes z: ergo ex ista dispensandi ratione magis debilitatur pondus infractæ libræ ex y pendulum, quàm pondus ex z. In duplici grauitate ita dispensata per arcus x y s, s z t considerari & distingui debet primò ipsa in se grauitas seorsum spectata, secundò ipsius vires vt premat illa quidem punctum y ad i; ista punctum z ad idem i: grauitates in se spectatæ sunt vt ternarius ad vnitatem; vires premendi iam dictæ, sunt vt diameter quadrati ad latus eiusdem; quod diligenter notari oportet, vt natura libræ penitus inspiciatur, & ita vitentur mille sophismata. Præterea hoc moneo, si arcui t s abscindatur x π æqualis; quamuis si graue x π penderet ex libræ curuæ x b t puncto λ bifariam secante arcum x π, æquiponderaret magnitudini s z t ex z pendenti; postquam tamen non ampliùs pendet ex λ, sed ex y, non æquiponderat illi, licet non mutet situm; eiusque vires ex sola mutatione puncti suspensionis immutantur: sed hoc quoque verum esse comperies in libra Archimedea, si posueris lineam x b t esse rectam, & fiat libra pendens ex b, maneatque pariter diuisa.

XV. Ad ampliorem libræ Archimedeæ explicationem aduertimus in postulato illo, *cùm brachia vtrinque fuerint æqualia* (Fig. 100.) *c a, a t, & appensæ magnitudines æquè graues; si ad earum alterutram b aliud graue adiiciatur, inclinari libram ad partes adiecti ponderis*, istam inclinationem ita intelligi à nobis, vt linea directionis b h maneat eadem, & in illa etiam maneat graue

appensum; vnde fit vt cùm libræ brachium a b inclinatum fuerit in a i, si ex a i auferatur a g ipsi a b æqualis; suspensio progressu temporis mutata fuerit à puncto g ad i, ita vt graue in illo situ, iaceat in libræ a g puncto i. Hic rem concipiendi modus videtur simplicior, minusque obnoxius errori, & paralogismis; quàm si conciperemus eiusdem grauis lineam directionis fieri viciniorem perpendiculo ex a demisso; quod tamen in vulgaribus mercatorum bilancibus vsu quotidiano euenit. Cauendum verò imprimis censeo ne quis ita libram fingat, vt ex se inepta sit ad inclinationem, accedente vel minimo graui: si quis verbi gratia poneret libram c b suspendi ex a immobili; grauia verò vtrinque æqualia ex brachiorum c a, a b æqualium extremis pendêre, nec posse diuelli à punctis c, b, lineasque directionis c d, b h esse quoque immobiles; in hac hypothesi c a b non esset vertibilis circa a, quocunque aduentu ponderis; quia videlicet quæcunque alia libræ inclinatæ portio a i est maior portione a g vel ab: hæc igitur constructio libræ est ineptissima. Porrò hæc ipsa cautio est adhibenda in libra curua; si quis enim velit arcum (*Fig.* 113.) f b n suspendi ex b; & ex f, n pendêre grauia ad æquilibrium apta; velit tamen in inclinatione libræ, punctum b hærere immobile, & brachij b f punctum f colligatum manere cum graui f, & graue f quamdiu mouetur, persistere in linea directionis f i; construit libram indeclinabilem, & minimè libram. Sicuti igitur in superiore casu aliud & aliud libræ punctum respondet lineæ directionis, ita in isto: hocque tantùm est discriminis, quòd in libra recta punctum illud libræ vsque & vsque remotius euadit à puncto vnde suspenditur libra; at in curua potest esse propinquius. Sed casum libræ ex aduentu grauis consequi debere satis est ad veritatem demonstrationum isorrhopicarum, quomodocunque tandem à Physico definiatur modus ille cadentis brachij; dummodo libra ita construatur, vt nihil impediat proximam eius dispositionem ad cadendum ex accessione vel minimi grauis.

XVI. Atque ex his omnibus satis liquet à methodo Archimedea me non deflexisse, nisi certè ille deflexus percipi nequeat nisi lyncea mentis acie, quod aliis inquirendum relinquo, paratus interim doceri; experientia enim frequente didici hominem me esse, etiam vbi non nisi demonstrationibus agere mihi videor. Hoc autem quod n. 3. scripsi, hîc iterum mihi describendum esse censeo, in propositionibus libræ curuæ, quam libro septimo tractaui, me non agere nisi de magnitudine dispersa, & tendente innumeris lineis directionis ad centrum commune grauium; quamuis illi non assignem nisi vnum punctum vnde pendeat per lineam directionis illam videlicet in qua est punctum è quo vno magnitudo illa dispersa si penderet, quiesceret immota. Si quid verò lectori fortè occurret ibi, quod cum iam explicatis non ita aptè cohærere videatur; huc reduci debet, vel certè iuxta hoc reformari.

XVII. In septimi libri iam laudati propositionis quadragesimæ co-

rollario secundo ostendi alia methodo reciprocæ libræ legem; illa tamen methodus assumit (*Fig.* 103.) possibile esse graue g, quod paribus quibuslibet temporibus per arcum b u d sponte sua latum interualla vsque decurrat æqualia illis quæ percurrerit magnitudo c per se mota. Istud cùm non demonstretur ita esse, Archimedeam demonstrationem illi semper antetuli, quod in eiusdem propositionis corollario tertio satis indico. Principium autem illud esse verum in libra recta patet ex demonstratione legis illius reciprocæ Archimedeâ; esse autem falsum in librâ curuâ, liquet ex demonstratis nostris. Quamuis autem pondera in curuæ libræ arcu, si æstimentur secundum vires premendi quas habent, non sint vicissim vt brachia, sed vt sinus arcuum ex n. 14. id satis est ad hoc vt certum sit in libræ curuæ casu, non posse dari pondus g, quod paribus temporis partibus, spatij partes percurrat pares illis quas decurrit pondus c.

XVIII. Antea quam dimittamus libram proponimus causam quæ nunc nobis occurrit, cur Aristoteles pronuntiarit phalangem esse vectem inuersum; illam, inquam, qua exigui appendiculi ope magna onera suspendebantur in macello, sicuti narratum extat prop. 42. libri postremi. Pone (*Fig.* 104.) phalangem b a suspendi ex f, & carnem h in lance e prægrauem eleuare appendiculum a; hoc enim exigit lex emptionis & venditionis quæ fit per libram: ergo dum carnes appensæ deprimentur eleuabitur sursum versus phalangis b a pars longior f a: proinde cùm vectem imitetur virga a b, & hypomochlij vice sit f; longior phalangis pars f a repræsentabit portionem illam vectis cui admouetur virtus vectiarij: cùm ergo portio illa longior sursum attollatur in magnâ carnium copiâ per phalangem diuendendâ, & cùm in vecte inuerso eadem pars sursum pellatur à vectiario patet ratio verisimilis cur phalangem omnem dixerit Aristoteles quodammodo (vt interpretor) esse *Vectem inuersum.*

XIX. Experientissimus Mersennus, quem nunc præ manibus habeo, docet me vnum de reciproco motæ libræ itu & reditu, quod hîc referre debeo. *Iugum* (inquit cap. 13. Reflex.) *bilancis, cuius pars Vtraque bes pedis, è linea horizontali depressum, horâ dimidiâ Vibratur; ita Vt quælibet Vibratio duret duo secunda & paulò ampliùs.* Huius experimenti causa, alia esse debet ab ea quam pro simili effectu in libra Archimedea demonstrauimus cum Iordano prop. 34. libri vltimi. Ostendimus enim in prop. 36. eiusmodi causam cessare in librâ cuius ῥοπαὶ sunt ad centrum grauium, ac consequenter in illo quæ allato experimento subjicitur. Causa itaque aliunde peti debet à perito Physico-mathematico; vt, ex eo quod totius illius machinulæ ex lance vtraque, iugo, & funiculis compactæ centrum grauitatis fuerit infra punctum cui ipsa machinula nitebatur pendula: sicuti si chartaceum, aut ex eiusmodi materiâ aliâ triangulum isosceles vertice suspendas, ita vt basis connectens latera æqualia æquidistet horizonti; deinde verò basim ab horizontali situ dimoueas, sinasque triangulum suo nutu sese mouere, vibrationes hinc inde conficiet non paucas, de quibus nonnulla contem-

platione digna accuratè annotauit idem Merſennus lib. Reflex. cap. 12. & cap. 19. vbi tandem pag. 158. ingenuè fatetur *nullum eſſe funependulum quod exactè, vel ſecunda, vel quodlibet aliud tempus æquare poßit ſuis vibrationibus, cum ſint inæquales . . . . quanquam tempuſcula vibratiunculis illis explicata tam parùm inter ſe diſcrepent, vt in praxi pro iiſdem ſumi poßint.* De hoc verò *funependulo*, vel vt alij appellant, *perpendiculo* agit ſæpius eo libro, vt cap. 9. 10. 11. & pag. 17. Plurima etiam obſeruata leges in eodem Reflexionum libro de grauium caſu accelerato cap. 9. 15. 16. & vltimo pag. 91. Paginâ verò 135. fatetur nullâ demonſtratione euinci Galilæi eâ de re ſententiam; *quemadmodum*, inquit, *neque rationes quæ hactenus allatæ ſunt in gratiam vtriuſque motûs terræ, quicquam demonſtrant, vt optimè annotauit Ariſtarchi Commentator.* Is eſt D. Roberuallius, cuius hæc ſunt verba in dedicatoriâ libri epiſtolâ; *nec illud conſtat quidem an ex tribus Autorum ipſorum celeberrimorum diuerſis ſyſtematis, aliquod verum ſit, ac genuinum Mundi ſyſtema: forſan etiam omnia tria falſa ſunt, & verum ignoratur.* Non tamen puto eum velle addubitari an ea ſimul falſa ſint, quatenus hinc affirmant tellurem immotam ſtare, inde contendunt non ſtare; vtrumque enim horum falſum ſimul eſſe nequit; ſed illud falſum eſſe conſtat quod Galilæus Romæ conceptis verbis, relatis à Ricciolo tom. 2. pag. 499. publicè abiurauit anno 1633. die 22. Iunij. Vult igitur dicere cùm in ſingulis ſyſtematis multæ aſtruantur concluſiones, nullum fortaſſe eſſe, cuius omnes aſſertiones ſint veræ. Redeo ad iugorum libræ *vibrationes* vel *reciprocationes*, vel vt alij loqui malunt *oſcillationes* illas; vt addam neque hoc experimentum conferre quicquam mihi videri ad explicandam libræ Villalpandi eleuationem illam quam in propoſitione 37. dedimus Sauotio: nam ſi hæc fuiſſet cauſa eleuationis, ſtatim viſa fuiſſet libra deprimi in oppoſitam partem, idque obſeruaſſent omnes qui aderant, nec Villalpandus ipſe narrare omiſiſſet. Cæterùm quamuis libra, qua vtimur in praxi, non ſit reipſa Archimedea; attamen pro Archimedeâ ſumitur abſque vllo ſenſilis erroris periculo, ob ſummã à centro ad quod lineæ directionis vergunt diſtantiam; vnde fit vt ſenſuum iudicio parallelæ æſtimentur; quod iam monueramus in corollario ſecundo vigeſimæ primæ vltimi libri.





APPENDIX SECVNDA.

In cuius priore parte potiſſimùm inuenitur recta æqualis perimetro tam ſpirali quàm parabolicæ, ex datâ hyperbolæ quadraturâ. In poſteriore proponitur imprimis quadratura Nicomedeæ conchoideos ex datâ hyperbolæ & circuli quadraturâ : item figuræ cuiuſcunque ſuper quauis curuâ inclinatæ, genitæque ex erectâ datâ.

QVOD olim fecit Conon ille apud Archimedem laudatiſsimus, cum aliquot reconditæ tunc Geometriæ theorematum à ſe primùm repertorum nudam propoſitionem ad Amicos priuatim miſit demonſtratione penes ſe preſsâ; fortaſſe quia (quod ſæpe euenit) illam è mentis arcano in aduerſaria nondum tranſtulerat: hoc ipſum alter ſeculi noſtri Conon D. de Fermat cùm ſæpe aliàs, tum nuperrimè de argumento ſummè arduo præſtitit. Poſtremas ego iſtas propoſitiones, quoniam mirificè illuſtrant ea quæ de quadratricibus Vngularibus in quinto, & de ſpiralibus lineis in ſexto libro ſcripſi, huic operi attexere (quod ſingulari eius modeſtiæ inopinatum profectò accidet) non dubito: fieri enim nequit quin iis inſpectis, quilibet alius meis auſis faueat, & de publicâ hac ad Geometrica inuenta acceſsione non ſummopere gaudeat. Iſta ſi pro meis euulgare decreuiſſem; Vir quidem modeſtiſsimus, qui non ſibi ſed Geometriæ famam quærit, æquiſsimo rem tuliſſet animo: id tamen alieniſsimum à me ſemper fuit; nec exiſtimo Geometræ grauius quicquam obijci poſſe, quàm quod alicui exprobari aliquando audiui, totus nos es tuus, totus es alienus; & hac ipſa ratione qua Geometra es,

Caluus cum fueris, eris comatus.

Hunc autem iamdiu eſſe morem Viro Clariſs. Vt ſua per Amicorum manus Geometrica tacitè ſpargat, luculenter teſtatur R.P. Merſenn. prop. 47. Hydr. pag 193 taceo, *inquit*, varios illos περὶ ἐπαφῶν; de maximis, & minimis; de tangentibus; de locis planis; ſolidis; & ad ſphæram; quos clariſſ. Senator Toloſanus D. Fermatius huc ad nos miſit. *Plura alia eius inuenta commemorat in præfat. ad Mechanica n.* 4. *in Balliſticis pag.* 57. *in Analyſi pag.* 385. *Hinc factum eſt Vt in ore ſummorum etiam in Italia Geometrarum Torricellij & Caualerij ſemper fuerit, quod teſtatur doctiſsimus Bullialdus in præfatione opuſculi* de Poriſmatibus. *Cæterùm non res tantum, ſed Verba etiam ipſa ſunt integerrimi Senatoris; quibus omnibus de meo adijcio in poſteriore parte innumeras curuilinearum figurarum, in quibus eſt Nicomedea conchoides, quadraturas: quæ omnia ſi Vera eſſe comprobabuntur, ex totâ iſta appendice confirmabitur illud, quod quidam dixit*; hac tempeſtate in Geometricis, inuentum & ſuperatum fœliciter eſſe Bonæ ſpei promontrium illud, vnde

expedita existat nauigatio, ad inaccessas antè tetragonismorum præsertim regiones.

PARS PRIOR.

I. Sit (*Fig.* 105.) parabole b a d, cuius axis a c, applicata b c, rectum latus a e: quæritur ratio curuæ a b ad rectam b c.

Esto hyperbola m l o, cuius centrum g, transuersum latus f l æquale rectæ a e, quæ est rectum datæ parabolæ latus: axis hyperbolæ sit l n, rectum verò illius latus sit æquale lateri transuerso, vt nempe rectangulum quoduis f n l sit æquale quadrato applicatæ m n. Ad punctum g excitetur perpendicularis g h æqualis rectæ b c in parabola. Deinde ductis rectis h m, & l i, ipsis g n & g h parallelis, per punctum m in quo recta h m occurrit hyperbolæ ducatur applicata m n.

Aio quadrilaterum m h g l, cuius tria latera sunt rectæ m h, h g, g l, quartum verò latus curua hyperbolæ m l, esse ad rectangulum i g, vt curua parabolica a b est ad rectam b c.

II. Data sit (*Fig.* 106.) parabole b a d, cuius axis a c, applicata b c, rectum latus a e. Circa applicatam b c voluatur spatium parabolicum b a c. Quæritur dimensio superficiei curuæ illius solidi.

Exponatur hyperbole m h, cuius axis h i, transuersum latus h f æquale quartæ parti lateris recti paraboles, siue rectæ a e; rectum verò illius hyperbolæ latus sit æquale transuerso, vt nempe rectangulum quoduis f i h sit æquale quadrato applicatæ i m. Fiat recta h i æqualis rectæ a c axi paraboles, & ducatur applicata i m. A rectangulo sub c a in curuam parabolicam b a, auferatur spatium hyperbolicum i m h; reliquum quadretur. Diagonia illius quadrati erit radius circuli superficiei curuæ solidi quod fit à rotatione spatij a b c, circa applicatam b c.

III. Sit semiparabola quæuis a c (*Fig.* 107.) cuius vertex a, axis a b. Ab ea curua formentur aliæ curuæ infinitæ, vt a f, a e, a d &c. Ita autem formantur, in curua a f applicata b f est æqualis curuæ parabolicæ c a; & sumpto similiter quouis puncto n, à quo ducatur applicata n p, applicata n p est etiam æqualis curuæ parabolicæ a o. In curua e a applicata e b æquatur curuæ secundi gradûs f a, & illius applicata q n æquatur portioni secundi gradûs, p a. Item in curua a d applicata b d æquatur curuæ tertij gradus e a; applicata verò n r, portioni eiusdem curuæ tertij gradûs q a, & sic in infinitum.

Aio omnes huiusmodi in infinitum curuas rationem habere datam ad parabolas primarias, hoc est, simplices: enuntiari quippe potest generale theorema hoc pacto. Continuetur parabole primaria a c in infinitum per puncta v. g. m, l, k, & illius axis similiter ad puncta quotlibet g, h, i producatur: fiant rectæ b g, g h, h i singulæ æquales axi a b, & ducantur applicatæ g m, h l, i k. Curua parabolica a m est ad curuam secundi gradûs a f, vt applicata g m ad applicatam b c. Curua parabolica a l est ad cur-

uam tertij gradûs a e, vt rectah l ad b c rectam. Curuā parabolicā a k est ad curuam quarti gradûs a d, vt applicata k i ad rectam b c, & sic in infinitum.

Si verò intelligantur a m g, a f b circa applicatas g m, b f rotari, superficies curua ex rotatione spatij a m g circa rectam g m, erit ad superficiem ex rotatione spatij a f b circa rectam b f, vt cubus rectæ g m, ad cubum rectæ b c. Similiter superficies curua ex rotatione spatij a l h circa h l erit ad superficiem curuam ex rotatione spatij a e b circa rectam b e, vt cubus rectæ h l ad cubum rectæ b c; & sic in infinitum.

IV Esto figura semicycloides b a (*Fig.* 108. 109.) à qua formetur alia curua d a ea conditione vt applicatæ b c, c d; f o, eo sint inter se semper in eadem ratione data. Demonstrarunt Geometræ semicycloidem b a esse duplam rectæ a c, quæ est diameter circuli cycloidem producentis. Quæritur relatio curuarum a d ad alias lineas aut curuas, aut rectas.

Ita autem generaliter definimus: si hæ nouæ curuæ sint intra cycloidem & diametrum circuli generantis, vt contingit in figura 107. omnes hæ curuæ a d, earúmq; portiones erunt æquales curuis parabolicis. Quod si nouæ curuæ sint exteriores cycloidi, vt in figurâ 108. omnes hæ curuæ a d, earúmq; portiones datam habebunt rationem ad summam rectarum & circumferentiarum circularium.

Enuntiari potest in figura 108. generalis propositio hoc pacto. Fiat vt differentia quadratorum b c & c d ad quadratum c d, ita quadrupla rectæ a c ad rectam a m. Et per punctum a tanquam verticem describatur parabole cuius rectum latus sit a m, & axis a c; occurrat autem parabole rectæ b d c productæ in puncto g; rectæ verò f e o in puncto h. Ratio curuæ a g parabolicæ ad curuam a d erit data, eadem nempe potestate quæ est quadrati b c ad differentiam quadratorum b c, c d. Eadem verò erit ratio portionum a h, & a e. Ratio verò superficierum curuarum quæ oriuntur ex rotatione spatij a c g circa applicatam c g, & ex rotatione spatij a d c circa rectam d c, eadem est quæ curuarum a g, & a d. Similiter in portionibus a o h, a e o, circa rectas o h, & o c rotatis.

In figura autem 109. in qua curua a d est exterior cycloidi a b; fiat vt differentia quadratorum c b, c d ad quadratum c d, ita recta a c ad c m, rectæ a c in directum positam. Super recta a m describatur semicirculus, quem rectæ d b c, e f o secent in punctis g & h. Ratio curuæ a d summam curuæ circularis a g & rectæ g c dabitur. Erit nempe vt quadratum b c ad differentiam quadratorum d c, c b, ita potestate summa lineæ circularis a g, & rectæ g c, ad curuam a d; & similiter summa lineæ circularis a h & rectæ h o in eadem erit ratione ad curuam a e.

V. Sit in figura 110. parabole a c, cuius vertex a, axis a b, applicata c b. A curuâ parabolica c a deriuentur aliæ in infinitum curuæ c d, c e, c f, simili qua in figurâ 107. vsi sumus methodo; nisi quod in hoc terminum applicatæ seruamus, in illa verò terminum axis eundem semper retinemus.

nemus. Ducatur nempe g h i o m axi a b parallela; ea erit natura curuarum huius speciei, vt recta b d quæ secat in d curuam c i d secundi gradûs, sit æqualis curuæ parabolicæ d c: recta item g i sit æqualis c h portioni parabolicæ: recta autem b e quæ secat curuam tertij gradûs c o e sit æqualis curuæ d i c secundi gradûs; & sic de cæteris in infinitum, earumque portionibus.

Aio omnes huiusmodi curuas c d, e c, f c in infinitum, æquales esse curuis parabolicis primariis seu simplicibus, diuersis tamen à parabolis quæ æquantur curuis iuxta methodum tertiæ figuræ generatis. En itaque theorema generale.

Exponatur parabole r p, cuius axis r q æqualis axi a b prioris parabolæ; rectum verò latus r u sit duplum recti lateris a n. Aio parabolen r p ita descriptam æqualem esse curuæ c i d. Si verò manente axe r q æquali a b, rectum latus r u fiat triplum recti lateris a u, tunc curua parabolica r p, erit æqualis curuæ c o e. Si verò manente semper axe r q æquali axi u b, rectum latus z u fiat quadruplum recti lateris a n, tunc curua parabolica r p erit æqualis curuæ c m f. Si autem circa rectas a b, b d, b e, b f rotentur spatia a c b, d c b, e c b, f c b in infinitum, dantur circuli æquales omnibus & singulis superficiebus curuis solidorum inde oriundorum, eadem omnino facilitate qua in conoide parabôlico ex parabola a c circa axem a b descripto, circulum curuæ ipsius superficiei æqualem repræsentamus: Eius verò constructionem non adiungeremus, cùm iam ab aliis inuentam audierimus (licet eorum scripta hac de re ad nos non peruenerint) nisi quod nostra hæc constructio ad methodum generalem in omnibus conoidibus circa axes b d, b e, b f nouarum istatum curuarum in infinitum producendis facillimè producitur.

VI. In figura 110. circa rectam b d rotetur curua c d, superficies curua inde oriunda hoc pacto inuenitur. Fiat ex superiore methodo curua parabolica r p æqualis curuæ c i d; circa rectam r q rotetur parabola r p. Superficies conoidis parabolici r p q ad superficiem conoidis d i c b, erit vt applicata p q ad applicatam c b; si p r parabola iuxta præcedentem methodum fiat æqualis curuæ c o e, conoides parabolicum r p q dabit superficiem curuam quæ ad superficiem curuam conoidis e o c b erit vt applicata p q ad applicatam c b; & sic in infinitum.

VII. Sit in figura 111. parabole f b a d, cuius axis e a, applicata f e. Quæritur dimensio superficiei curuæ solidi quod fit à spatio a b f e, circa axem a e rotato. Fiat a c æqualis quartæ parti recti lateris, & applicetur c b; fiat e h æqualis a c, & applicetur g h; quadretur c b g h, hoc autem est facile ex Archimede; diagonia quadrati spatio c b g h æqualis est radius circuli æqualis superficiei curuæ conoidis f a d circa axem a e

VIII. Videat subtilis ille Geometra qui nuper æqualitatem helicis & parabolæ demonstrauit, an potuerit vniuersalius concipi theorema, & helices infinitæ cum infinitis parabolis eleganter comparari sequentis

propositionis beneficio generaliter, si libuerit, enunciandæ & exemplificandæ.

Proponatur (*Fig.* 112.) helix cuiuscunque in infinitum speciei in figura 38. libelli Dettonuillani, in qua potestas quæuis radij a b ad potestatem similem rectæ a c sit in ratione potestatis cuiuslibet, circumferentiæ totius b e 8 b ad potestatem similem portionis periphericæ e 8 b. Exponatur separatim parabola, cuius semibasis siue vltima applicatarum r p æquetur radio a b, axis verò a r portioni circumferentiæ totius b e 8 b, cuius numerator æquetur exponenti potestatis diametri a b, denominator verò æquetur aggregato exponentium potestatum diametri a b & circumferentiæ b e 8 b. Denique potestates applicatarum in parabola, quarum exponens æquetur aggregato exponentium potestatum diametri a b & circumferentiæ b e 8 b, sint inter se vt potestates portionum axis, quarum exponens est æqualis exponenti circumferentiæ b e 8 b.

Aio helicem ita effictam, parabolæ ita constructæ fore semper & in quocunque casu æqualem.

Exempli gratia proponatur primùm helix Archimedea & parabola simplex, & sit vt radius a b ad rectam a c, ita circumferentia tota b e 8 b ad eiusdem portionem e 8 b. Construatur separatim parabola a q p, cuius vltima applicatarum siue basis r p sit æqualis radio a b: axis autem a r sit æqualis portioni circumferentiæ b e 8 b, cuius numerator sit æqualis exponenti potestatis diametri a b, qui in hoc casu est 1. denominatur verò æquetur summæ exponentium potestatum diametri & circumferentiæ, hoc est binario: nam exponens potestatis periphericæ in hoc casu est etiam 1. Sit itaque a r axis æqualis dimidio circumferentiæ helicis constitutiuæ; sit autem in parabola vt potestas applicatæ r p, cuius exponens æquetur summæ exponentium diametri & circumferentiæ, hoc est in hoc casu numero 2. ad potestatem similem applicatæ 6 q: ita potestas rectæ a r, cuius exponens æquatur exponenti circumferentiæ b e 8 b siue 1. in hoc casu, ad similem potestatem rectæ a 6. hoc est, sit vt quadratum rectæ r p ad quadratum rectæ 6 q; ita recta r a ad rectam 6 a: curua parabolica p q a erit æqualis helici b c d a.

Esto iam vt quadratum a b ad quadratum a c, ita tota circumferentia b e 8 b ad portionem e 8 b. Exponens potestatis diametri a b in hoc casu est 2. circumferentiæ verò 1. Parabola ita construetur iuxta prædictum Canonem: applicata r p æquabitur radio a b; axis a r æquabitur besli vel duobus trienbus circumferentiæ b e 8 b, & erit vt cubus r p ad cubum 6 q, ita recta r a ad rectam 6 a. Huiusmodi verò parabola helici correlatæ æqualis erit.

Esto deinde vt recta a b ad rectam a c, ita cubus circumferentiæ b e 8 b ad cubum portionis e 8 b. In parabola, applicata r p æquabitur radio a b, axis verò a r æquabitur quadranti circumferentiæ b e 8 b, & erit vt qua-

drato-quadratum r p ad quadrato-quadratum 6 q, ita cubus r a ad cubum 6 a. Hæc autem parabola huic helici erit æqualis

Denique sit in helice vt quadratum radij a b ad quadratum rectæ a c, ita cubus circumferentiæ b e 8 b ad cubum portionis e 8 b. In parabola huic helici correlata & æquali, applicata r p erit æqualis (vt semper) radio a b; recta verò r a erit æqualis duabus quintis partibus circumferentiæ b e 8 b, & erit in parabola vt quadrato-cubus applicatæ r p ad quadrato-cubum applicatæ 6 q; ita rectæ a r cubus ad cubum rectæ 6 a.

Nec dissimilis in helicibus & parabolis cuiuslibet speciei inuicem comparandis in infinitum erit methodus. Helicis autem siue diminutæ, siue auctæ portiones cum portionibus parabolæ correlatæ nullo negotio comparabuntur. Vnde sequitur dari intra circulum infinitas numero helices specie & quantitate diuersas: imo dantur infinitæ ipsa circumferentia maiores, quod inter miracula Geometrica potest numerari; nulla tamen datur quæ non sit minor aggregato circumferentiæ & radij, & nulla etiam quæ non sit radio maior.

SCHOLIVM.

Hactenus Viri Clarißimi propositiones non minus arduæ quàm nouæ. Ex quibus perspicuum fit, quod initio diximus, per eas præparari Geometram ad centra grauitatis inuenienda iuxta methodum quam esse generalem monuimus in præfatione quinti libri. Ita porrò præparatur vt nihil ampliùs, datâ (vbi id opus fuerit) hyperbolæ quadraturâ, inuenire debeat ad definiendum grauitatis centrum in curuis lineis figurarum ex parabolâ præscripto illo modo genitarum. Attamen ad inueniendum semisolida circa axem & circa basim generata; & ad eorum centra grauitatis (quod in isto problematum genere meritò censetur difficillimum) reperienda, excogitari aliquid antè debet quàm generali illi methodo nostræ detur locus; illud verò est summa quadratorum, & cuborum explicata in prima sexti libri. Cæterùm cùm harum & aliarum etiam summarum seriem in infinitum protractam habeamus penes nos, possemus eam hîc adscribere, nisi nefas putaremus quicquam hocce in loco demere vel addere tam præclaris Viri doctißimi inuentis.

PARS POSTERIOR.

I. In tetragonismicis monstrauimus methodum inueniendi quadraturam segmentorum cuiuslibet sectionis conicæ oxygoniæ vel amblygoniæ ex dato centro grauitatis; nec non inueniendi cuneos etiam hyperbolicos, siue fiant à plano per axem transuersum ducto, quod R. P. Tacquet in lucem protulit eodem quo nos anno; siue, quod ille non attigit, fiant à plano per axem rectum acto. Methodum nudam hîc propono, vt semel omni demonstrationum prolixitate submotâ constet quàm non sit difficilis. Quisquis autem ex facilitate rei iam inuentæ, antea ipsam non fuisse difficilem auguratur, ille profectò per ridiculum loqui mihi videtur; cùm res diu quamuis, multumque quæsita conatu irrito, postea quam reperta & in medium collata fuit, cuilibet obuia prostet.

Esto (*Fig.* 115.) b d c semicirculus centro à descriptus & comprehensus diametro b c, ad quam perpendiculariter cadat diameter d a m: esto quoque (*Fig.* 116.) b c axis transuersus hyperbolarum primariarũ b, c, rectus verò d m: esto denique (*Fig.* 117.) d m axis transuersus hyperbolæ primariæ e d f; rectus b c. Diametro b c in tribus illis figuris educta sit parallela e f ad axem m d ordinatim applicata; per e, f ductæ sint ordinatim applicatæ e i, f l ad axem b c; completa sint quadrata b a m n, c a m o, & completa sint parallelogramma e r m p, f r m s. In schemate 115. descripta sit parabola b d c, cuius axis d a, basis b c; in schemate 116. descripta sit parabola b m c, cuius axis m a, basis b c; in schemate denique 117. descripta sit parabola h d g, cuius axis d q, latus verò rectum æquet rectam d a. In tribus illis figuris perimetro parabolæ iam descriptæ occurrant rectæ c p, f s in h, g, & iungatur recta h q g, quæ erit parallela rectæ e r f.

Aio si libræ planæ ponatur axis b c, sustentaculum n o; circuli vel hyperbolæ segmento e d f vt iacet manenti in fig. 115. & 117. æquiponderans aptatum sustentaculo n o esse dimidium figuræ parabolicæ h d g; in figura autem 116. duobus segmentis e y b i, f u c l æquiponderare dimidium figurarum parabolicarum h λ b i, g π c l: & in trium figurarum qualibet, tres rectas m a, a r, a q esse proportionales. Aio præterea cylindraceum altitudinis æquantis rectam a m, & baseos æquantis dimidum illud parabolicum esse æquale cuneato, vel vngulari solido abscisso per planum inclinatum gradibus 45. ad planum b a d, & incedens per axem b c. Aio denique vt est suspensum ad dimidium illud parabolicum notum, ita esse brachium m a, ad grauitatis centri, quod suspenso competit, distantiam ab axe b c. Placet etiam compendio subiicere nonnulla de quadratricibus nostris quarum mentionem fecimus in scholio prop. 44. lib. 5. vt huius nostri inuenti gustum aliquem habeat Lector.

II. Esto (*Fig.* XXVIII. Romano charactere notatâ post fig. 28. sarracenico numero distinctam) linea quælibet m a h ad easdem partes caua, & intra rectas g m, f h parallelas contenta, quas recta g f secet in f, g; ex f g abscissa sit quælibet g c, quæ fiat brachium libræ f c suspensæ ex g perpendiculo g m, & inde generetur quadratrix g i o figuræ g m a h f, ita vt sicut brachium g c ad quamlibet longitudinem g s, ita s a dimetiens figuræ suspensæ parallela perpendiculo g m, sit ad s t dimetientem quadratricis. Curuam m a d tangat in a quouis puncto recta a u b occurrens rectæ g m in b; figuræ rectilineæ s a b g parallelogrammæ, vel trapezię, vel triangulari inueniatur iisdem positis quadratrix g p t s; erit t p parabolę perimeter nota, si b a, g s non ęquidistent, vt facilè intelligitur ex septimâ propositione secundi tetragonismicorum, & ex quadragesimę methodo libri quinti superioris. Nota igitur est recta t l tangens parabolam t p. Aio rectam t l tangere quoque curuam g i t o in puncto t. Quod si recta a u ęquidistet rectę g f, linea t p erit recta & nota, vt ex iisdem propositionibus constat, & ex scholio quadragesimę quartę quinti libri iam lau-

dati. Si autem recta u a æquidistet rectæ g m, ipsa a s tanget quoque quadratricem in t, sicuti curuam m a ponitur tangere in a. Atque hæc est methodus generalissima pro quadratricum tangente inueniendâ ex data tangente curuæ cui quadratrix respondet dicto iam modo.

III. Esto (*Fig.* 118.) a c x t semisegmentum parabolicum habens axem a t, ad quem ordinatim applicata sit t x; diametri a t dupla sit t a h, & completum sit parallelogrammum a y x t; libra h t suspensa ex a, perpendiculo a y, brachio a h intelligatur figuræ a c x t generari series quadratricum producta in infinitum, ita vt sicut h a brachium ad a o longitudinem abscissam ex a t axe, ita o z dimetiens parabolici semisegmenti a c x t, se habeat ad o d dimetientem primæ quadratricis a d x t, & ita o d ad o p dimetientem secundæ a p x t; ita quoque o p ad o q dimetientem tertiæ a q x t &c.

Aio primam a d x t esse duas quintas parallelogrammi a y x t; secundam a p x t esse duas septimas eiusdem parallelogrammi; tertiam a q x t esse duas nouenas eiusdem parallelogrammi, ita vt minutiæ sequentes pro numeratore retineant binarium, denominatorem autem augeant binario; nam quarta, est duæ vndecimæ parallelogrammi a y x t; quinta, duæ decimæ tertiæ; sexta, duæ decimæ quintæ; & ita deinceps facto progressu per numeros impares. Hanc propositionem demonstro in libro manuscripto quadratricum, & per illam inuenio in circuli & hyperbolæ casibus iam positis, quadraturam quadratricum tertiæ, quintæ, septimæ &c. prout exposui in scholio quadragesimæ quartæ propositionis libri quinti. Has quadratrices appellaui *tertij ordinis*; *secundi*, eas quarum prima est semihederacea ibidem definita; *primi*, illas quæ in quadragesimâ quartâ libri quinti quadrantur. Cæterùm ex tangentium methodo suprà præscriptâ inuenies a u portionem rectæ a y in infinitum productæ interceptam inter g u parallelam tangenti a t & ipsam tangentem, esse ad u b interceptam inter u d & d b tangentem ipsius quadratricis primæ a d x, vt est binarius ad ternarium; si a d x sit quadratrix secunda, vt est binarius idem ad quinarium; si sit tertia, vt idem binarius ad septenarium, & ita de aliis, retento binario vbique, & facto progressu per numeros impares 3. 5. 7. 9. 11. &c. Pari prorsus methodo in quadratricibus primi ordinis inuenies primæ quadratrici quæ est triangulum respondere numeros 1. 1. secundæ quæ est parabola 1. 2. tertiæ 1. 3. quartæ 1. 4. quintæ 1. 5. & ita deinceps absq; vllo progrediendi fine. Quæ omnia facilia esse incipiunt ex quo monstrata semel fuerunt; mirabilem verò aperiunt viam ad ipsarum quadratricum curuarum dimensionem.

IV. In schemate circuli (*Fig.* 115.) & hyperbolæ (*Fig.* 117.) recta a d bifariam secetur in t, & describatur d x perimeter circelli, vel hyperbolellæ primariæ cuius axis transuersus sit a d; in altero autem schemate hyperbolico (*Fig.* 116.) recta m a bifariam secetur in t, & describatur a x hyperbolella primaria cuius centrum t, axis transuersus m a.

Aio ſi in tribus illis figuris libra m d ſuſpendatur ex a, brachio m a, perpendiculo a b, fiantque tres rectæ m a, a r, a q proportionales; figuræ b e r a in circuli ſchemate 115. ſecundam quadratricem eſſe æqualem dimidio figuræ q z u a: figuræ e r d in hyperbolæ ſchemate 117. ſecundam quadratricem eſſe æqualem dimidio figuræ q d z: denique in altero hyperbolæ ſchemate 116. figuræ e y b a r ſecundam quadratricem eſſe æqualem dimidio figuræ q a z. Iſtud demonſtro in manuſcripto libro; vnde obtineo quartas, ſextas, octauas, &c. per pares numeros incedendo, ſicuti in illo ſcholio monui. Oſtendo quoque arcum a z in figuris 115. 116. eſſe ſimilem duplo arcûs b e; in figura autem 117. arcum d z eſſe ſimilem duplo arcûs d e. Vnde obtineo quadratricem ſecundam in figuris 115. 116. reduci ad ſpatium mixtum ex rectilineo noto & ex quadrante figuræ b e r a addititio, quam *condictam* appellare ſolitus ſum: in figura autem 117. reduci ad quadrantem pari modo addititium figuræ e r d condictæ. Simili methodo oſtendo quartam quadratricem in figurâ 115. 117. reuocari ad mixtum ex rectilineo noto & ex addititio ſemiquadrante figuræ condictæ; in figura autem 116. ex ablatiuo eiuſdem figuræ ſemiquadrante, & ita pergo ad reliquas omnes in gradu numerorum parium collocatas; quas hîc prætereo, cùm eas nunc obiter indicaſſe ſatis ſit propoſito. Inde quoque eruo gradus parium ſedium explicatos in octauæ propoſitionis corollariis libri tertij, ita vt primus gradus ad poſitionem rectæ m d ſit parallelogrammum dimetientis a m, ſecundus figura dimetientis e i; oſtendo autem gradus imparium ſedium ſingulos eſſe æquales rectilineo noto; parium verò eſſe mixtos ex certâ portione condictæ figuræ, & ex rectilineo noto. Quod ſtatim liquet ſi notæ fuerint quadratrices; nam in circuli ſchemate 115. primus gradus eſt parallelogrammum dimetientis m a; ſecundus figura dimetientis i e; tertius eſt † primus – quadratrix ſecunda primi genita librâ b c ſuſpenſâ ex a perpendiculo a d, brachio a c; quartus eſt † ſecundus – ſecunda quadratrix ſecundi; quintus eſt † primus – bis quadratrix ſecunda primi † quarta primi quadratrix; ſextus eſt † ſecundus – bis quadratrix ſecunda ſecundi † quadratrix quarta ſecundi, & ita de reliquis iuxta methodum indicatam in corollario tertio decimæ ſeptimæ tertij libri. In hyperbolæ ſchemate 116. primus eſt parallelogrammũ dimetientis m a; ſecundus figura dimetientis i e; tertius – primus † quadratrix ſecunda primi libra b c ſuſpenſa ex a, brachio a c; quartus eſt – ſecundus † quadratrix ſecunda ſecundi eodem modo genita; quintus eſt † primus – bis ſecunda quadratrix primi † quarta quadratrix primi; ſextus eſt † ſecundus – bis ſecunda quadratrix ſecundi † quarta quadratrix ſecundi; & ita de aliis. In ſchemate 117. primus eſt idem parallelogrammum dimetientis a m; ſecundus figura dimetientis i e; tertius † primus † ſecunda quadratrix primi; quartus † ſecundus † ſecunda quadratrix ſecundi; ſextus eſt † ſecundus † bis ſecunda quadratrix ſecundi † quarta quadratrix ſecundi; & ſic de ſeptimo, octauo & aliis; gradus huius ſeriei appello te-

tragonismicos. Porrò dum dixi quadratricem aliquam esse mixtam ex rectilineo noto, & ex curuilineo; nolim asserere vbique adesse rectilineum notum; nam quadratrices parium sedium in circuli schemate 115. carent rectilineo, quando sumuntur pro tota figurâ b e d a.

V. Esto (*Fig*. 119.) b e d semicirculus, diametro b d & peripheria b e d comprehensus; illi ita respondeat figura g o d b (nomine figuræ hîc *locum asymptoticum* etiam intelligo illum, quem sub finem vigesimæ sextæ libri septimi definitum habes) ad positionem tangentis b f, vt si a d libra fiat dupla diametri b d, & intelligatur suspendi perpendiculo b f, quæcunque m o parallela rectæ b f ducatur occurrens perimetris d e, d g in n, o, & diametro b d in m; vt est brachium a b ad b m, ita m o dimetiens figuræ g o d b sit ad m n. Quod est semicirculum esse quadratricem figuræ g o d b. Esto b c bifariam secta in h, & ad partes oppositas intelligatur semicirculus b p d, nec non s d b eadem quæ g o d b. Aio spatium istud g o d s integrè sumptum inter tangentes d x, f b esse æquale quadruplo circuli b e d p, eiusque grauitatis centrum esse h; perimetrum verò g o d s productam in infinitum, nunquam conuenire cum recta f b, quamuis propiùs ad illam accedat; ac proinde ipsam f b esse asymptotum definitam in scholio illius vigesimæ sextæ septimi libri, cuius trigesima confirmatur præsenti theoremate, sicuti & duobus sequentibus. Portionis cuiuscunque o d u quadraturam & centrum grauitatis dare possumus quoque assumptâ circuli quadratura; hocque ipsum in hyperbola præstamus, postulata eiusdem hyperbolæ quadratura.

VI. Esto (*Fig*. 120.) quadrans circularis e n d c centro c descriptus; sitque b d dupla semidiametri c d: sit triangulum q c d rectangulum, cuius latera c d, d q sint æqualia; esto quadrantis e n d c quadratrix semihederacea c t d m; intelligatur figura o c m ita semihderaceæ respondens, vt quæcunque m o parallela tangenti d q ducatur occurrens curuis c o, c t in o, t, & rectæ c q in p, tres rectæ m t, m p, m o sint proportionales. Aio rectam d q esse asymptotum perimetri c o; totamque figuram comprehensam curua c o & rectis c d, d q esse æqualem quadrato rectæ c d; & si ad partes oppositas intelligatur alia c r priori c o similis & æqualis; sitque c d recta ad c m vt quadratum diametri circuli ad ipsum circulum; aio punctum m esse centrum grauitatis eiusmodi figuræ; cuius omnes portiones absolutè conuerto alibi in rectilineum notum; earum verò grauitatis centrum designo circuli quadratura assumpta. Non admodum dissimili ratione inuenio quadraturam figuræ c o m, si c d sit semiaxis hyperbolæ, & d t eius quadratrix prima, genita eodem brachio b c, & perpendiculo c e; dummodo maneat recta c q, in infinitum tracta.

VII. Esto (*Fig*.119.) semicirculus b p d centro c descriptus; sítque d r linea conchoides à Nicomede descripta, ita vt eius asymptotus sit c p semicirculum tangens, & ex puncto b educta qualibet recta b r, secante lineas c p, d r in z, r, recta z r sit æqualis semidiametro c d, prout generatio chon-

choidis relata apud Eutocium in prop. 1. lib. 2. Archimedis de Sphę. & Cyl. exigit; ſuper c e conſtructum ſit quadratum e c d x, & per x deſcripta ſit hyperbola i x q, cuius ſemiaxis c x, & aſymptoti e c, c d; per m quodlibet punctum inter c & d iacens, educta ſit m r parallela aſymptoto c p, occurrens perimetro conchoidis in r; limbo ſemicirculi b p d in t, hyperbolę in i; ex recta b d abſcindatur d y ęqualis rectę m t; per y agatur y q æquidiſtans aſymptoto e c. Aio conchoidis portionem m d r eſſe æqualem figuræ hyperbolicæ i m y q auctę figura circulari m d t, & imminutæ rectangulo contento ſub c b & m t rectis. Si autem intelligatur ad partes e replicari figura m r d; aio ſi ſegmenti duplicatæ conchoideos intercepti inter rectas t m, d x centrum grauitatis ſit B, rectam c d ad c B eſſe, vt eſt figura n d m aucta ſegmento i m y q, & imminuta rectangulo c b, m t ad figuram d n m auctam ſpatio quod figurę ipſi d n m æquiponderat libra b d ſuſpenſa ex centro c perpendiculo c p, brachio b c. Quòd ſi pro puncto vel, vt appellatur à Nicomede, polo b ſumatur h in recta c b, ſiue c h ſit minor, ſiue maior ipſa c b, modò eadem maneat c d, quam idem Nicomedes nominat *longitudinem regulæ* μέγεθος κανόνος: eadem eſt constructio, niſi quod quadratrix ſegmenti n d m generatur brachio h c, ac proinde eſt ad generatam brachio b c, vt ipſa b c recta ad h c; pro ſegmento autem i m y q, & pro rectangulo b c, m t ſumuntur ſpatia quę ad ipſa ſint, vt eſt h c recta ad b c.

VIII. Eſto (*Fig.* 115.) quælibet linea curua d f ad eaſdem partes caua intra angulum rectilineum d a c contenta; eius verò hęc ſit proprietas, vt quęcunque agatur parallela rectis d a, a c, ea non occurrat ipſi curuę d f intra angulum d a c quantumuis protractæ, niſi in vno puncto. Eſto quęlibet alia figura curuilinea vel rectilinea d g l a ad poſitionem rectę d a inſiſtens baſi a c; deinde verò intelligatur ad eandem poſitionem tranſferri ſuper curuam d f, & demum ſuper eadem curua inclinari ad poſitionem rectę a p cuiuſlibet; dimetientes autem ita inclinatę, ſint ad dimetientes figurę erectę, vt a p diameter parallelogrammi i a m p (cuius latus a m iacet in directum rectę d a) eſt ad latus p m. Ex methodo decimę octauę primi tetragoniſmicorum libri colligimus inclinatam illam figuram ſuper curua d f ad libitum producta intra angulum d a c, eſſe ęqualem erectę ſimul & alteri ſuper eadem curua d f inclinatę ad poſitionem rectę a c quam voco horizontalem, ita vt eius dimetientes ſingulę ſint ad ſingulas dimetientes figurę erectę, vt eſt m p latus ad m a; eſſe inquam ęqualem ſimul erectę & horizontali, quoties omnes parallelę ad rectam a p non occurrent curuę d f productę intra angulum, niſi in vno puncto; quòd ſi inclinatio intelligatur fieri ad poſitionem rectę a s, & illi parallela vna tangat curuam in puncto exempli cauſa f; tunc portio inclinatę ſuper portione d f, vel ſuper reliqua eiuſdem d f portione poſita intra illum angulum, erit ęqualis differentię qua differunt erecta figura & horizontalis. Atque hęc generaliter; particulatim verò ſi d f c ſit arcus circuli & d g c

parabolæ,

parabolæ, verticis d, vt paulò antè statuimus; figura horizontalis primaria erit figura comprehensa ad positionem horizontalem sub rectâ d a & sub parabola cuius axis sit a c, vertex a, latus rectum æquale ipsi a d. At si parabolæ d g c intelligatur insistere circularis quadrans d f c e, figura horizontalis primaria erit parabola verticis a, axis a d, cuius latus rectum b a. Voco autem figuram primariam hîc, eam quæ gignitur, cum rectæ i a, a m sunt æquales; ex illa enim eruuntur secundariæ, quoniam ad illam ipsæ secundariæ sunt vt recta i a ad a m. Quæ de circulo scripsimus facilè, vt patet, applicantur hyperbolæ in schematibus 116. 117. Grauitatis verò centra generali methodo reperiuntur, per grauitatis centra erectæ & horizontalis pari ratione tractata; si nempe inclinata ad positionem rectæ a p vel a s intelligatur ita aptari curuæ d f, vt eius dimetientes singulæ bifariam secentur à curua d f; Si item erecta & horizontalis pari pacto intelligantur aptari eidem curuæ; idem erit grauitatis centrum, quod duarum simul erectæ & horizontalis in primo casu, & quod differentiæ illarum in secundo.

IX. Dum ista Appendix nunc cuditur, prælo etiam mandatur *Dissertatio de linearum curuarum cum rectis comparatione Autore M. P. E. A. S.* doctissimo, quam vbi summa cum admiratione legi, perspexi in vtroque quadratricum ordine primo & tertio, quos suprà n. 3. exposui, posse assignari methodum generalem dimetiendi earum curuas. Illa porrò hæc est: esto a y x t quadratum (*Fig.* 118.) & a z x parabola quam tangat a y, cuius axis a t, ordinata t x & intelligantur quadratrices a d x prima, a p x secunda, a q x tertia &c. vt n. 3. Ducta præterea sit diameter a g x; ergo quadratum a y m h ad positionem lineæ rectæ a h erit ex scholio quadragesimæ quartæ quinti libri primus quadratricum primi ordinis gradus; secundus triangulum x a y, tertius figura a z x y parabolica; & ita continuata serie quousque libuerit, notus erit tetragonismus singulorum graduum per illam quinti libri iam laudatam propositionem. In primo isto ordine secundus gradus est triangulum rectilineum, ideóque linea a g x cum sit recta, non est conuertenda in rectam; tertius gradus habet curuam a c x, & illi assignatur minutia cuius denominator est 4. quadratus numerus binarij denotantis sedem superiorem, numerator 1. quarto assignatur minutia cuius numerator est 1. denominator est 9. quadratus numerus ternarij denotantis gradum proximè superiorem; quinto pariter attribuitur minutia numeratoris 1. denominatoris 16. & ita de aliis. Vt denominator gradûs cuius curua est redigenda in rectam se habet ad numeratorem, ita fiat a h recta ad e h, & compleatur parallelogrammum h e f m. Numerus denotans gradum proximè superiorem illi cuius curua suscipitur redigenda in rectam, duplicetur; & ex duplicato auferatur vnitas; vt si curua tertij gradus conuertenda sit, superior gradus notatur binario, duplus binarij est quaternarius, dempta inde vnitate restat ternarius; ita si quarti curua tractetur, proximè superior est ternarius, duplus illius numerus est sena-

rius, dempta vnitate residuus fit quinarius. Iste numerus vocetur *residuus*. Super e f recta intelligatur insistere eiusdem ordinis gradus qui designatur numero residuo; vt pro curuâ tertij gradûs, e r D f est tertius gradus; pro curua quarti, e r D f est quintus; pro curua quinti, e r D f est septimus; pro curua sexti, e r D f est nonus; pro curua septimi e r D f est vndecimus &c. Intelligatur figura h e s l m insistere super basi h m ad positionem rectæ h a, & ita se habere ad figuram h e r D m, vt ductâ qualibet r n parallelâ ad rectam a h occurrente lineis e r D, e s l, e f, h m in r, s, i, n, tres rectæ n i, n s, n r sint proportionales; atque iuxta modum loquendi propositionis primę sexti libri figura h e r D m sit summa quadratorum figuræ h e s l m: vnde patet istam quadratorum summam esse nobis notam. Aio si curuæ illæ producantur in infinitum, & intelligatur parallelogrammum mixtum cuius basis sit curua quam dimetiri volumus, altitudo verò æquet rectam h e, istud parallelogrammum esse ad positionem rectæ a h condicta ratione æquale figuræ e s l m h, ita vt figura e h n r sit æqualis rectangulo contento sub h e & sub recta æquante curuæ portionem interceptam parallelis à h, n r productis. Quando curua e r erit parabola vt in tertio gradu, curuam e s esse hyperbolam semiaxis transuersi h e, conficitur ex methodo quam initio huius secundæ partis tradidimus; hæc verò hyperbolica figura Fermatianum inuentum numero 1. primæ partis expositum mirè confirmat; haud tamen scio qua sit Vir ille vsus methodo, mecum enim communicata fuit sola propositio, vt ibi iacet, sine vlla demonstratione.

X. In ordine tertio prima quadratrix a d x habet minutiam cuius numerator est quaternarius, denominator est 9. quadratus ternarij; quadratricis a p x secundæ minutia habet numeratorem 4. (qui & reliquis istius ordinis quadratricibus communis est) denominatorem habet 25. quadratum numeri 5. tertiæ minutia habebit pro deminatore 49. quadratum numeri 7. pro sequenti sumetur quadratus numeri 9. tùm numeri 11. deinde numeri 13. & ita alij formabuntur additione binarij. Figura verò e r D f (*Fig.* CXVIII.) pro prima quadratrice e d x erit secundus gradus primi ordinis, siue triangulum rectilineum; pro secunda a p x, erit quartus eiusdem ordinis primi; pro tertia a q x, erit sextus eiusdem ordinis; & ita pro quarta, erit octauus; po quinta decimus; pro sexta, duodecimus, & sic deinceps aliorum graduum numerus efformabitur accessione binarij. Reliqua verò se habent vt in primo ordine, nempe quadratum s n figuræ e s l m h est æquale rectangulo r n i. Hinc verò liquet pro prima quadratrice a d x, lineam e s l esse parabolicam; quod penitus concinit commendabilissimo Autoris M. P. E. A. S. inuento; curua enim a d x esse conuincitur illa quam ille *parabolam suam & diuersam ab Archimedea* appellat. Assignata igitur est methodus generalis determinandi figuram h e s l m insistentem super notâ recta, cuius summa quadratorum sit nota, & quæ ad positionem rectæ a h sit condicta ratione æqualis parallelogrammo mixto definito in decima sexta libri quinti, & paulò antè explanato.

Cæterùm Eximius ille Geometra Dissertationis suæ causam testatur fuisse effatum quorundam planè simile illi quod nunc memini extare apud Dettonuillæum in tractatu de Dimensione curuarum Cycloidicarum p. 7. *Admiratione dignum esse ordinem Naturæ, qui non patitur inueniri rectam æqualem curuæ, nisi antè sumpta fuerit rectæ cuiusdam cum curua linea æqualitas. Inde verò in Cycloidica simplici, cuius basis ponitur æqualis circumferentiæ circuli genitoris, euenire vt curua illa demonstretur esse æqualis lineæ rectæ.* Sed istum ad hanc vsque diem inuiolatum *Naturæ ordinem* nunc tandem Tolosanæ cessisse Geometriæ, est quod gaudeant omnes, quotquot nouis primæ notæ inuentis fauêre se profitentur.

XI. Esto (*Fig.* xx. characteris Romani, post figuram notæ 20.) quælibet curua o d x ad easdem partes caua, cuius axis a y; ordinatæ d e ad axem perpendiculares; tangentes autem d m interceptæ inter curuam o d x & axem a y sint singulæ æquales rectæ i s quæ in figura ſ l f i æquidistet axi, & per d tactum ducta sit; librâ n a f suspensâ ex a, perpendiculo e a, brachio a n longitudinis ad libitum assumptæ, intelligatur figura r d f i, cuius quadratrix sit ſ l f i, ita vt sicut brachium n a est ad longitudinem quamlibet a i, ita sit r i dimetiens figuræ superioris r d f i ad ſ i dimetientem inferioris. Aio figuram r d f i esse ad positionem axis a y condicta ratione æqualem parallelogrammo mixto baseos d x, altitudinis a n. Aio præterea si superficies cylindrica, cuius portio est parallelogrammum mixtum baseos d x, secetur plano per axem a y ducto, & ad planum a o x gradibus 45. inclinato; figuram i ſ l f esse æqualem illi vngularis vel cuneatæ superficiei (definitur in decima sexta quinti libri) portioni quæ insistit super curuâ d x. Ista duo theorema sunt generalissima, mihíque expedita & vtilia imprimis extiterunt: ex iis enim plurima reperi, in quibus locum non postremum obtinet theorema quod sequitur omnium vltim.

XII. Esto (*Fig.* ead.) o d x hyperbola primaria, cuius semiaxis transuersus a o æquet semiaxem rectum a y; ex a o abscindatur a t recta, quæ ad a o sit potestate vt vnitas ad binarium; intelligatur hyperbola t c g cuius semiaxes sint a t, a y: intelligatur præterea figura i r d f, quæ ita se habeat ad hyperbolas o d i, t c i vt recta y a sit ad ordinatim quamlibet applicatam i r, sicut ordinatim applicata i d se habet ad ordinatim applicatam i c. Aio figuram i r d f esse ad positionem rectæ a y condicta ratione æqualem parallelogrammo mixto altitudinis æquantis rectam ay, baseos d x, modo suprà præscripto. Curuæ porrò ſ l, r d in præsenti casu sunt asymptoti & *inconcurrentes* cum recta o p; dimetiens verò i r, quodcunque sit interuallum o i, est perpetua legè maior quàm a n vel a y, excessu minori vsque & minori, quò longiùs punctum i recedit à puncto o; patet autem totam figuram respondentem parallelogrammo mixto totius baseos o d x esse locum definitum in scholio vigesimæ sextæ libri septimi, & esse æqualem spatio finito, nempe rectangulo comprehenso sub n a &

ſub recta æquante curuam o d x : vnde confirmantur quæ ſcripſimus in corollario ſecundo vigeſimæ nonæ ſeptimi lbri iam laudati.

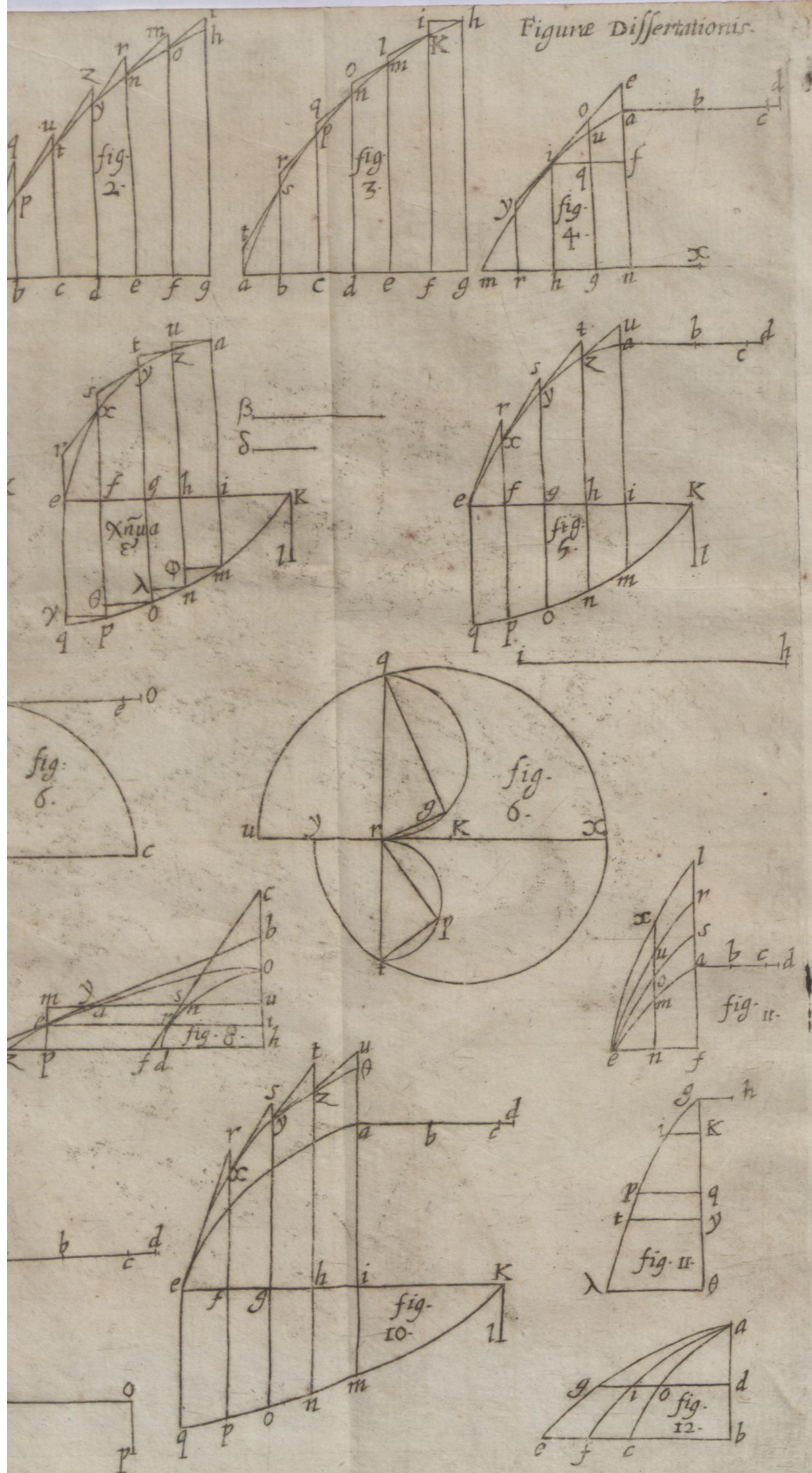
Atque hæc omnia quæ vel in iſtis nunc de Cycloide libris, vel in Elementis tetragoniſmicis aliàs ſcripſi, debere me fateor inueſtigationi tetragoniſmi circularis & hyperbolici; in quo licet capiendo operam fortaſſe perdiderim præcipuam (quod quidem ſemper & egomet ipſe præſumo, & præſumi ab aliis, velim) non tamen, vt reor, omnem penitus: cùm in venatione iſtius tetragoniſmi occurriſſe mihi videatur præda non prorſus contemnenda mei hominibus moduli. Hoc verò iam extremum edico, hîc iſtius venationis eſſe tandem finem, méque ſtudiis aliis cùm minùs laborioſis, tum ætati iam prouectæ dulcioribus poſthac eſſe, ſi Deus Optimus fauerit, vacaturum.

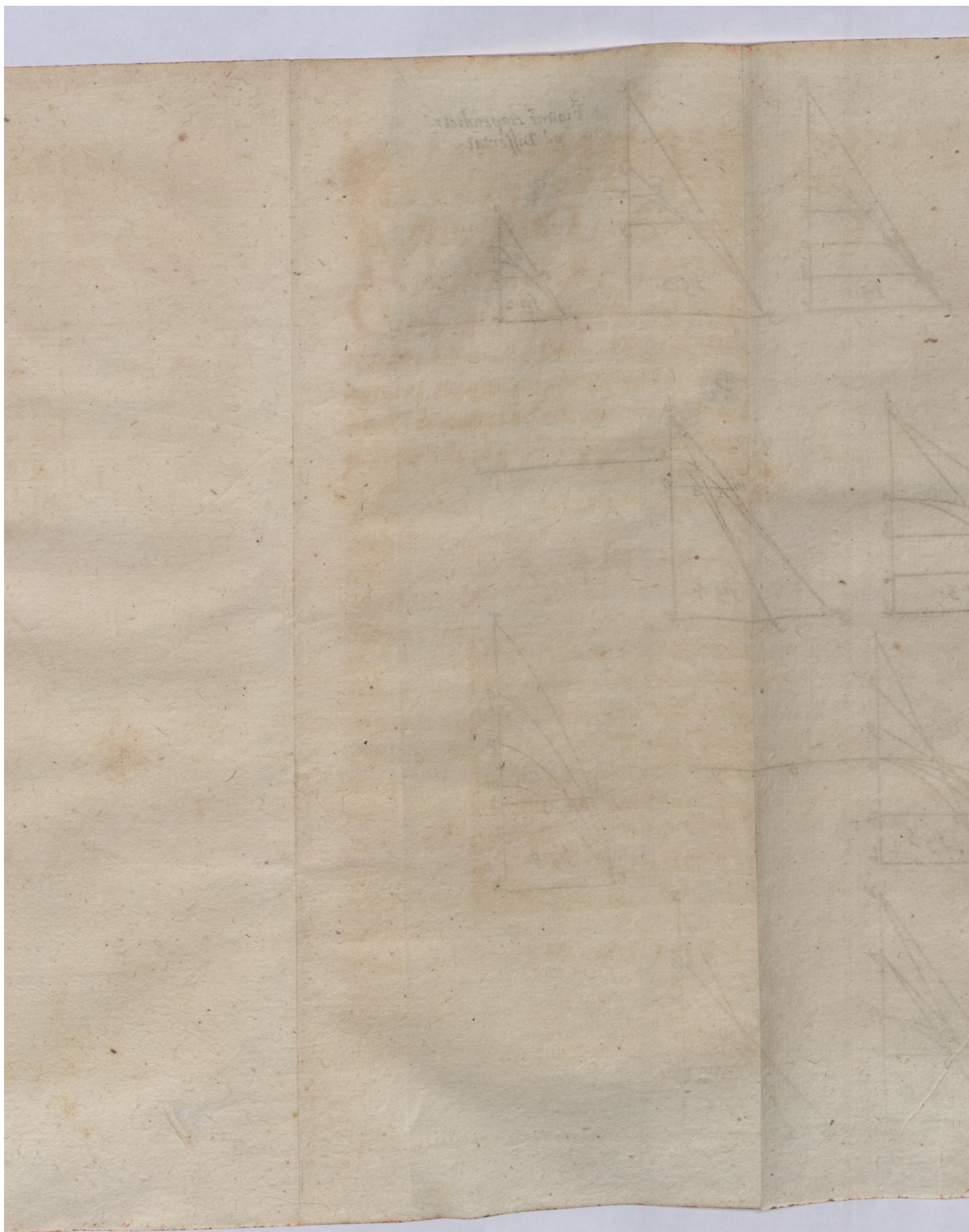
TABVLARVM SEDES ET INDEX.

ERRATA SIC CORRIGE.

Pag. 75. *lin.* 2. † c c. *pag.* 132. *lin.* 27. calculum illum. *pag.* 133. *lin.* 28. efflictim. *pag.* 153. *lin.* 10. libri primi. *pag.* 154. *lin.* 9. ſintque a x, b l æquales. *pag.* 183. *lin.* 14. ſecetur in a. *pag.* 204. *lin.* 4. *ante finem* duarum G M. *pag.* 232. *lin.* 1. duarum. *pag.* 238. *lin.* 25. vbi ſcripſi. *pag.* 292. *lin.* 8. iſtos octo. *pag.* 293. *lin.* 15. εἶμεν. *pag.* 296. *lin.* 24. & 25. ῥοπῆς. *pag.* 314. *lin.* 19. g b, b e reciprocè. *pag.* 348. *lin.* 5. ego verò *pag.* 354. *lin.* 3. *ante finem* vt f e recta ad f u. *pag.* 349. *linea* 4. *adde hæc verba*; Exagellæ vocem pro trutinâ vſurpauit Ennodius, vt eruditè aduertit Sirmondus in Notis ad illum. *ibid. lin.* 13. *ante finem ſcribe* 350. pro 305. *pag.* 357. *lin.* 22. σταθμώμενα. *pag.* 374. *lin.* 3. *ante finem* R. P. Zucchius. *Cætera leuiora vel etiam minùs leuia Typographi errata caſtigabit & condonabit æquus Lector. In Sculptoris figura 26. fuit vna & eadem litera F per incuriam annotata duobus locis; ſed id nullam pariet confuſionem, vti ſpero, Lectori iam præmonito. Idem contigit in figura 58. vbi litera x bis adſcribitur.*

FINIS.


Figuræ Dissertationis.
fig. 2.
fig. 3.
fig. 4.
fig. 5.
fig. 6.
fig. 6.
fig. 8.
fig. 10.
fig. 11.
fig. 11.
fig. 12.



Figuræ Appendicis. ad Dissertat.

